

Моделирование работы тормозной колодки с учетом удара трением, исключая парадоксы Пенлеве

В.А. Коронатов

Братский государственный университет, ул. Макаренко, 40, Братск, Россия

kortavik@mail.ru

<https://orcid.org/0000-0002-1331-213X>

Статья поступила 28.10.2024, принята 14.11.2024

В момент прижатия колодки к вращающемуся диску всегда возникает удар от силы противодействия трения скольжения или покоя. Такой удар принято называть ударом трения, он подтверждается скачкообразным уменьшением угловой скорости и возможными отскоками колодки от диска. Удар трением может коренным образом влиять на работу тормозного устройства, изменять начальные условия. Отсутствие нужной теории не позволяет учитывать это, что может приводить к неверным результатам и выводам. Считается, например, что могут возникать парадоксы Пенлеве, ставящие под сомнение существующий закон о трении и использование модели абсолютно твердого тела в механике. Такие сомнения отрицаются с помощью вновь созданной теории удара трением. Она позволяет учесть действие удара на вращение диска не только качественно, но и количественно. Построение теории приводится на основе обычной формулировки закона Амонтона – Кулона. Влияние ударов трением определяется по аналогии с ранее созданной теорией проникания твердого тела в грунт при однократном ударе. Только теперь считается, что удар влияет не на потерю прочности, а на уменьшение прижимной силы и, тем самым, на величину силы трения. Влияние возникающих ударов на вращение диска определяется через их сравнение с эталонным ударом, который разделяет удары, приводящие к полной остановке диска или замедлению вращения в заданном направлении. Наиболее сильные удары могут приводить к изменению направления вращения на противоположное с последующим заклиниванием движения диска. Различие таких ударов определяется по их начальным скоростям. Ранее обнаруженные парадоксы Пенлеве не будут соответствовать действительности из-за неполноты применяемой расчетной схемы, не учитывающей возможность сильных ударов трением.

Ключевые слова: сухое трение; закон Амонтона – Кулона; тормозная колодка; парадоксы Пенлеве; удары трением.

Modeling the operation of a brake pad taking into account frictional impact, eliminating the paradoxes of Painlevé

V.A. Koronotov

Bratsk State University; 40, Makarenko St., Bratsk, Russia

kortavik@mail.ru

<https://orcid.org/0000-0002-1331-213X>

Received 28.10.2024, accepted 14.11.2024

At the moment of pressing the pad against the rotating disc, there is always a shock from the force of counteraction to sliding friction or rest. Such a blow is commonly called a friction blow, it is confirmed by an abrupt decrease in angular velocity and possible rebounds of the pad from the disc. A friction shock can radically affect the operation of the braking device and change the initial conditions. The lack of the necessary theory does not allow one to take this into account, which can lead to incorrect results and conclusions. It is believed, for example, that the Painlevé paradoxes may arise, calling into question the existing law of friction and the use of an absolutely rigid body model in mechanics. Such doubts are denied by the newly created theory of friction impact. It makes possible to take into account the impact of the impact on the rotation of the disk not only qualitatively, but also quantitatively. The construction of the theory is based on the usual formulation of the Amonton-Coulomb law. The effect of friction shocks is determined by analogy with the previously created theory of penetration of a solid body into the ground with a single impact. But, in this case it is believed that the impact does not affect the loss of strength, but a decrease in downforce and, thereby, the amount of friction force. The impact of the resulting impacts on the rotation of the disk is determined by comparing them with a reference impact, which separates the impacts that lead to a complete stop of the disk or to a slowdown in rotation in a given direction. The strongest impacts can lead to a change in the direction of rotation to the opposite, followed by jamming of the disk movement. The difference between such impacts is determined by their initial velocities. The previously discovered the Painlevé paradoxes do not correspond to reality due to the incompleteness of the applied calculation scheme, which does not take into account the possibility of strong friction shocks.

Keywords: dry friction; Amonton – Coulomb law; brake pad; Painlevé paradoxes; friction shocks.

Введение. Процесс торможения вращающегося диска наиболее наглядно описывается на примере взаимодействия с тормозной колодкой посредством сил сухого трения. Для этих целей часто выбирается про-

стейшая модель [1–4], ставшая уже классической, показанная на рисунке. Здесь d, h — соответствующие геометрические размеры колодки; r, ω — радиус и угловая скорость диска; M — момент, вызывающий вращение диска в указанном направлении; P, N, F — соответственно прижимная сила, реакция и сила трения, действующие на колодку.

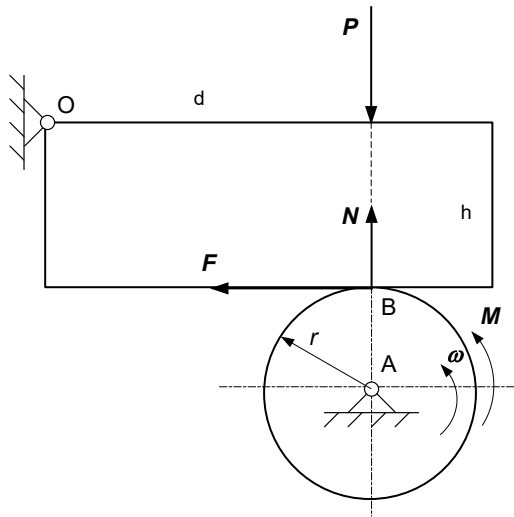


Рис. Классическая модель тормозной колодки ($\omega, M > 0$)

При описании таких моделей момент прижатия колодки к диску не принимается во внимание, и тем самым возникающий удар от силы трения не учитывается никак. Обычно предполагается, что колодка изначально находится в безотрывном равновесном положении, плотно прижатая к диску. И на колодку со стороны диска действует сила трения, определяемая по закону Амонтона – Кулона:

$$F = fN, \text{ где } f = \begin{cases} f_0 \text{sign}(\dot{\omega}), \text{ при } \dot{\omega} \neq 0; \\ [-f_1; f_1], \text{ при } \dot{\omega} \equiv 0. \end{cases}$$

Тогда из условия равновесия колодки следует такое выражение для нахождения реакции:

$$\begin{cases} \omega > 0, M > 0: \\ (N - P) - \lambda fN = 0. \end{cases} \Rightarrow N = \frac{P}{1 - f\lambda}. \quad (1)$$

где $\lambda = h/d$ — безразмерный геометрический параметр, характеризующий размеры прямоугольной колодки. Полученная формула (1) дает результат, не вызывающий сомнений при $1 - f\lambda > 0: N > 0$. Но при $1 - f\lambda < 0$ реакция N становится отрицательной, что не может соответствовать действительности, а при $1 - f\lambda = 0$ возникает неопределенность в определении N . Такие случаи, когда получаемые результаты нереальны или не определены, принято называть парадоксами Пенлеве. Из-за возникающей необходимости объяснить возникшие парадоксы данная тормозная система привлекает повышенный интерес уже шестьдесят лет [3].

Данная работа посвящена уточнению моделированию работы тормозного устройства с учетом возникающего удара в момент прижатия. Удар трением подтвер-

ждается заметным уменьшением угловой скорости вращения — мгновенным скачком, который может достигать большой величины. В зависимости от величины силы такого удара, в сравнении с силой сопротивления трением, вращение диска может либо просто уменьшиться, либо вообще остановиться, либо даже изменить свое направление на противоположное. Колодка в таких случаях либо сразу прижимается к диску, занимая равновесное положение, либо — может произойти ее кратковременный отрыв от диска. Автором предлагается новая теория описания удара трением, позволяющая определять такие начальные состояния диска, что необходимо для более точного моделирования процесса торможения. Такая теория позволит ответить и на вопрос о возможности парадоксов Пенлеве.

О попытках решения парадокса Пенлеве. Существующие работы говорят о том, что из-за простоты и очевидности этой и других аналогичных систем, где наблюдаются парадоксы Пенлеве, выбор модели и используемые уравнения сомнений не вызывают [5]. Сомнениям подвергались лишь получаемые результаты, поскольку они входят в противоречие с действительностью. И в качестве таких причин ищут, как правило, неточности в формулировке закона о трении [5] или в модели абсолютно твердого тела [1–5], принятой в теоретической механике. Для поиска возможностей избегания парадокса Пенлеве или его объяснений использовались разные методы и подходы. Применялись лагранжевый формализм [6], метод кинематических зон [7; 8], делалась экспериментальная проверка [9]. Предпринимались попытки найти объяснения и с помощью удара трением. Одним из первых, кто пытался это сделать, был русский ученый Е.А. Болотов [10]. А применительно к тормозной колодке идея удара трением на качественном уровне использовалась в работах [1, 2, 11]. В последнее время популярным стали объяснения, предложенные В.Ф. Журавлевым — через возникающий клиновой стопор и использование понятия некорректности по Адамару [12–16]. Математики для нахождения решений сингулярных уравнений, к которым приходят в таких случаях, применяют специальные методы [17, 18].

По мнению автора, нет необходимости в пересмотре модели твердого тела или закона о трении. Причину следует искать в определенной специфике сил сухого трения, которую еще не до конца научились учитывать. Речь идет об ударах трением, которые могут приобретать значительную силу, а, значит, и влиять на поведение системы с сухим трением. Это очень хорошо видно на примере работы тормозной колодки, которая ввиду своей простоты и наглядности была выделена из подобных механических систем. Возможность учитывать такие удары была затруднена из-за отсутствия нужной теории.

Следует заметить, что существующая модель тормозной колодки была несовершенна. Об этом говорят, кроме вышеперечисленных причин, и такие (с комментариями, которые выделены курсивом):

– Страдала постановка задачи. *После прижатия колодки начальное кинематическое состояние диска было недоопределено, включая величину его угловой скорости.*

– Дифференциальное уравнение вращательного движения диска конкретного использования не пред-

полагало, а если и использовалось, то чисто формально. *Невозможно находить решения дифференциально-уравнения без начальных условий.*

– Вращение диска всегда задавалось в сторону задаваемого вращения. *Тем самым отвергались вполне реальные варианты, когда диск может остановиться или сменить направление своего вращения [9] при сильном ударе и большом трении.*

– Расчетная схема для определения силы реакции N предлагалась в единственном варианте. *Из-за пренебрежения удара трением, терялся вариант расчетной схемы — когда диск меняет направление своего вращения, а сила трения — свое направление, что могло происходить при сильных ударах и большом трении [11].*

– Вариант отсутствия возможности равновесия колодки, а, значит, и уравнения статики в момент прижатия вообще не предусматривался. *Из-за этого в случае, когда $1 - f\lambda \leq 0$, применялась формула (1) — когда равновесное состояние колодки не достигалось, а уравнения статики нельзя было использовать. Что может происходить при большом трении или когда $\lambda \gg 1$ — в момент очень сильного удара [11].*

Теория удара трением. Необходимость построения теории удара трением, по-видимому, уже давно назрела, но это не делалось, скорее всего, из-за невозможности определения силы и времени удара — что в стереомеханической теории удара Ньютона [19; 20] не предусматривается.

При создании новой теории удара трением автором использовались аналогии, применяемые в прежней его теории погружения твердого тела в грунтовую среду при однократном ударе [21; 22]. Учитывалось, что вместо грунтовой среды рассматриваются абсолютно твердые тела, вместо погружения — скольжение одного тела относительно другого, а вместо уменьшения прочности — уменьшение силы трения. Вместо силы лобового сопротивления при проникании тела в грунтовую среду, определяется боковое сопротивление от трения скольжения на граничной поверхности соприкосновения твердых тел. Что можно было бы назвать граничным прониканием.

Основные моменты теории заключаются в следующем:

– Вместо обычного удара, возникающего при соударении двух тел, принимается удар от противодействия скольжению одного тела относительно другого.

– Удар трением имеет две составляющие: тангенциальную — направленную, как и сила трения по касательной поверхности соприкасающихся тел — и нормальную, направленную перпендикулярно к поверхности соприкосновения и способствующую отрыву тел друг от друга, т. е. уменьшению силы давления, а, значит, и силы трения.

– Составляющие удара считаются неупругими ударами, и возникают они только в начальный момент контакта тел. Действие удара проявляется только в момент соприкосновения тел и исчезает сразу, без затухания.

– Сила удара считается прямо пропорциональной начальной скорости удара.

– Различаются удары трением: *скольжения* — когда скольжение тел сохраняется с замедлением; *прилипа-*

ния — когда тела (например, колодка и диск) останавливаются в скольжении друг относительно друга; *антискольжения* — когда направление скольжения тел меняется на противоположное (например, в результате изменения вращения диска тоже в противоположную сторону).

– *Эталонный удар* — наибольший по силе (начальной скорости) среди всех ударов прилипания; такой удар разделяет между собой удары прилипания и скольжения.

– Влияние удара на скольжение тел определяется через сравнение текущего удара с эталонным, по их начальным скоростям.

– Начальная скорость скольжения после удара трением определяется как разность начальных скоростей текущего и эталонного ударов [21].

– Сила сопротивления скольжению, возникающая в момент удара трением, обратно пропорциональна начальной скорости этого удара и определяется по формуле:

$$F_c = F_0 \frac{\Delta}{b_1 V_- + \Delta},$$

где F_0 — максимальное значение силы трения (перед началом скольжения в момент удара), подлежащая определению; $V_- = r\omega$ — начальная скорость удара трением (удара прилипания); Δ, b_1 — коэффициенты аппроксимации, которые определяются экспериментально.

Для определения эталонного удара запишем условие равновесия тормозной колодки в момент прижатия, останавливающее вращение диска:

$$\frac{M}{r} - F_0 \frac{1}{k_*} = 0,$$

где $k_* = 1 + \frac{b_1}{\Delta} V_{-*}$, $V_{-*} = r\omega_*$. Принимая, что $\tau = \frac{M}{rS}$,

где S — площадь пятна контакта колодки с диском, получается: $\tau_{d1} = \frac{\tau_1}{k_*}$. Здесь $\tau_1 = \frac{Pf_1}{(1-f_1\lambda)S}$; τ_{d1}, k_*, ω_*

– соответственно предельно-допустимое динамическое касательное напряжение, коэффициент динамичности для предельного состояния покоя колодки перед началом скольжения относительно диска и критическая угловая скорость диска при эталонном ударе. Начало скольжения колодки произойдет, когда

$$\tau_{d1} = \tau. \quad (2)$$

Отсюда критическая скорость для эталонного удара трением будет определяться так:

$$V_{-*} = \frac{\Delta}{b_1} \left(\frac{rP}{M} \frac{f_1}{1-f_1\lambda} - 1 \right). \quad (3)$$

Возможность или невозможность начала скольжения колодки относительно диска, определяется через сравнение текущего удара с эталонным. Удары скольжения, приводящие к началу скольжения, должны иметь начальные скорости $V_- > V_{-*}$; а удары прили-

пания такие: $V_- \leq V_{-*}$. Полученная формула (3) имеет смысл, когда $V_{-*} > 0$. Поэтому необходимо выполнения условий:

$$\begin{cases} \frac{rP}{M} > \frac{1}{f_1} - \lambda; \\ 1 - f_1\lambda > 0. \end{cases} \quad (4)$$

Первое из них устанавливает связь между величинами, определяющими заданное силовое воздействие, коэффициентом трения покоя f_1 и введенном параметре λ для возможности эталонного удара. А второе — условие возможности равновесия для колодки в момент прижатия. Случай, когда $1 - f_1\lambda \rightarrow +0$ будет означать, что для достижения удара скольжения диск должен вращаться с нереально большой угловой скоростью.

В случаях, когда $1 - f_1\lambda \leq 0$, будет происходить отскок колодки от диска, который после удара сменит направление своего вращения. После отскока, при изменившемся направлении вращения диска, сила трения будет иметь противоположное направление в сравнении с тем, что показано на рисунке. А сила реакции в этом случае будет находиться по формуле $N = P/(1 + f_0\lambda)$, что тоже исключает вариант парадокса. Случай, когда $1 - f\lambda \leq 0$, означает, что параметры f и λ могут и по отдельности достигать таких значений, при которых равновесие колодки в момент прижатия при заданном направлении вращения диска будет невозможным. Например, когда λ велико [11], а f имеет обычное значение или наоборот.

При отрыве нельзя было использовать формулу (1), так как она следовала из условия равновесия колодки, которое в этот момент не выполняется. Поэтому случаи, когда $1 - f\lambda \leq 0$, нельзя было считать парадоксами Пенлеве.

Дифференциальное уравнение замедления вращательного движения диска, когда $1 - f_0\lambda > 0$, имеет вид:

$$I\dot{\omega} = M - \frac{f_0 r P}{1 - f_0 \lambda} \quad (5)$$

где I — осевой момент инерции диска, а начальное условие определяется как $\omega_0 = \omega - \omega_*$. В случае, когда $1 - f_1\lambda \leq 0$, дифференциальное уравнение будет другим:

$$I\dot{\omega} = M - \frac{f_0 r P}{1 + f_0 \lambda}, \quad (6)$$

которое будет описывать вращение диска уже в противоположном направлении после отскока колодки.

Литература

1. Самсонов В.А. Динамика тормозной колодки и «удар трением» // Прикладная математика и механика. 2005. Т. 69, № 6. С. 912-921.
2. Самсонов В.А. Очерки о механике: некоторые задачи, явления и парадоксы. М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотичная механика». Ин-т компьютерных исслед., 2001. 80 с.

Следует заметить, что ранее используемый автором метод кинематических зон [7; 8] хотя и позволяет избегать парадоксы Пенлеве, но возникающие удары трением не принимались во внимание, и поэтому моделирование процесса торможения было бы тоже не точным. При использовании метода кинематических зон также необходимо учитывать удары трением согласно приведенной выше теории.

Заключение. Построена теория удара трением, которая на примере работы тормозной колодки позволяет определять, когда в момент прижатия колодки произойдут:

1. Мгновенная остановка вращения диска.
2. Продолжится замедление вращения диска, и с какой начальной угловой скоростью оно начнется. Тем самым, дифференциальное уравнение (5) такого движения можно будет использовать для конкретного описания процесса торможения.
3. Возможность мгновенной смены направления вращения диска в случае сильного удара и большого трения, когда следует использовать дифференциальное уравнение (6).

Для всех вышеперечисленных случаев установлены диапазоны начальных скоростей для ударов скольжения, прилипания. Устанавливается связь между величинами, определяющими заданное силовое воздействие P и M , коэффициентом трения покоя f_1 и введенном параметром λ для возможности существования эталонного удара; в противном случае удары прилипания будут отсутствовать, т. е. прижатием колодки вращение диска сразу остановить не удастся.

Показано, что ранее обнаруженные парадоксы Пенлеве не будут соответствовать действительности. Для избегания парадоксов вместо формулы (1) следует использовать такую:

$$N = \begin{cases} \frac{P}{1 - f\lambda}, & \text{if } f\lambda < 1; \\ \frac{P}{1 + f\lambda}, & \text{if } f\lambda \geq 1; \end{cases} \quad (7)$$

которая будет соответствовать одному из реальных состояний тормозной колодки во время торможения.

Удар трением следует учитывать и при ином задаваемом движении диска — когда направление его вращения направлено в другую сторону. В таких случаях, хотя и не возникает парадокс Пенлеве, но и здесь момент прижатия колодки является определяющим для всего процесса торможения.

Можно предположить, что и для других подобных систем с трением парадоксов Пенлеве не будет, если учитывать удары трением.

3. Досаев М.З., Самсонов В.А. Особенности динамики систем с упругими элементами и сухим трением // Прикладная математика и механика. 2021. Т. 85, № 4. С. 426-435.
4. Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Парадоксы Пенлеве и динамика тормозной колодки // Прикладная математика и механика. 1995. Т. 59, № 3. С. 366-375.
5. Пенлеве П. Лекции о трении. М.: Гостехиздат, 1954. 316 с.

6. Козлов В.В. Трение по Пенлеве и лагранжева механика // Доклады Акад. наук. 2011. Т. 438, № 6. С. 758-761.
7. Коронатов В.А. Финал парадокса Пенлеве для тормозной колодки // Системы. Методы. Технологии. 2019. № 2 (42). С. 44-48.
8. Коронатов В.А. Парадоксы Пенлеве для классических механических систем с сухим трением и ключ к их решению // Математика, ее приложения и математическое образование (МПМО'20): материалы VII Междунар. конф. (7-12 сент. 2020 г.). Улан-Удэ, 2020. С. 121-124.
9. Иванова Т.Б., Ермакова Н.Н., Караваев Ю.Л. Экспериментальное исследование тормозной колодки // Доклады Акад. наук. 2016. Т. 471, № 4. С. 421-424.
10. Болотов А.Е. О движении материальной плоской фигуры, стесненной связями с трением // Математический сб. 1906. Т. 25, № 4. С. 562-708.
11. Коронатов В.А. Об отсутствии парадокса Пенлеве для тормозной колодки // Системы. Методы. Технологии. 2024. № 3 (63). С. 34-37.
12. Андронов А.А., Журавлев В.Ф. Сухое трение в задачах механики. М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотичная механика». Ин-т компьютерных исслед., 2010. 164 с.
13. Журавлев В.Ф. О «парадоксе» тормозной колодки // Доклады Акад. наук. 2017. Т. 474, № 3. С. 301-302.
14. Журавлев В.Ф. Некорректные задачи механики // Вестн. Московского гос. технического ун-та им. Н.Э. Баумана. Сер.: Приборостроение. 2017. № 2 (113). С. 77-85.
15. Журавлев В.Ф. 500 лет истории закона сухого трения // Вестн. Московского гос. технического ун-та им. Н.Э. Баумана. Сер.: Естественные науки. 2014. № 2 (53). С. 21-31.
16. Журавлев В.Ф. К истории закона сухого трения // Изв. Рос. акад. наук. Механика твердого тела. 2013. № 4. С. 13-19.
17. Неймарк Ю.И., Смирнова В.Н. К столетию проблемы парадокса Пенлеве // Вестн. Нижегородского ун-та им. Н.И. Лобачевского. Сер.: Математическое моделирование и оптимальное управление. 2001. № 2. С. 7-33.
18. Неймарк Ю.И., Смирнова В.Н. Идеализация, математическое моделирование и парадокс Пенлеве // Вестн. Нижегородского ун-та им. Н.И. Лобачевского. Сер.: Математическое моделирование и оптимальное управление. 1999. № 2. С. 53-66.
19. Гольдсмит В. Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел. М.: Изд-во лит. по строительству, 1985. 448 с.
20. Тарасов В.Н., Бояркина И.В., Коваленко М.В., Кузнецов С.М., Шлегель И.Ф. Теория удара в строительстве и машиностроении. М.: Изд-во «АСВ», 2006. 336 с.
21. Коронатов В.А. Элементарная теория проникания ударника в твердые грунтовые среды при однократном ударе, с учетом возникающих трещин // Системы. Методы. Технологии. 2021. № 1 (49). С. 25-33.
22. Koronotov V.A. Modeling percussion and rotary percussion drilling in strong rocks // Journal of Mining Science. 2024. Vol. 60, № 1. P. 61-73.
3. Dosaev M.Z., Samsonov V.A. Features of dynamics of systems with elastic elements and dry friction // Applied Mathematics and mechanics.. 2021. V. 85, № 4. P. 426-435.
4. Nejmark Yu.I., Fufaev N.A. Paradoxes of Penlev and dynamics of brake pads // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1995. V. 59, № 3. P. 366-375.
5. Penleve P. Lectures on friction. M.: Gostekhizdat, 1954. 316 p.
6. Kozlov V.V. Penlev friction and Lagrangian mechanics // Doklady Akad. nauk. 2011. V. 438, № 6. P. 758-761.
7. Koronotov V.A. The finale of the Painlevet paradox for the brake pad // Systems. Methods. Technologies. 2019. № 2 (42). P. 44-48.
8. Koronotov V.A. Painlev paradoxes for classical mechanical systems with dry friction and the key to their solution // Matematika, ee prilozheniya i matematicheskoe obrazovanie (MPMO'20): materialy VII Mezhdunar. konf. (7-12 sent. 2020 g.). Ulan-Ude, 2020. P. 121-124.
9. Ivanova T.B., Erdakova N.N., Karavaev Yu.L. Experimental study of the brake pad // Doklady Akad. nauk. 2016. V. 471, № 4. P. 421-424.
10. Bolotov A.E. On the movement of a mathematical group associated with friction // Matematicheskij sb. 1906. V. 25, № 4. P. 562-708.
11. Koronotov V.A. On the absence of the Painlevet paradox for the brake pad // Systems. Methods. Technologies. 2024. № 3 (63). P. 34-37.
12. Andronov A.A., Zhuravlev V.F. Dry friction in problems of mechanics. M.; Izhevsk: NIC «Regulyarnaya i haotichnaya mekhanika». In-t komp'yuternyh issled., 2010. 164 p.
13. Zhuravlev V.F. About the "paradox" of the brake pad // Doklady Akad. nauk. 2017. V. 474, № 3. P. 301-302.
14. Zhuravlev V.F. Incorrect problems of mechanics // Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Ser.: Instrument Engineering. 2017. № 2 (113). P. 77-85.
15. Zhuravlev V.F. 500 years of the history of the law of dry friction // Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Ser.: Series Natural Sciences. 2014. № 2 (53). P. 21-31.
16. Zhuravlev V.F. On the history of the law of dry friction // Mechanics of Solids. 2013. № 4. P. 13-19.
17. Nejmark Yu.I., Smirnova V.N. To the centenary of the problem of the Penlev paradox // Vestnik of Lobachevsky University of Nizhni Novgorod. Ser. Mathematical modeling and optimal control. 2001. № 2. P. 7-33.
18. Nejmark Yu.I., Smirnova V.N. Idealization, mathematical modeling and the Penlev paradox // Vestnik of Lobachevsky University of Nizhni Novgorod. Ser. Mathematical modeling and optimal control. 1999. № 2. P. 53-66.
19. Gol'dsmit V. Impact. The Theory and Physical Behaviour of Colliding Solids. M.: Izd-vo lit. po stroitel'stvu, 1985. 448 p.
20. Tarasov V.N., Boyarkina I.V., Kovalenko M.V., Kuznecov S.M., Shlegel' I.F. Theory of impact in construction and mechanical engineering. M.: Izd-vo «ASV», 2006. 336 p.
21. Koronotov V.A. Elementary theory of penetration of a striker into solid ground media with a single impact, taking into account emerging cracks // Systems. Methods. Technologies. 2021. № 1 (49). P. 25-33.
22. Koronotov V.A. Modeling percussion and rotary percussion drilling in strong rocks // Journal of Mining Science. 2024. Vol. 60, № 1. P. 61-73.

References

1. Samsonov V.A. Dynamics of the brake pad and "friction shock" // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2005. V. 69, № 6. P. 912-921.
2. Samsonov V.A. Essays on mechanics: some problems, phenomena and paradoxes. M.; Izhevsk: NIC «Regulyarnaya i haotichnaya mekhanika». In-t komp'yuternyh issled., 2001. 80 p.