

## ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ И МАШИНОСТРОЕНИЯ

УДК 62.752, 621:534;833; 888.6, 629.4.015;02

DOI: 10.18324/2077-5415-2024-4-7-14

## Определение динамических взаимодействий в механической колебательной системе с дополнительными связями

С.К. Каргапольцев<sup>1a</sup>, Р.С. Большаков<sup>2b</sup><sup>1</sup> Иркутский национальный исследовательский технический университет, ул. Лермонтова, 83, Иркутск, Россия<sup>2</sup> Иркутский государственный университет путей сообщения, ул. Чернышевского, 15, Иркутск, Россия<sup>a</sup> kck6262@mail.ru, <sup>b</sup> bolshakov\_rs@mail.ru<sup>a</sup> <https://orcid.org/0000-0002-4601-3099>, <sup>b</sup> <https://orcid.org/0000-0002-1187-5932>

Статья поступила 29.10.2024, принята 13.11.2024

На примере типовой расчетной схемы вибрационного стенда развиваются подходы к оценке динамических взаимодействий между составляющими элементами технологического оборудования. Такое оборудование используется во многих отраслях промышленности при реализации технологических процессов различной направленности. Оно должно стабильно работать независимо от внешних и внутренних факторов. Расчетными схемами технологического оборудования при действии вибрационных процессов являются механические колебательные системы с различным числом степеней свободы. Расчетной схемой рассматриваемого технического объекта является механическая колебательная система с твердым телом на упругих опорах. Используется методология структурного математического моделирования, когда исходной расчетной схеме сопоставляется эквивалентная в динамическом отношении система автоматического управления. Основные положения применяемой теории позволяют использовать методы анализа и синтеза, характерные для теории автоматического управления. Оценивается возможность введения дополнительных упругих элементов параллельно штатным пружинам. Исследованы возможности оценки динамического состояния технического объекта при действии двух внешних силовых факторов. Рассматривается возможность использования передаточной функции межпарциальных связей для уменьшения колебаний по угловой степени свободы движения рабочего органа за счет соответствующего подбора настроечных параметров. Проанализирован весь спектр реакций связей, действующих на узлы креплений как дополнительных звеньев, так и основных упругих элементов. Получены выражения для определения статической и динамической составляющей реакций связей, а также соотношения для определения полных реакций. Статические реакции рассмотрены при отсутствии внешнего возмущения, а динамические реакции получены при действии двух вибрационных воздействий. Приведены аналитические соотношения для определения реакций связей, представляющие собой сложные дробно-рациональные выражения.

**Ключевые слова:** механические колебательные системы; связность движений; межпарциальные связи; реакции связей; передаточные функции.

## Identification of dynamic interactions in a mechanical oscillatory system with additional connections

S.K. Kargapoltsev<sup>1a</sup>, R.S. Bolshakov<sup>2b</sup><sup>1</sup> Irkutsk National Research Technical University; 83, Lermontov St., Irkutsk, Russia<sup>2</sup> Irkutsk State Transport University; 15, Chernyshevsky St., Irkutsk, Russia<sup>a</sup> kck6262@mail.ru, <sup>b</sup> bolshakov\_rs@mail.ru<sup>a</sup> <https://orcid.org/0000-0002-4601-3099>, <sup>b</sup> <https://orcid.org/0000-0002-1187-5932>

Received 29.10.2024, accepted 13.11.2024

The approach to the assessment of dynamic interactions between the constituent elements of technological equipment is developed using a typical calculation scheme of a vibration stand as an example. Such equipment is used in many industries when implementing technological processes of various types. It must operate stably regardless of external and internal factors. Calculation schemes of technological equipment under the action of vibration processes are mechanical oscillatory systems with different numbers of degrees of freedom. The calculation scheme of the technical object under consideration is a mechanical oscillatory system with a rigid body on elastic supports. The methodology of structural mathematical modeling is used, when the initial calculation scheme is compared with an equivalent automatic control system in dynamic terms. The main provisions of the applied theory allow using the methods of analysis and synthesis characteristic of the theory of automatic control. The possibility of introducing additional elastic elements parallel to the standard springs is estimated. The possibilities of assessing the dynamic state of a technical object under the action of two external force factors are investigated. The possibility of using the transfer function of interpartial connections to reduce oscillations in the angular degree of freedom of movement of the working element due to the appropriate selection of tuning parameters is considered. The entire spectrum of reactions of connections acting on the fastening units of both additional links and main elastic elements is analyzed.

Expressions for determining the static and dynamic components of reactions of connections, as well as relations for determining the full reactions are obtained. Static reactions are considered in the absence of external disturbance, and dynamic reactions are obtained under the action of two vibration effects. Analytical relations are given for determining reactions of connections, which are complex fractional-rational expressions.

**Keywords:** mechanical oscillatory systems, connectivity of movements, interpartial connections, reactions of connections, transfer functions.

**Введение.** Текущий взрывной рост промышленного производства во многих отраслях промышленности как сырьевой направленности, так и высокотехнологичного сегмента предполагает увеличение объемов использования технологических машин и инструментов, принцип действия которых основан на применении вибрационных процессов [1–6]. Проблемы повышения долговечности и надежности работы вибрационных машин при реализации технологических процессов, связанных с вибротранспортированием, классификацией гранулированных сред, вибрационным упрочнением и другими вариантами приложения колебательных процессов решены в [7–12]. Решения задач в этом направлении с усовершенствованием математического моделирования в области оценки динамических свойств вибрационных технологических машин, определения динамических взаимодействий в их узлах и опорных элементах и др. найдены в [13–16].

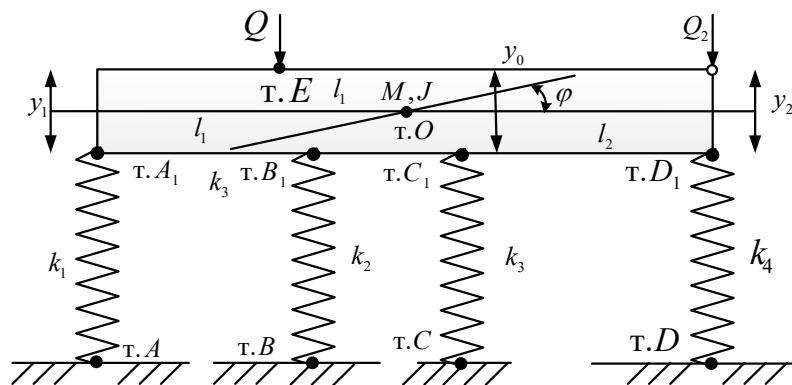
Современные тенденции в направлении повышения надежности и долговечности технологического оборудования связаны с использованием рычажных свойств рабочего органа для обеспечения связности его координат движения с вращательной и поступательной степенями свободы движения, а также с контролем влияния внешних воздействий на элементы, являющиеся опорными [16–20]. В этом случае необходимо использование дополнительных параметров динамического состояния, к которым можно отнести связность колебательных процессов и реакции связей в различных точках системы. Данные критерии могут быть найдены на основе соответствующих передаточных функций, представляющих собой сложные дробно-рациональные выражения.

Внимание к научным исследованиям, связанным с оценкой дополнительных параметров динамического состояния, обусловлено недостаточным изучением динамических процессов, характерных для технологических машин. В частности, детализация особенностей связности движений межпарциальных систем, состав-

ляющих структуру механической колебательной системы с твердым телом, позволяет получать технологический режим контроля и управления вибрационными процессами при интерпретации исходной расчетной схемы технического объекта как системы с одной степенью свободы. Приведение системы к таким условиям дает возможность повышения эффективности реализации технологии вибрационного упрочнения длинномерных деталей. Данные же о реакции связей дают информацию полном спектре усилий, воздействующих на узлы и опоры исследуемого технического объекта.

В предлагаемой статье рассматривается использование передаточной функции взаимодействия межпарциальных связей и реакций связей для оценки динамических свойств вибрационных технологических машин для повышения их надежности и долговечности.

**I. Объекты исследований.** Колебательные процессы являются одними из основных при реализации технологических процессов в производственной сфере. Используемое оборудование в большинстве случаев реализует малые колебания, что обуславливает использование в качестве расчетных схем таких технических объектов механические колебательные системы. В частности, для вибрационных технологических машин характерной особенностью является наличие рабочего органа в виде твердого тела определенной длины. В этом случае расчетной схемой такой технологической машины будет являться механическая колебательная система с твердым телом на двух упругих опорах. Однако в большинстве случаев для контроля и управления динамическим состоянием двух опор недостаточно. В связи с этим необходимо введение дополнительных элементов в структуру системы, представляющей собой расчетную схему вибрационной технологической машины с опорой на несколько упругих элементов ( $k_1, k_2, k_3, k_4$ ) (рис. 1). Внешняя сила, действующая на рабочий орган технического объекта в т.  $E$ , носит гармонический характер, а его движение описывается координатами  $y_1, y_2$  и  $y_0, \varphi$  при неподвижном базисе [3].



**Рис. 1.** Расчетная схема вибрационной технологической машины с избыточными упругими связями с центром масс в т.  $O$  ( $l_E = EO, l_A = A_1O, l_B = B_1O, l_C = C_1O, l_D = D_1O$ )

Связи между системами координат определяются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} y_0 &= ay_1 + by_2, \varphi = c(y_2 - y_1), y_1 = y_0 - l_1\varphi, \\ y_2 &= y_0 + l_2\varphi, a = \frac{l_2}{l_1 + l_2}, b = \frac{l_1}{l_1 + l_2}, \\ c &= \frac{1}{l_1 + l_2}, (l_1 = A_1O, l_2 = D_1O). \end{aligned} \quad (1)$$

Запишем выражения для кинетической и потенциальной энергии исходной системы, принимая во внимание, что рабочий орган в виде твердого тела (рис. 1) обладает массой  $M$  и моментом инерции  $J$ :

$$T = \frac{1}{2}M \dot{y}_0^2 + \frac{1}{2}J \dot{\varphi}_0^2, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2}k_1(y_0 - l_{A1}\varphi)^2 + \frac{1}{2}k_2(y_0 - l_{B1}\varphi)^2 + \\ &+ \frac{1}{2}k_3(y_0 + l_{C1}\varphi)^2 + \frac{1}{2}k_4(y_0 + l_{D1}\varphi)^2, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_0} = M \dot{y}_0, \frac{\partial \Pi}{\partial y_0} = k_1 y_0 - k_1 l_{A1} \varphi + k_2 y_0 - k_2 l_{B1} \varphi + k_3 y_0 + k_3 l_{C1} \varphi + k_4 y_0 + k_4 l_{D1} \varphi,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = J \dot{\varphi}, \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = k_1 l_{A1}^2 \varphi - k_1 l_{A1} y_0 + k_2 l_{B1}^2 \varphi - k_2 l_{B1} y_0 + k_3 l_{C1}^2 \varphi + k_3 l_{C1} y_0 + k_4 l_{D1}^2 \varphi + k_4 l_{D1} y_0,$$

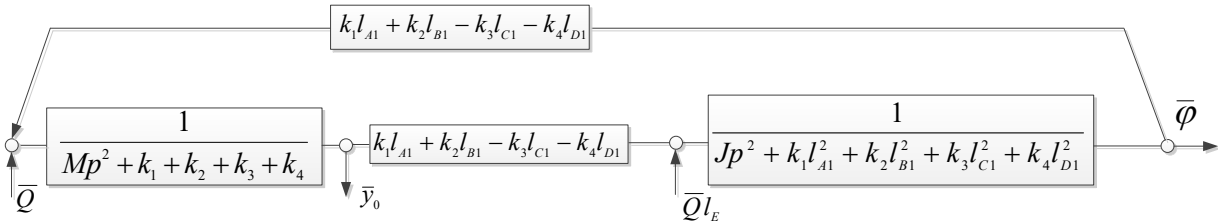


Рис. 2. Структурная математическая модель системы по рис. 1

Запишем передаточные функции системы при одновременном действии двух внешних возмущений при малых колебаниях относительно положения статического равновесия:

$$W_1(p) = \frac{\bar{y}_0}{\bar{Q}} = \frac{Jp^2 + k_1 l_{A1}^2 + k_2 l_{B1}^2 + k_3 l_{C1}^2 + k_4 l_{D1}^2 + l_E(k_1 l_{A1} + k_2 l_{B1} - k_3 l_{C1} - k_4 l_{D1})}{A_0(p)}, \quad (7)$$

$$W_2(p) = \frac{\bar{\varphi}}{\bar{Q}} = \frac{l_E(Mp^2 + k_1 + k_2 + k_3 + k_4) + k_1 l_{A1} + k_2 l_{B1} - k_3 l_{C1} - k_4 l_{D1}}{A(p)}, \quad (8)$$

где

$$A(p) = [Mp^2 + k_1 + k_2 + k_3 + k_4][Jp^2 + k_1 l_{A1}^2 + k_2 l_{B1}^2 + k_3 l_{C1}^2 + k_4 l_{D1}^2] -$$

$$-(k_1 l_{A1} + k_2 l_{B1} - k_3 l_{C1} - k_4 l_{D1})^2 - \quad (9) \quad \text{или:}$$

— является характеристическим частотным уравнением.

На основе уравнения Лагранжа 2-го рода уравнения движения примут вид:

$$y_0'' M + y_0(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) + \varphi(-k_1 l_{A1} - k_2 l_{B1} + k_3 l_{C1} + k_4 l_{D1}) = Q(t), \quad (3)$$

$$\varphi'' J + \varphi(k_1 l_{A1}^2 + k_2 l_{B1}^2 + k_3 l_{C1}^2 + k_4 l_{D1}^2) + y_0(-k_1 l_{A1} - k_2 l_{B1} + k_3 l_{C1} + k_4 l_{D1}) = Q l_E. \quad (4)$$

При помощи преобразований Лапласа при нулевых начальных условиях [19; 20] уравнения движения могут быть записаны в виде:

$$\bar{y}_0 [Mp^2 + k_1 + k_2 + k_3 + k_4] - \bar{\varphi}(k_1 l_{A1} + k_2 l_{B1} - k_3 l_{C1} - k_4 l_{D1}) = \bar{Q} l_E, \quad (5)$$

$$\bar{\varphi} [Jp^2 + k_1 l_{A1}^2 + k_2 l_{B1}^2 + k_3 l_{C1}^2 + k_4 l_{D1}^2] + \bar{y}_0 (k_1 l_{A1} + k_2 l_{B1} - k_3 l_{C1} - k_4 l_{D1}) = \bar{Q} l_E, \quad (6)$$

где  $p = j\omega$  — комплексная переменная ( $j = \sqrt{-1}$ ); значок  $\leftrightarrow$  над переменной означает ее изображение по Лапласу [19; 20].

На основе выражений (5), (6) может быть построена структурная математическая модель системы (рис. 2). В структурной схеме учтены все места крепления упругих элементов, что является важным обстоятельством для проведения дальнейших исследований, так как пространственная метрика дает более детализированное представление о динамических свойствах рассматриваемой системы.

При различных сочетаниях параметров в системе наблюдаются различные специфические режимы [3].

## II. Система координат $\bar{y}_1, \bar{y}_2$ .

Для получения математической модели в координатах  $\bar{y}_1$  и  $\bar{y}_2$  необходимо использовать ряд соотношений:

$$\begin{aligned} y_{B1} &= y_1(a + cl_{B1}) + y_2(b - l_{B1}c), a_1 = a + cl_{B1}, \\ b_1 &= b - l_{B1}c, y_{C1} = y_1(a - cl_{C1}) + y_2(b + l_{C1}c), \\ a_3 &= a - cl_{C1}, b_3 = b + l_{C1}c. \end{aligned} \quad (10)$$

Запишем для системы координат  $y_1$  и  $y_2$  выражения для кинетической и потенциальной энергии:

$$T = \frac{1}{2}M(\dot{y}_1 a + \dot{y}_2 b)^2 + \frac{1}{2}Jc^2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1)^2; \quad (11)$$

$$\Pi = \frac{1}{2}k_1 y_1^2 + \frac{1}{2}k_4 y_2^2 + \frac{1}{2}k_2 y_{B1}^2 + \frac{1}{2}k_3 y_{C1}^2$$

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2}k_1y_1^2 + \frac{1}{2}k_4y_2^2 + \frac{1}{2}k_2(y_1a_1 + y_2b_1)^2 + \\ & + \frac{1}{2}k_3(y_1a_2 + y_2b_2)^2, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $a_1 = a + cl_{B1}, b_1 = b - cl_{B1}, a_2 = a - cl_{C1}, b_2 = b + cl_{C1}$ .

После проведения промежуточных выкладок запишем уравнения движения системы по рис. 1 в координатах  $y_1$  и  $y_2$ :

$$y_1''(Ma^2 + Jc^2) + y_1(k_1 + k_2a_1^2 + k_3a_2^2) - y_2''(Jc^2 - Mab) - (k_2a_1b_1 + k_3a_2b_2)y_2 = Qa + Qa_3, \quad (13)$$

$$y_2''(Mb^2 + Jc^2) + y_2(k_4 + k_2b_1^2 + k_3b_2^2) - y_1''(Jc^2 - Mab) - (k_2a_1b_1 + k_3a_2b_2)y_1 = Qb + Qa_3. \quad (14)$$

Система уравнений (13), (14) — в операторной форме после преобразований Лапласа при нулевых начальных условиях принимает вид:

$$\begin{aligned} \bar{y}_1 \left[ (Ma^2 + Jc^2)p^2 + k_1 + k_2a_1^2 + k_3a_2^2 \right] - \\ - \bar{y}_2 \left[ (Jc^2 - Mab)p^2 + k_1 + k_2a_1b_1 + k_3a_2b_2 \right] = \\ = \bar{Q}a + \bar{Q}a_3, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \bar{y}_2 \left[ (Mb^2 + Jc^2)p^2 + k_4 + k_2b_1^2 + k_3b_2^2 \right] - \\ - \bar{y}_1 \left[ (Jc^2 - Mab)p^2 + k_2a_1b_1 + k_3a_2b_2 \right] = \bar{Q}b + \bar{Q}a_3, \end{aligned} \quad (16)$$

где  $a_3 = \frac{l_E}{l_1 + l_2}$ .

Структурная математическая модель исходной системы по рис. 1 в координатах  $\bar{y}_1$  и  $\bar{y}_2$  приведена на рис. 3.

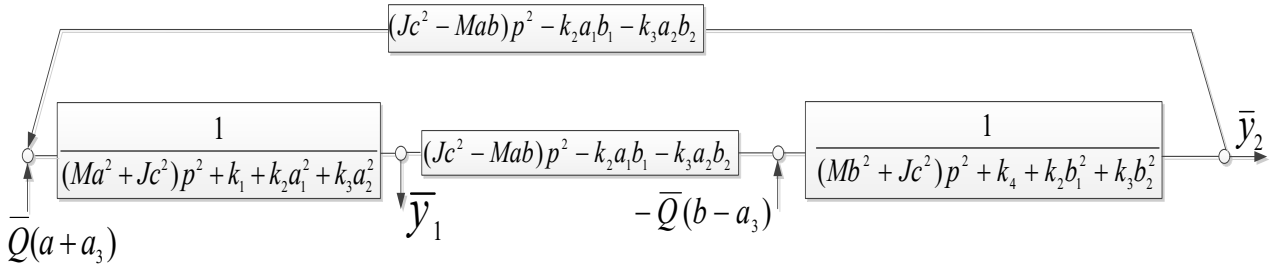


Рис. 3. Структурная математическая модель исходной системы в координатах  $\bar{y}_1, \bar{y}_2$

Смена системы координат обуславливает необходимость внимания к возможным изменениям обобщенных сил с выполнением условия их равенства на возможных перемещениях. В данном случае необходимо соблюдать равенство работы обобщенных сил на возможных перемещениях [5]. Используя структурную схему на рис. 3, запишем передаточную функцию системы по координате  $\bar{y}_1$ :

$$W_1'(p) = \frac{\bar{y}_1}{\bar{Q}} = \frac{(a + a_3) \left[ \frac{(Mb^2 + Jc^2)p^2 + k_4 + k_2b_1^2 + k_3b_2^2}{A'(p)} \right] + (b - a_3) \left[ \frac{(Jc^2 - Mab)p^2 - k_2a_1b_1 - k_3a_2b_2}{A'(p)} \right]}{A'(p)}, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \text{где } A'(p) = & \left[ (Ma^2 + Jc^2)p^2 + k_1 + k_2a_1^2 + k_3a_2^2 \right] \times \\ & \times \left[ (Mb^2 + Jc^2)p^2 + k_4 + k_2b_1^2 + k_3b_2^2 \right] - \\ & - \left[ (Jc^2 - Mab)p^2 - k_2a_1b_1 - k_3a_2b_2 \right]^2 \end{aligned} \quad (18)$$

— является частотным характеристическим уравнением системы со структурной схемой по рис. 3.

В свою очередь, по координате  $\bar{y}_2$  имеем:

$$W_2'(p) = \frac{\bar{y}_2}{\bar{Q}} = \frac{(a_3 - b) \left[ \frac{(Ma^2 + Jc^2)p^2 + k_1 + k_2a_1^2 + k_3a_2^2}{A'(p)} \right] + (a + a_3) \left[ \frac{(Jc^2 - Mab)p^2 - k_2a_1b_1 - k_3a_2b_2}{A'(p)} \right]}{A'(p)}. \quad (19)$$

При  $\bar{y}_1 = 0$  полагается, что т.  $A_1$  совпадает с узлом колебаний в системе; при  $\bar{y}_2 = 0$  — в т.  $D_1$  также будет находиться узел колебаний системы.

Полученные выражения для передаточных функций позволяют построить все необходимые математические модели в виде передаточных функций для определения дополнительных параметров динамического состояния. К ним можно отнести передаточную функцию межпарциальных связей и реакции связей в опорных элементах системы.

**III. Результаты исследований.** Система координат  $\bar{y}_1$  и  $\bar{y}_2$  интересна возможностями оценки динамических свойств межпарциальных связей, в частности, при введении понятия передаточной функции межпарциальной связи  $\bar{y}_2 / \bar{y}_1$ ; в этом случае для системы, представленной структурной схемой на рис. 3, получим:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{y}_2}{\bar{y}_1} = & \frac{(a_3 - b) \left[ \frac{(Ma^2 + Jc^2)p^2 + k_1 + k_2a_1^2 + k_3a_2^2}{(a + a_3) \left[ \frac{(Mb^2 + Jc^2)p^2 + k_4 + k_2b_1^2 + k_3b_2^2}{A'(p)} \right] + (b - a_3) \left[ \frac{(Jc^2 - Mab)p^2 - k_2a_1b_1 - k_3a_2b_2}{A'(p)} \right]} \right]}{A'(p)}. \end{aligned} \quad (20)$$

Второй дополнительный параметр представляет собой реакцию связи. Причем определение этого параметра связано с оценкой статической и динамической составляющей, которые в сумме дают полную реакцию.

Таким образом могут быть определены динамические реакции в характерных точках исходной системы (рис. 1, тт.  $A_1, B_1, C_1, D_1$ ). В данном случае жесткости упругих элементов  $k_1, k_2, k_3, k_4$  не зависят от частоты.

Динамические смещения в тт.  $A_1, B_1, C_1, D_1$  могут быть определены с использованием передаточных функций  $W_1(p), W_2(p)$  или  $W'_1(p), W'_2(p)$ , представленных соответственно выражениями (7), (8) или (17), (19). Для построения передаточных функций отношения динамических реакций к внешнему возмущению, характерных для рассматриваемой системы, необходимо наличие пространственной метрики с учетом расположения точек крепления упругих элементов.

В т.  $A_1$  динамическое смещение может быть определено выражением:

$$\bar{y}_1 = \bar{y}_{A1} = W'_1(p)\bar{Q} = \frac{(a+a_3) \left[ \begin{array}{l} (Mb^2 + Jc^2)p^2 + \\ + k_4 + k_2b_1^2 + k_3b_2 \end{array} \right] + (b-a_3) \left[ \begin{array}{l} (Jc^2 - Mab)p^2 - \\ - k_2a_1b_1 - k_3a_2b_2 \end{array} \right]}{A'_0(p)}. \quad (21)$$

Тогда динамическая реакция в т.  $A_1$  составит:

$$\bar{R}_{A1} = \bar{y}_{A1}k_1. \quad (22)$$

Поскольку  $k_1$  не зависит от частоты, выполняется условие:

$$|\bar{R}_{A1}| = |\bar{R}_A|. \quad (23)$$

Для т.  $B_1$  динамическое смещение определяется выражением:

$$\bar{y}_{B1} = \bar{y}_1a_1 + \bar{y}_2b_1. \quad (24)$$

Таким образом:

$$\bar{R}_{B1} = k_2\bar{y}_{B1} = k_2(a+cl_{B1})\bar{y}_1 + k_2(b-cl_{B1})\bar{y}_2. \quad (25)$$

Аналогично вышеприведенному имеем также, что:

$$|\bar{R}_{B1}| = |\bar{R}_B|. \quad (26)$$

Предлагаемый подход позволяет найти динамические реакции также в тт.  $C_1, D_1$ .

Выражение для смещения в точке  $C_1$  примет вид:

$$\bar{y}_{C1} = \bar{y}_1a_2 + \bar{y}_2b_2. \quad (27)$$

В связи с этим динамическая реакция в этой точке может быть найдена следующим образом:

$$\bar{R}_{C1} = \bar{y}_{C1}k_3. \quad (29)$$

Таким образом:

$$\bar{R}_{C1} = k_3\bar{y}_{C1} = k_3(a-cl_{C1})\bar{y}_1 + k_3(b+cl_{C1})\bar{y}_2. \quad (28)$$

Динамическая реакция в противоположной точке крепления определится  $|\bar{R}_{C1}| = |\bar{R}_C|$ .

Для определения динамических взаимодействий в тт.  $D$  и  $D_1$  используем такой же подход:

$$\bar{y}_2 = \bar{y}_{D1} = W'_2(p)\bar{Q} = \frac{(a_3-b) \left[ \begin{array}{l} (Ma^2 + Jc^2)p^2 + \\ + k_1 + k_2a_1^2 + k_3a_2^2 \end{array} \right] + (a+a_3) \left[ \begin{array}{l} (Jc^2 - Mab)p^2 - \\ - k_2a_1b_1 - k_3a_2b_2 \end{array} \right]}{A'_0(p)}, \quad (29)$$

$$\bar{R}_{D1} = \bar{y}_{D1}k_4, \quad |\bar{R}_{D1}| = |\bar{R}_D|. \quad (30)$$

Отметим, что полное выражение для определения динамических реакций в промежуточных точках будет иметь следующий вид:

$$\bar{R}_{B1} = k_2(a+cl_{B1}) \frac{(a+a_3) \left[ \begin{array}{l} (Mb^2 + Jc^2)p^2 + \\ + k_4 + k_2b_1^2 + k_3b_2 \end{array} \right] + (b-a_3) \left[ \begin{array}{l} (Jc^2 - Mab)p^2 - \\ - k_2a_1b_1 - k_3a_2b_2 \end{array} \right]}{A'_0(p)} + (a_3-b) \left[ \begin{array}{l} (Ma^2 + Jc^2)p^2 + \\ + k_1 + k_2a_1^2 + k_3a_2^2 \end{array} \right] + (a+a_3) \left[ \begin{array}{l} (Jc^2 - Mab)p^2 - \\ - k_2a_1b_1 - k_3a_2b_2 \end{array} \right]}{A'_0(p)}. \quad (31)$$

Аналогичным образом определим реакцию в т.  $C_1$ :

$$\bar{R}_{C1} = k_3(a-cl_{C1}) \frac{(a+a_3) \left[ \begin{array}{l} (Mb^2 + Jc^2)p^2 + \\ + k_4 + k_2b_1^2 + k_3b_2 \end{array} \right] + (b-a_3) \left[ \begin{array}{l} (Jc^2 - Mab)p^2 - \\ - k_2a_1b_1 - k_3a_2b_2 \end{array} \right]}{A'_0(p)} + (a_3-b) \left[ \begin{array}{l} (Ma^2 + Jc^2)p^2 + \\ + k_1 + k_2a_1^2 + k_3a_2^2 \end{array} \right] + (a+a_3) \left[ \begin{array}{l} (Jc^2 - Mab)p^2 - \\ - k_2a_1b_1 - k_3a_2b_2 \end{array} \right]}{A'_0(p)}. \quad (32)$$

В данном случае целесообразно упростить полученные выражения за счет приравнивания числителей к выбранным буквенным значениям:

$$A_1 = (a+a_3) \left[ \begin{array}{l} (Mb^2 + Jc^2)p^2 + k_4 + k_2b_1^2 + k_3b_2 \end{array} \right] + (b-a_3) \left[ \begin{array}{l} (Jc^2 - Mab)p^2 - k_2a_1b_1 - k_3a_2b_2 \end{array} \right] \quad (33)$$

$$B_1 = (a_3-b) \left[ \begin{array}{l} (Ma^2 + Jc^2)p^2 + k_1 + k_2a_1^2 + k_3a_2^2 \end{array} \right] + (a+a_3) \left[ \begin{array}{l} (Jc^2 - Mab)p^2 - k_2a_1b_1 - k_3a_2b_2 \end{array} \right] \quad (34)$$

После преобразований выражения (31), (32) примут вид:

$$\bar{R}_{B1} = k_2 \frac{A_1(a+cl_{B1}) + B_1(b-cl_{B1})}{A'_0(p)}, \quad (35)$$

$$\bar{R}_{C1} = k_3 \frac{A_1(a-cl_{C1}) + B_1(b+cl_{C1})}{A'_0(p)}. \quad (36)$$

Определение статической составляющей реакций связано с обнулением внешнего возмущения, действующего на систему. Тогда полученное выражение будет отображать статические свойства блока упругих элементов, на которые опирается рабочий орган вибрационной технологической машины. Тогда динамические реакции в тт.  $A_1$  и  $D_1$  при  $p = 0$  можно найти с использованием следующих выражений:

$$\bar{R}_{A1}^{cm} = \frac{(a+a_3)[k_4+k_2b_1^2+k_3b_2]+(a_3-b)[k_2a_1b_1+k_3a_2b_2]}{[k_1+k_2a_1^2+k_3a_2^2] \times [k_4+k_3b_2^2+k_2b_1^2]-[-k_2a_1b_1-k_3a_2b_2]^2} k_1, \quad (37)$$

$$\bar{R}_{D1}^{cm} = \frac{(a_3-b)[k_1+k_2a_1^2+k_3a_2^2]-(a+a_3)[k_2a_1b_1+k_3a_2b_2]}{[k_1+k_2a_1^2+k_3a_2^2] \times [k_4+k_3b_2^2+k_2b_1^2]-[-k_2a_1b_1-k_3a_2b_2]^2} k_4. \quad (38)$$

Статические реакции в точках крепления промежуточных элементов могут быть найдены при использовании более сложных выражений (32), (33); они примут вид:

$$\begin{aligned} \bar{R}_{B1}^{cm} = & k_2(a+cl_{B1}) \frac{(a+a_3)[k_4+k_2b_1^2+k_3b_2]+(a_3-b)[k_2a_1b_1+k_3a_2b_2]}{[k_1+k_2a_1^2+k_3a_2^2] \times [k_4+k_3b_2^2+k_2b_1^2]-[-k_2a_1b_1-k_3a_2b_2]^2} + \dots \\ & \dots \frac{(a_3-b)[k_1+k_2a_1^2+k_3a_2^2]-(-k_2a_1b_1-k_3a_2b_2)^2}{[k_1+k_2a_1^2+k_3a_2^2] \times [k_4+k_3b_2^2+k_2b_1^2]-[-k_2a_1b_1-k_3a_2b_2]^2} + \\ & + k_2(b-cl_{B1}) \frac{(a_3-b)[k_1+k_2a_1^2+k_3a_2^2]-(-k_2a_1b_1-k_3a_2b_2)^2}{[k_1+k_2a_1^2+k_3a_2^2] \times [k_4+k_3b_2^2+k_2b_1^2]-[-k_2a_1b_1-k_3a_2b_2]^2} \dots \\ & \dots \frac{-(a+a_3)[k_2a_1b_1+k_3a_2b_2]}{[k_1+k_2a_1^2+k_3a_2^2] \times [k_4+k_3b_2^2+k_2b_1^2]-[-k_2a_1b_1-k_3a_2b_2]^2}, \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \bar{R}_{C1}^{cm} = & k_3(a-cl_{C1}) \frac{(a+a_3)[k_4+k_2b_1^2+k_3b_2]+(a_3-b)[k_2a_1b_1+k_3a_2b_2]}{[k_1+k_2a_1^2+k_3a_2^2] \times [k_4+k_3b_2^2+k_2b_1^2]-[-k_2a_1b_1-k_3a_2b_2]^2} + \\ & \dots \frac{(a_3-b)[k_1+k_2a_1^2+k_3a_2^2]-(-k_2a_1b_1-k_3a_2b_2)^2}{[k_1+k_2a_1^2+k_3a_2^2] \times [k_4+k_3b_2^2+k_2b_1^2]-[-k_2a_1b_1-k_3a_2b_2]^2} - \\ & - (a+a_3)[k_2a_1b_1+k_3a_2b_2] \\ & + k_3(b+cl_{C1}) \frac{-(a+a_3)[k_2a_1b_1+k_3a_2b_2]}{[k_1+k_2a_1^2+k_3a_2^2] \times [k_4+k_3b_2^2+k_2b_1^2]-[-k_2a_1b_1-k_3a_2b_2]^2}. \end{aligned} \quad (40)$$

Полные реакции в рассматриваемых точках примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \bar{R}_{A1}^{ном.} = & \bar{y}_{A1}k_1 + \\ & \frac{(a+a_3)[k_4+k_2b_1^2+k_3b_2]+(a_3-b)[k_2a_1b_1+k_3a_2b_2]}{[k_1+k_2a_1^2+k_3a_2^2] \times [k_4+k_3b_2^2+k_2b_1^2]-[-k_2a_1b_1-k_3a_2b_2]^2} k_1, \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \bar{R}_{B1}^{ном.} = & k_2(a+cl_{B1})\bar{y}_1 + k_2(b-cl_{B1})\bar{y}_2 + \\ & + k_2(a+cl_{B1}) \frac{(a+a_3)[k_4+k_2b_1^2+k_3b_2]+(a_3-b)[k_2a_1b_1+k_3a_2b_2]}{[k_1+k_2a_1^2+k_3a_2^2] \times [k_4+k_3b_2^2+k_2b_1^2]-[-k_2a_1b_1-k_3a_2b_2]^2} + \dots \\ & \dots \frac{(a_3-b)[k_1+k_2a_1^2+k_3a_2^2]-(-k_2a_1b_1-k_3a_2b_2)^2}{[k_1+k_2a_1^2+k_3a_2^2] \times [k_4+k_3b_2^2+k_2b_1^2]-[-k_2a_1b_1-k_3a_2b_2]^2} + \\ & + k_2(b-cl_{B1}) \frac{(a_3-b)[k_1+k_2a_1^2+k_3a_2^2]-(-k_2a_1b_1-k_3a_2b_2)^2}{[k_1+k_2a_1^2+k_3a_2^2] \times [k_4+k_3b_2^2+k_2b_1^2]-[-k_2a_1b_1-k_3a_2b_2]^2} \dots \\ & \dots \frac{-(a+a_3)[k_2a_1b_1+k_3a_2b_2]}{[k_1+k_2a_1^2+k_3a_2^2] \times [k_4+k_3b_2^2+k_2b_1^2]-[-k_2a_1b_1-k_3a_2b_2]^2}, \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \bar{R}_{C1}^{ном.} = & k_3(a-cl_{C1})\bar{y}_1 + k_3(b+cl_{C1})\bar{y}_2 + \\ & + k_3(a-cl_{C1}) \frac{(a+a_3)[k_4+k_2b_1^2+k_3b_2]+(a_3-b)[k_2a_1b_1+k_3a_2b_2]}{[k_1+k_2a_1^2+k_3a_2^2] \times [k_4+k_3b_2^2+k_2b_1^2]-[-k_2a_1b_1-k_3a_2b_2]^2} + \\ & \dots \frac{(a_3-b)[k_1+k_2a_1^2+k_3a_2^2]-(-k_2a_1b_1-k_3a_2b_2)^2}{[k_1+k_2a_1^2+k_3a_2^2] \times [k_4+k_3b_2^2+k_2b_1^2]-[-k_2a_1b_1-k_3a_2b_2]^2} - \\ & - (a+a_3)[k_2a_1b_1+k_3a_2b_2] \\ & + k_3(b+cl_{C1}) \frac{-(a+a_3)[k_2a_1b_1+k_3a_2b_2]}{[k_1+k_2a_1^2+k_3a_2^2] \times [k_4+k_3b_2^2+k_2b_1^2]-[-k_2a_1b_1-k_3a_2b_2]^2} \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \bar{R}_{D1}^{ном.} = & \bar{y}_{D1}k_4 + \\ & \frac{(a_3-b)[k_1+k_2a_1^2+k_3a_2^2]-(-k_2a_1b_1-k_3a_2b_2)^2}{[k_1+k_2a_1^2+k_3a_2^2] \times [k_4+k_3b_2^2+k_2b_1^2]-[-k_2a_1b_1-k_3a_2b_2]^2} + \\ & + \frac{(a+a_3)[k_2a_1b_1+k_3a_2b_2]}{[k_1+k_2a_1^2+k_3a_2^2] \times [k_4+k_3b_2^2+k_2b_1^2]-[-k_2a_1b_1-k_3a_2b_2]^2} k_4. \end{aligned} \quad (44)$$

Таким образом, анализ особенностей реакций связей показывает, что весь их спектр представляет собой достаточно сложные выражения, содержащие информацию обо всех элементах системы и силовых воздействиях, влияющих на ее динамическое состояние. Проведение дальнейших исследований будет направлено на оценку изменения реакций связей в зависимости от выбранных настроечных параметров.

При равенстве выражения для передаточной функции межпарциальных связей  $l$  рабочий орган в виде твердого тела не совершает вибрационных движений по вращательной степени свободы движения, что может быть тождественно приложению внешнего возмущения в центре тяжести исследуемого технического объекта. При равенстве данной передаточной функции —  $l$  рабочий орган может совершать симметричные вибрационные движения. В данном случае имеет место наличие узлов колебаний, место расположения которых, в зависимости от текущей задачи, может изменяться.

Анализ полученного блока выражений для определения реакций связей показывает, что структура как динамических реакций, так статических компонент, достаточно сложна и отличается наличием большого количества взаимосвязей при наличии ограниченного количества линейных упругих элементов. Наличие частот собственных колебаний в системе позволяет сделать вывод о том, что на этих частотах динамические реакции будут увеличиваться.

Выражения для определения полных реакций представлены в упрощенном виде, так как представляют собой достаточно объемные дробно-рациональные формулы. При рассмотрении их структуры можно заключить, что их величина зависит и от частоты колебаний, и от сил тяжести составляющих элементов. В частности, видно, что полная реакция может быть как положительной, так и отрицательной, что делает внимание к изменению такого внутреннего силового фак-

тора достаточно важным при оценке его влияния на узлы и опоры вибрационных машин, в которых могут присутствовать неуровновешенности и зазоры.

**Заключение.** Рассмотренный вариант технического объекта в виде механической колебательной системы содержит большое количество дополнительных связей, изменение настроечных параметров которых создает возможности получения устойчивых динамических режимов работы вибрационной технологической машины.

Проведенные исследования показали, что предложенный подход к построению математической модели, учитывающей связность координат движения механической колебательной системы как расчетной схемы вибрационной технологической машины с рабочим органом в виде твердого тела на упругих опорах, позволяет производить детализированную оценку динамических взаимодействий между элементами рассматриваемого тех-

нического объекта для получения такого режима динамического состояния исследуемой механической колебательной системы, при котором по длине рабочего органа происходит распределение амплитуд колебаний. Предлагаемый метод основан на применении передаточной функции межпарциальных связей.

Интерес также представляет оценка динамических взаимодействий в виде реакций связей. Получены аналитические соотношения для определения всех составляющих реакций — статической, динамической и полной. Выражения для определения реакций в точках крепления избыточных промежуточных элементов представляют собой сложные дробно-рациональные выражения, показывающие связность координат движения рабочего органа через реакции связей.

#### Литература

1. Бабичев А.П. Вибрационная обработка деталей в абразивной среде. М.: Машиностроение, 1968. 92 с.
2. Пановко Г.Я. Лекции по основам теории вибрационных машин и технологий. М.: МГТУ им. Э. Баумана, 2008. 192 с.
3. Копылов Ю.Р. Динамика процессов виброударного упрочнения: моногр. Воронеж: ИПЦ «Науч. книга», 2011. 569 с.
4. Ганиев Р.Ф., Кононенко В.О. Колебания твердых тел. М.: Наука, 1976. 432 с.
5. Елисеев С.В. Прикладной системный анализ и структурное математическое моделирование (динамика транспортных технологических машин: связность движений, вибрационные взаимодействия, рычажные связи). Иркутск: Иркутский гос. ун-т путей сообщения, 2018. 692 с.
6. Azarov A.A., Gouskov A.M., Panovko G.Ya. Dynamics of a Flexible Disk Rotor under a Point Contact with Discrete Viscoelastic Oscillation Limiters // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2023. Vol. 52, № 1. P. 20-30.
7. Panovko G.Ya., Shokhin A.E. Experimental Analysis of Dynamics of a Nonlinear Oscillatory System with Self-Synchronizing Vibration Exciters when Interacting with Bulk Material // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2024. Vol. 53, № 5. P. 479-488.
8. Eliseev S.V., Eliseev A.V. Theory of oscillations. Structural mathematical modeling in problems of dynamics of technical objects. Cham: Springer Nature Switzerland AG, 2019. 521 p.
9. Пановко Г.Я., Шохин А.Е. Экспериментальный анализ динамики виброплатформы при контакте с упругим ограничителем колебаний // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2023. № 3. С. 91-96.
10. Panovko G.Ya., Shokhin A.E. Self-Synchronization of an Inertial Vibro-Exciter in Two-Mass Vibromachines with an Additional Elastic Element Installed with a Gap // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2023. Vol. 52, № 7. P. 652-657.
11. Panovko G.Ya., Shokhin A.E. Self-synchronization of inertial vibration exciters in a system with an elastic limiter // Advanced Problem in Mechanics III: Proceedings of the XLIX International Summer School-Conference «Advanced Problems in Mechanics», 2021, St. Petersburg, Russia, St. Petersburg, June 21-25, 2021 year. Cham: Springer, 2023. P. 291-297.
12. Panovko G.Ya., Shokhin A.E. Experimental Analysis of the Dynamics of a Vibration Platform upon Contact with an Elastic Limiter of Oscillations // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2023. Vol. 52, № S2. P. S213-S218.
13. Елисеев С.В., Большаков Р.С., Ситов И.С. О влиянии избыточных связей между элементами на динамические свойства технических объектов // Системы. Методы. Технологии. 2020. № 2 (46). С. 7-11.
14. Eliseev A.V., Kuznetsov N.K., Mironov A.S. System Views on the Features of the Dynamics of Elements of Oscillatory Structures // Lecture Notes in Mechanical Engineering, 2022. P. 567-574.
15. Korneev S.V., Bolshakov R.S. Applications of Control Theory Approaches to Assessing the Dynamical Interactions of Elements of Technical Objects // 2023 Dynamics of Systems, Mechanisms and Machines (Dynamics), Omsk, November 14-15, 2023 year. Omsk: IEEE, 2023.
16. Елисеев С.В., Большаков Р.С., Елисеев А.В. Устройство управления вибрационным полем технологической машины: пат. № 2689901 С2 РФ, МПК F16F 15/02, F16F 7/10; № 2017140746; заявл. 22.11.2017; опубл. 29.05.2019.
17. Кашуба В.Б., Большаков Р.С., Мозалевская А.К., Нгуен Д.Х. Определение реакций связей между элементами виброзащитных систем на основе метода структурных преобразований // Механика XXI века. 2016. № 15. С. 295-300.
18. Мозалевская А.К. К вопросу о применении обобщенного метода определения реакций связей в соединениях элементов механических колебательных систем // Проблемы механики современных машин: материалы VII Междунар. науч. конф. (25-30 июня 2018 г.). Улан-Удэ: ВСГУТУ, 2018. С. 51-55.
19. Елисеев А.В., Кузнецов Н.К., Миронов А.С. Энергетические характеристики в оценке упругих и рычажных связей в диаде механической колебательной системы // Труды МАИ. 2024. № 135. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=179676&ysclid=m3wsg7xxm3404854745> (дата обращения: 25.10.2024).
20. Елисеев А.В., Ситов И.С., Кузнецов Н.К. Формирование динамических эффектов в механических колебательных системах в рамках концепции обобщенного рычага с учетом дополнительных кинематических связей // Системы. Методы. Технологии. 2024. № 1 (61). С. 10-20.

#### References

1. Babichev A.P. Vibration treatment of parts in an abrasive environment. M.: Mashinostroenie, 1968. 92 p.
2. Panovko G.Ya. Lectures on the basics of the theory of vibration machines and technologies. M.: MG TU im. E. Bauman, 2008. 192 p.
3. Kopylov Yu.R. Dynamics of vibration-impact hardening processes: monogr. Voronezh: IPC «Nauch. kniga», 2011. 569 p.
4. Ganiev R.F., Kononenko V.O. Vibrations of Solids. M.: Nauka, 1976. 432 p.

5. Eliseev S.V. Applied systems analysis and structural mathematical modeling (Dynamics of transport technological machines: motion connectivity, vibration interactions, lever connections). Irkutsk: Irkutskij gos. un-t putej soobshcheniya, 2018. 692 p.
6. Azarov A.A., Gouskov A.M., Panovko G.Ya. Dynamics of a flexible disk rotor under a point contact with discrete viscoelastic oscillation limiters // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2023. Vol. 52, № 1. P. 20-30.
7. Panovko G.Ya., Shokhin A.E. Experimental analysis of dynamics of a nonlinear oscillatory system with self-synchronizing vibration exciters when interacting with bulk material // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2024. Vol. 53, № 5. P. 479-488.
8. Eliseev S.V., Eliseev A.V. Theory of oscillations. Structural mathematical modeling in problems of dynamics of technical objects. Cham: Springer Nature Switzerland AG, 2019. 521 p.
9. Panovko G.Ya., Shohin A.E. Experimental analysis of the dynamics of a vibration platform in contact with an elastic oscillation limiter // *Engineering and Automation Problems*. 2023. № 3. P. 91-96.
10. Panovko G.Ya., Shokhin A.E. Self-Synchronization of an Inertial Vibro-Exciter in Two-Mass Vibromachines with an Additional Elastic Element Installed with a Gap // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2023. Vol. 52, № 7. P. 652-657.
11. Panovko G.Ya., Shokhin A.E. Self-synchronization of inertial vibration exciters in a system with an elastic limiter // *Advanced Problem in Mechanics III: Proceedings of the XLIX International Summer School-Conference «Advanced Problems in Mechanics»*, 2021, St. Petersburg, Russia, St. Petersburg, June 21-25, 2021 year. Cham: Springer, 2023. P. 291-297.
12. Panovko G.Ya., Shokhin A.E. Experimental Analysis of the Dynamics of a Vibration Platform upon Contact with an Elastic Limiter of Oscillations // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2023. Vol. 52, № S2. P. S213-S218.
13. Eliseev S.V., Bol'shakov R.S., Sitov I.S. On the influence of redundant links between elements on the dynamic properties of technical objects // *Systems. Methods. Technologies*. 2020. № 2 (46). P. 7-11.
14. Eliseev A.V., Kuznetsov N.K., Mironov A.S. System Views on the Features of the Dynamics of Elements of Oscillatory Structures // *Lecture Notes in Mechanical Engineering*, 2022. P. 567-574.
15. Korneev S.V., Bolshakov R.S. Applications of Control Theory Approaches to Assessing the Dynamical Interactions of Elements of Technical Objects // *2023 Dynamics of Systems, Mechanisms and Machines (Dynamics)*, Omsk, November 14-15, 2023 year. Omsk: IEEE, 2023.
16. Eliseev S.V., Bol'shakov R.S., Eliseev A.V. Device for controlling the vibration field of a technological machine: pat. № 2689901 C2 RF, MPK F16F 15/02, F16F 7/10; № 2017140746; zayavl. 22.11.2017; opubl. 29.05.2019.
17. Kashuba V.B., Bol'shakov R.S., Mozalevskaya A.K., Nguen D.H. Determination of reactions of connections between elements of vibration protection systems based on the method of structural transformations // *Mechanics to the XXI century*. 2016. № 15. P. 295-300.
18. Mozalevskaya A.K. On the issue of application of the generalized method for determining the reactions of connections in the joints of elements of mechanical oscillatory systems // *Problemy mekhaniki sovremennyh mashin: materialy VII Mezhdunar. nauch. konf. (25-30 iyunya 2018 g.)*. Ulan-Ude: VSGUTU, 2018. P. 51-55.
19. Eliseev A.V., Kuznecov N.K., Mironov A.S. Energy characteristics in assessing elastic and lever connections in a dyad of a mechanical oscillatory system // *Trudy MAI*. 2024. № 135. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=179676&ysclid=m3wsg7xxm3404854745> (data obrashcheniya: 25.10.2024).
20. Eliseev A.V., Sitov I.S., Kuznecov N.K. Formation of dynamic effects in mechanical oscillatory systems within the framework of the generalized lever concept taking into account additional kinematic connections // *Systems. Methods. Technologies*. 2024. № 1 (61). P. 10-20.