

Моделирование и анализ контактного взаимодействия осесимметричных тел с применением многоступенчатого нелинейного структурного типа анализа SOL 401

Д.А. Еловенко^a, Абид Шареф Мехди^b

Институт авиационного строительства и транспорта Иркутского национального исследовательского технического университета, ул. Лермонтова, 83, Иркутск, Россия

^a elovenko03@gmail.com, ^b mehdiabidcharef@mail.ru

^a <https://orcid.org/0000-0001-6520-9268>, ^b <https://orcid.org/0009-0008-6804-847X>

Статья поступила 12.01.2024, принята 16.01.2024

Анализ контактного взаимодействия различных составных конструкций очень часто сопровождается задачами моделирования контактных пар, которыми являются сопрягаемые поверхности и контрповерхности относительно большой площади в сравнении с общими габаритными размерами моделируемых объектов. Кроме того, в моделях могут присутствовать десятки таких контактных пар. Характерным примером таких составных конструкций являются сопряжения осесимметричных тел. Временные затраты на процесс численного анализа таких моделей являются актуальной проблемой. В данной работе предложен подход к моделированию и анализу контактного взаимодействия осесимметричных тел, сутью которого является возможность моделирования малых объемов (частей) модели с сохранением требуемой вычислительной точности процесса конечно-элементного (КЭ) анализа, который позволяет реализовать его многоступенчатый нелинейный структурный тип SOL 401 в известном программном комплексе FEMAP от Siemens. Описывается алгоритм расчета тангенциальных напряжений в сопрягаемых осесимметричных телах (полых цилиндрах) под внутренним давлением, а также в его отсутствие. На его основе проводится расчет типовых тестовых примеров контактного взаимодействия двух и трех сопряженных тел одинаковой толщины типа полый цилиндр. Предлагаемый подход демонстрируется на объемных (3D) КЭ-моделях. Показано, что малыми углами секторов $0^{\circ} 30' - 1^{\circ}$ и высоты до 0,00756 от общей толщины конструкции возможно получить результаты высокой точности, а также полностью исключить краевые эффекты. Это кратко, а зачастую и на порядок, сокращает временные затраты вычислительной техники. Сравнительный анализ аналитического и численного решения для контактного взаимодействия двух сопряженных тел одинаковой толщины с общей степенью толстостенности 0,22 и 1,00, а также для контактного взаимодействия трех сопряженных тел одинаковой толщины с общей степенью толстостенности 0,22 и трех разнотолщинных тел с общей степенью толстостенности 1,222 показали, что различия в расчетах тангенциальных напряжений находятся в пределах нормальной инженерной точности и не превышают 5 %, а в расчетах контактных давлений — не превышают 2,66 %. Для примера трех разнотолщинных тел также сравнивались результаты анализа двух численных методов, максимальное различие между которыми было 3,27 %.

Ключевые слова: осесимметричное тело; полый цилиндр; тангенциальные напряжения; контактное давление; контактное взаимодействие; КЭ-модель.

Modeling and analysis of contact interaction of axisymmetric bodies using multi-stage nonlinear structural type of analysis SOL 401

D.A. Elovenko^a, Abid Sharef Mekhdi^b

Institute of Aviation Engineering and Transport of Irkutsk National Research Technical University; 83, Lermontov St., Irkutsk, Russia

^a elovenko03@gmail.com, ^b mehdiabidcharef@mail.ru

^a <https://orcid.org/0000-0001-6520-9268>, ^b <https://orcid.org/0009-0008-6804-847X>

Received 12.01.2024, accepted 16.01.2024

Analysis of contact interaction of various composite constructions is very often accompanied by problems of modeling contact pairs which are mating surfaces and countersurfaces of a relatively large area in comparison with the overall dimensions of the simulated objects. In addition, models may contain dozens of such contact pairs. A typical example of such composite structures is the conjugation of axisymmetric bodies. The time spent on the process of numerical analysis of such models is an actual problem. This paper proposes an approach to modeling and analyzing the contact interaction of axisymmetric bodies, the essence of which is the ability to simulate small volumes (parts) of the model while maintaining the required computational accuracy of the finite element (FE) analysis process which allows the implementation of its multi-stage nonlinear structural type SOL 401 in the well-known FEMAP software package by Siemens. An algorithm for calculating tangential stresses in mating axisymmetric bodies (hollow cylinders) under internal pressure, as well as in its absence, is described. On its basis, the calculation of typical test examples of contact interaction of two and three conjugate bodies of the same thickness, such as a hollow cylinder, is carried out. The proposed approach is demonstrated on volumetric (3D) FE models

which shows that with small angles of sectors $0^\circ 30' - 1^\circ$ and heights up to 0,00756 of the total thickness of the structure, it is possible to obtain high-precision results, as well as completely eliminate edge effects. This reduces the time spent on computing by a factor of, and often by an order. Comparative analysis of the analytical and numerical solution for the contact interaction of two conjugate bodies of the same thickness with a total degree of thickness of 0,22 and 1,00 and also for the contact interaction of three conjugate bodies of the same thickness with a common degree of thickness 0,22 and three bodies of different thicknesses with a general degree of thickness 1,222 shows that differences in tangential stress calculations are within normal engineering accuracy and do not exceed 5%, and in calculations of contact pressures – do not exceed 2,66%. For the example of three bodies of different thicknesses, the results of the analysis of two numerical methods are also compared, the maximum difference between which is 3.27%.

Keywords: axisymmetric body; hollow cylinder; tangential stresses; contact pressure; contact interaction; FE model.

Введение. Явление контактного взаимодействия осесимметричных тел, в особенности с несколькими контактными парами, имеет место в конструктивных элементах различного технологического оборудования (химического, атомного, оборонного и др.). Исследованию таких конструкций посвящены работы [1–21]. Инженерный анализ и численный расчет таких объектов очень часто сопровождаются задачами компьютерного моделирования контактных пар, которыми являются сопрягаемые поверхности и контрповерхности относительно большей площади в сравнении с общими габаритными размерами моделируемых объектов.

Сопряжение осесимметричных тел может осуществляться с натягом или зазором. В случае возникновения натяга каждое тело конструкции может рассматриваться как отдельный компонент, подвергающийся так называемому усадочному давлению, а также внутреннему (например, эксплуатационному) давлению.

В настоящем исследовании будет предложен высокоточный численный метод моделирования и анализа контактного взаимодействия осесимметричных тел, позволяющий на порядок сократить затраты машинного времени на расчет, вычислительной основой которого является многоступенчатый нелинейный структурный тип анализа SOL 401 в известном программном комплексе FEMAP от Siemens.

Модель тангенциальных напряжений в полом цилиндре под внутренним давлением. Трансформируем базовые соотношения [22] и получим выражения для расчета тангенциальных напряжений в телах, а также контактных давлений и натягов между сопряженными телами.

1. Полый цилиндр под давлением. Определим толщину осесимметричного тела (t) и диаметр наружной поверхности (d_2) для сплошного монолитного изотропного тела под давлением как:

$$t = r_i \left[\sqrt{\frac{\sigma_t + p_i}{\sigma_t - p_i}} - 1 \right]; \quad (1)$$

$$(d_2) = d_i + (2t). \quad (2)$$

Тангенциальные напряжения в этом случае будут иметь вид:

$$\sigma_\theta = \frac{P(r_3^2 + r_1^2)}{(r_2^2 - r_1^2)}. \quad (3)$$

2. Два полых сопряженных цилиндра под давлением. Тангенциальные напряжения, возникающие на поверхностях внутреннего цилиндра только от контактного давления (P_{s12}) в зоне сопряжения с наружным имеют вид:

$$\sigma_{\theta 1} = \frac{-P_{s12}(r_2^2 + r_1^2)}{r_2^2 - r_1^2}; \quad (4)$$

$$\sigma_{\theta 2} = \frac{-2P_{s12}(r_2^2)}{r_2^2 - r_1^2}. \quad (5)$$

Тангенциальные напряжения, возникающие на поверхностях наружного цилиндра только за счет контактного давления (P_{s12}) в зоне сопряжения с внутренним, определяются уравнениями:

$$\sigma_{\theta 3} = \frac{2P_{s12}(r_2^2)}{r_3^2 - r_2^2}; \quad (6)$$

$$\sigma_{\theta 4} = \frac{P_{s12}(r_3^2 + r_2^2)}{r_3^2 - r_2^2}. \quad (7)$$

Тангенциальные напряжения от внутреннего давления (P) на внутренней поверхности внутреннего цилиндра определяются уравнением:

$$\sigma_{\theta 5} = \frac{P(r_3^2 + r_1^2)}{r_3^2 - r_1^2}. \quad (8)$$

Тангенциальные напряжения от внутреннего давления (P) на наружной поверхности внутреннего цилиндра и внутренней поверхности наружного цилиндра определяются уравнением:

$$\sigma_{\theta 6} = \frac{P \cdot r_1^2}{r_2^2} \left[\frac{r_3^2 + r_2^2}{r_3^2 - r_1^2} \right]. \quad (9)$$

Тангенциальные напряжения, вызванные внутренним давлением (P) на наружной поверхности наружного цилиндра, определяются уравнением:

$$\sigma_{\theta 7} = \frac{2P \cdot r_1^2}{r_3^2 - r_1^2}. \quad (10)$$

Результирующие тангенциальные напряжения на внутренней поверхности каждого тела определяются уравнениями:

$$\sigma_{\theta r 1} = \frac{P(r_3^2 + r_1^2)}{r_3^2 - r_1^2} - \frac{2P_{s12}(r_2^2)}{r_2^2 - r_1^2}; \quad (11)$$

$$\sigma_{\theta r 2} = \frac{P \cdot r_1^2}{r_2^2} \left[\frac{r_3^2 + r_2^2}{r_3^2 - r_1^2} \right] + \frac{P_{s12}(r_3^2 + r_2^2)}{r_3^2 - r_2^2}. \quad (12)$$

3. Расчет контактного давления (P_{s12}) между сопряженными поверхностями. Для получения оптимальных значений контактных давлений от натяга на сопряженных поверхностях P_{s12} , создающих равные тангенциальные напряжения в обоих телах, были приравнены максимальные тангенциальные напряжения, определяемые уравнениями (11) и (12).

Из (11) и (12), т. е. $\sigma_{\theta r 1} = \sigma_{\theta r 2}$, получим:

$$P \left[\frac{r_3^2 + r_1^2}{r_3^2 - r_1^2} - \frac{r_1^2}{r_2^2} \left(\frac{r_3^2 + r_2^2}{r_3^2 - r_1^2} \right) \right] = P_{s12} \left[\frac{r_3^2 + r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} + \frac{2(r_2^2)}{r_2^2 - r_1^2} \right];$$

пусть:

$$K_1 = \left[\frac{r_3^2 + r_1^2}{r_3^2 - r_1^2} - \frac{r_2^2}{r_2^2} \left(\frac{r_3^2 + r_2^2}{r_3^2 - r_1^2} \right) \right]; \quad (13)$$

$$K_2 = \left[\frac{r_3^2 + r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} + \frac{2(r_2^2)}{r_2^2 - r_1^2} \right]. \quad (14)$$

Таким образом:

$$P_{s12} = P \left[\frac{K_1}{K_2} \right]. \quad (15)$$

Полный натяг между телами определяется выражением:

$$\delta_{12} = \frac{P_{s12} \cdot r_2}{E} \left[\frac{r_3^2 + r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} + \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \right]. \quad (16)$$

4. Три полых сопряженных цилиндра под давлением. На рис. 1 и 2 показаны натяги, возникающие между сопряженными поверхностями 1 и 2, 2 и 3. Натяг представляет собой разницу между положениями поверхностей соответствующих тел до их сопряжения. Тангенциальные напряжения на наружной и внутренней поверхностях тела 1 только за счет контактного давления (P_{s12}) определяются как:

$$\sigma_{\theta 1} = -P_{s12} \left[\frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \right], \quad (17)$$

$$\sigma_{\theta 1} = - \left[\frac{2P_{s12} r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \right]. \quad (18)$$

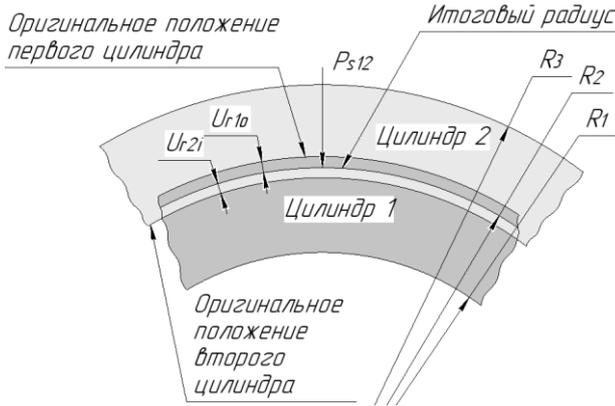


Рис. 1 Схема сопряжения первого и второго тела

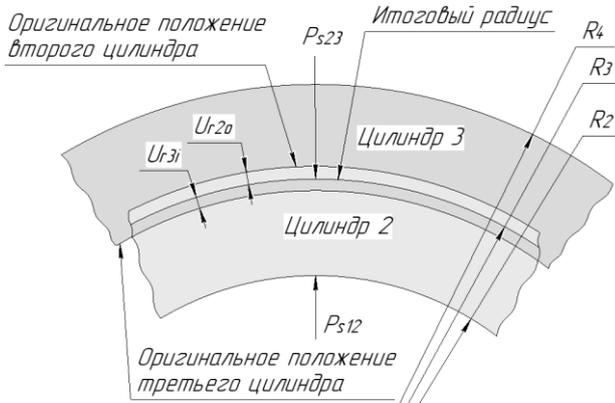


Рис. 2 Схема сопряжения второго и третьего тела

Перемещение в радиальном направлении U_{r10} за счет контактного давления на внешней поверхности тела 1 определяется как:

$$U_{r10} = \frac{-P_{s12} r_2 (1+V)}{E} \left[(1-V) \left(\frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \right) - V \right]. \quad (19)$$

Тангенциальные напряжения, возникающие на контактных поверхностях второго тела только за счет контактного давления (P_{s12} и P_{s23}) определяются как:

$$\sigma_{\theta 3} = \frac{2P_{s12} r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} - \frac{P_{s23} (r_3^2 + r_2^2)}{r_3^2 - r_2^2}, \quad (20)$$

$$\sigma_{\theta 4} = \frac{P_{s12} (r_3^2 + r_2^2)}{r_3^2 - r_2^2} - \frac{P_{s23} r_3^2}{r_3^2 - r_2^2}. \quad (21)$$

Перемещение в радиальном направлении U_{r2i} от контактного давления на внутренней поверхности второго тела определяется как:

$$U_{r2i} = \frac{r_2 (1+V)}{E} \left[P_{s12} \left((1-V) \left(\frac{r_3^2 + r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} \right) + V \right) - (1-V) \left(\frac{2P_{s23} r_3^2}{r_3^2 - r_2^2} \right) \right]. \quad (22)$$

С помощью (19) и (22) общий натяг δ_{12} между контактными поверхностями тел 1 и 2 определяется как:

$$\delta_{12} = U_{r2i} - U_{r10};$$

$$\delta_{12} = \frac{r_2 (1-V^2)}{E} \left[P_{s12} \left(\frac{r_3^2 + r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} + \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \right) - 2P_{s23} \left(\frac{r_3^2}{r_3^2 - r_2^2} \right) \right]. \quad (23)$$

Перемещение в радиальном направлении U_{r20} от контактного давления на внешней поверхности второго тела определяется как:

$$U_{r20} = \frac{r_3}{E} \left[\frac{2P_{s12} (1-V^2) r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} - P_{s23} (1+V) \left((1-V) \frac{r_3^2 + r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} - V \right) \right]. \quad (24)$$

Тангенциальные напряжения, возникающие на внешней и внутренней поверхности тела 3 только за счет контактного давления (P_{s23}), будут иметь вид:

$$\sigma_{\theta 5} = \frac{2P_{s23} r_3^2}{r_4^2 - r_3^2}, \quad (25)$$

$$\sigma_{\theta 6} = \frac{P_{s23} (r_4^2 + r_3^2)}{r_4^2 - r_3^2}. \quad (26)$$

Перемещение в радиальном направлении U_{r3i} от контактного давления на внутренней поверхности тела 3 определяется как:

$$U_{r3i} = \frac{P_{s23} r_3 (1+V)}{E} \left[(1-V) \left(\frac{r_4^2 + r_3^2}{r_4^2 - r_3^2} \right) + V \right]. \quad (27)$$

Используя (24) и (27), общий натяг δ_{23} между контактными поверхностями тел 2 и 3 будет иметь вид:

$$\delta_{23} = U_{r3i} - U_{r20};$$

$$\delta_{23} = \frac{r_3 (1-V^2)}{E} \left[P_{s23} \left(\frac{r_4^2 + r_3^2}{r_4^2 - r_3^2} + \frac{r_3^2 + r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} \right) - \frac{2P_{s12} r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} \right]. \quad (28)$$

Тангенциальные напряжения на текущем радиусе r осесимметричного тела под давлением только от внутреннего давления будут равно:

$$\sigma_{\theta} = \frac{Pr_1^2}{r_4^2 - r_1^2} \left[\frac{r_4^2}{r^2} + 1 \right]. \quad (29)$$

После определения тангенциальных напряжений на всех радиусах применяется метод суперпозиции, т. е. различные напряжения алгебраически комбинируются для

получения результирующих тангенциальных напряжений в составной конструкции, подверженной как давлению от натяга, так и внутреннему давлению Р.

Применяя (29) и (18), максимальное тангенциальное напряжение на внутренней поверхности тела 1 при r_1 определяется уравнением:

$$\sigma_{\theta r1} = P \left[\frac{r_4^2 + r_1^2}{r_4^2 - r_1^2} \right] - 2P_{s12} \left[\frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \right]. \quad (30)$$

Используя (29) и (21), максимальное тангенциальное напряжение на внутренней поверхности тела 2 при r_2 определяется уравнением:

$$\sigma_{\theta r2} = \frac{Pr_1^2}{r_2^2} \left[\frac{r_4^2 + r_1^2}{r_4^2 - r_1^2} \right] + \frac{P_{s12}(r_3^2 + r_2^2) - 2P_{s23}r_3^2}{r_3^2 - r_2^2}. \quad (31)$$

Далее, используя уравнения (26) и (29), максимальное тангенциальное напряжение на внутренней поверхности тела 3 при r_3 определяется уравнением:

$$\sigma_{\theta r3} = \frac{Pr_1^2}{r_3^2} \left[\frac{r_4^2 + r_1^2}{r_4^2 - r_1^2} \right] + P_{s23} \left[\frac{r_4^2 + r_3^2}{r_4^2 - r_3^2} \right]. \quad (32)$$

5. Определение контактных давлений P_{s12} и P_{s23} .

Для получения контактных давлений только от натяга P_{s12} и P_{s23} , создающих одинаковые тангенциальные напряжения во всех телах, приравняем максимальные тангенциальные напряжения, определяемые соотношениями (30), (31) и (32).

Приравнявая (30) и (31), получим:

$$P_{s12} \left[\frac{2r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{r_3^2 + r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} \right] = P \left[\frac{r_4^2 + r_1^2}{r_4^2 - r_1^2} - \frac{r_1^2}{r_2^2} \left[\frac{r_4^2 + r_2^2}{r_4^2 - r_1^2} \right] \right] + P_{s23} \frac{2r_3^2}{r_3^2 - r_2^2}$$

Обозначим коэффициенты:

$$t_1 = \frac{r_2}{r_1} = \frac{d_2}{d_1}, t_2 = \frac{r_3}{r_2} = \frac{d_3}{d_2}, t_3 = \frac{r_4}{r_3} = \frac{d_4}{d_3},$$

где d_1, d_2, d_3, d_4 — диаметры, соответствующие радиусам r_1, r_2, r_3, r_4 , тогда обозначим:

$$C_1 = \frac{2r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{r_3^2 + r_2^2}{r_3^2 - r_2^2}, \quad (34)$$

$$C_2 = \frac{r_4^2 + r_1^2}{r_4^2 - r_1^2} - \frac{r_1^2}{r_2^2} \left[\frac{r_4^2 + r_2^2}{r_4^2 - r_1^2} \right], \quad (35)$$

$$C_3 = \frac{2r_3^2}{r_3^2 - r_2^2}. \quad (36)$$

Следовательно, (33) примет вид:

$$P_{s12} = P \left[\frac{C_2}{C_1} \right] + P_{s23} \left[\frac{C_3}{C_1} \right].$$

Из (31) и (32) получим:

$$P_{s12} \frac{r_3^2 + r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} = P \left[\frac{r_1^2(r_4^2 + r_3^2)}{r_4^2(r_4^2 - r_1^2)} - \frac{r_1^2(r_4^2 + r_2^2)}{r_2^2(r_4^2 - r_1^2)} \right] + P_{s23} \left[\frac{r_4^2 + r_3^2}{r_4^2 - r_3^2} + \frac{2r_3^2}{r_3^2 - r_2^2} \right],$$

обозначим:

$$C_4 = \frac{r_3^2 + r_2^2}{r_3^2 - r_2^2}, \quad (39)$$

$$C_5 = \frac{r_1^2(r_4^2 + r_3^2)}{r_4^2(r_4^2 - r_1^2)} - \frac{r_1^2(r_4^2 + r_2^2)}{r_2^2(r_4^2 - r_1^2)}, \quad (40)$$

$$C_6 = \frac{r_4^2 + r_3^2}{r_4^2 - r_3^2} + \frac{2r_3^2}{r_3^2 - r_2^2}. \quad (41)$$

Следовательно, (38) принимает вид:

$$P_{s12} = P \left[\frac{C_5}{C_4} \right] + P_{s23} \left[\frac{C_6}{C_4} \right]. \quad (42)$$

Таким образом, (37) и (42) были решены, чтобы получить P_{s12} и P_{s23} через Р:

$$P_{s12} = P \left[\frac{(C_5/C_6) - (C_2/C_3)}{(C_4/C_6) - (C_1/C_3)} \right]; \quad (43)$$

$$P_{s23} = P \left[\frac{(C_5/C_4) - (C_2/C_1)}{(C_3/C_1) - (C_6/C_4)} \right]. \quad (44)$$

Подставив значения t_1, t_2 и t_3 , уравнения (23) и (28) можно записать так:

$$\delta_{12} = \frac{r_2(1-V^2)}{E} \left[P_{s12} \left(\frac{t_2^2 + 1}{t_2^2 - 1} + \frac{t_1^2 + 1}{t_1^2 - 1} \right) - 2P_{s23} \left(\frac{t_2^2}{t_2^2 - 1} \right) \right]; \quad (45)$$

$$\delta_{23} = \frac{r_3(1-V^2)}{E} \left[P_{s23} \left(\frac{t_3^2 + 1}{t_3^2 - 1} + \frac{t_2^2 + 1}{t_2^2 - 1} \right) - \frac{2P_{s12}}{t_2^2 - 1} \right]. \quad (46)$$

6. Анализ контактного взаимодействия 2-х и 3-х полых сопряженных цилиндров. Результаты расчета контактных давлений и тангенциальных напряжений для двух осесимметричных тел под действием давления на свободную поверхность (d_1) первого тела с параметрами Р = 32 МПа, $d_1 = 600$ мм, $d_2 = 666$ мм, $d_3 = 732$ мм, и для трех осесимметричных тел под действием давления на свободную поверхность (d_1) первого тела с параметрами Р = 32 МПа, $d_1 = 600$ мм, $d_2 = 644$ мм, $d_3 = 688$ мм, $d_4 = 732$ мм приведены в табл. 1.

Таблица 1. Результат аналитического расчета для 2-х и 3-х полых сопряженных цилиндров

Количество сопрягаемых тел	P_{s12} , МПа	P_{s23} , МПа	δ_{12} , мм	δ_{23} , мм	$\sigma_{\theta 1}$, МПа	$\sigma_{\theta 2}$, МПа	$\sigma_{\theta 3}$, МПа
2	0,865	—	0,029	—	153,854	153,854	—
3	0,797	0,698	0,018	0,017	150,966	150,966	150,966

Применение многоступенчатого структурного типа анализа SOL401 для расчета контактных давлений и тангенциальных напряжений. Многоступенчатый нелинейный структурный тип анализа SOL 401 является пакетом многоступенчатых алгоритмов структурного анализа КЭ-моделей, который поддерживает сочетание разных типов подкейсов (линейный, динамический, предварительная нагрузка, модальный, Фурье и циклический). В нем также присутствует возможность создания моделей с большими деформациями, перемещениями и поворотами. SOL 401 также поддерживается как автономный решатель и может быть использован в *Simcenter 3D Pre/Post* и в *Analysis Set Manager Simcenter Femap*. SOL 401 также является структурным решением, которое используется средой *Simcenter 3D Multiphysics* в приложении *Pre/Post*.

SOL 401 дает возможность определять характер контактного взаимодействия сопрягаемых деформируемых тел с заданным модулем упругости, а также величиной

зазора или натяга между контактными поверхностями. При этом геометрическое положение сопрягаемых поверхностей является одинаковым, а величины зазоров или натягов между соответствующими поверхностями задаются в числовом виде в специальном поле окна параметров контактного взаимодействия тел.

Применяя общий метод сечений при формировании и анализе КЭ-моделей контактного взаимодействия осесимметричных тел в цилиндрической системе координат, исключим 99,86 % объема модели и рассмотрим сектор с величиной угла в $0^\circ 30'$ и высотой тел (в данном случае, полых цилиндров) в 1 мм (рис. 3).

Используя известные (рассчитанные выше) значения натяга δ_{12} , возникающего в результате сопряжения тел 1 и 2, и натяга δ_{23} , возникающего в результате сопряжения тел 2 и 3 (см. табл. 1), определялись параметры их контактного взаимодействия в КЭ-моделях с помощью соответствующего инструмента моделирования в программном комплексе *FEMAP*.

Геометрические параметры модели контактного взаимодействия двух полых цилиндров высотой 1 мм определены следующим образом: $d_1 = 600$ мм, $d_2 = 666$ мм, $d_{2i} = 665,942$ мм, $d_3 = 732$ мм. Сравнение результатов аналитического решения и КЭ анализа представлены в табл. 2.

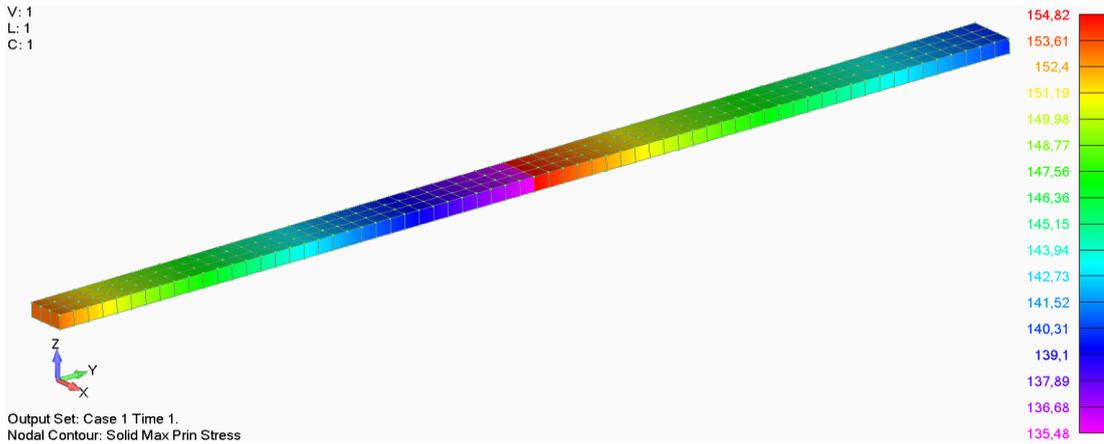


Рис. 3. Распределение тангенциальных напряжений в радиальном направлении двух сопряженных с натягом полых цилиндров под давлением 32 МПа

Таблица 2. Результаты расчета двух сопряженных с натягом цилиндров, находящихся под внутренним давлением 32 МПа

Расчет	Контактное давление P_{s12} , МПа	Тангенциальные напряжения $\sigma_{\theta 1}$, МПа	Тангенциальные напряжения $\sigma_{\theta 2}$, МПа
Аналитический	0,865	153,854	153,854
КЭ-модель SOL401	0,888	153,13	154,82
Отклонение, %	2,66	-0,46	0,63

Геометрические параметры модели контактного взаимодействия трех полых цилиндров высотой 1 мм определены следующим образом: $d_1 = 600$ мм, $d_2 = 644$ мм, $d_{2i} = 643,964$ мм, $d_3 = 688$ мм,

$d_{3i} = 687,966$ мм, $d_4 = 732$ мм. Сравнение результатов аналитического решения и КЭ анализа представлены в табл. 3.

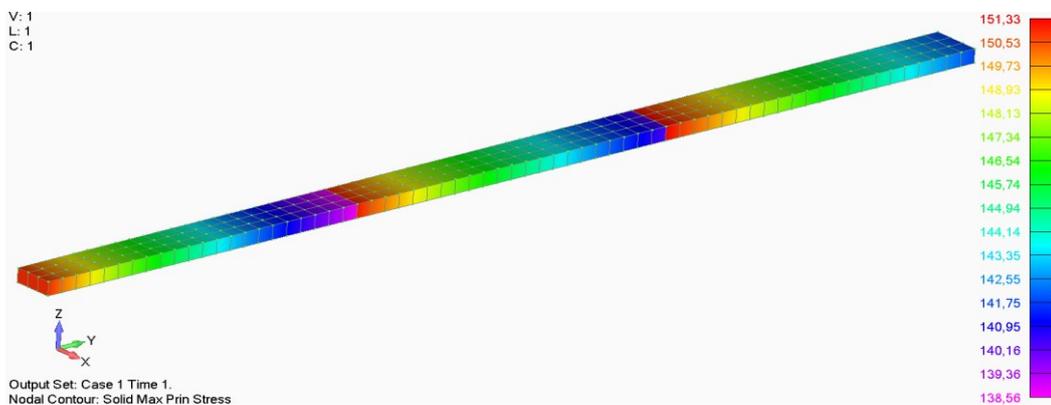


Рис. 4. Распределение тангенциальных напряжений в радиальном направлении трех сопряженных с натягом полых цилиндров под давлением 32 МПа

Таблица 3. Результаты расчета трех сопряженных с натягом цилиндров, находящихся под внутренним давлением 32 МПа

Расчет	Контактное давление P_{s12} , МПа	Контактное давление P_{s23} , МПа	Тангенциальные напряжения $\sigma_{\theta 1}$, МПа	Тангенциальные напряжения $\sigma_{\theta 2}$, МПа	Тангенциальные напряжения $\sigma_{\theta 3}$, МПа
Аналитический	0,797	0,698	150,966	150,966	150,966
КЭ-модель SOL401	0,813	0,7145	150,853	151,06	151,325
Отклонение, %	2	2,421	-0,075	0,062	0,238

Сравнение результатов расчета табл. 2 и 3 демонстрирует точность предлагаемого метода моделирования. Для подтверждения точности результатов, получаемых с применением многоступенчатого нелинейного структурного типа анализа SOL401 и предлагаемой методики моделирования контактного взаимодействия осесимметричных тел в объемной (3D) постановке рассмотрим еще два известных примера, модели которых в цилиндрической системе координат будут ограничены углом сектора в 1° , исключая таким образом 97,2 % объема КЭ-модели.

Рассмотрим контактное взаимодействие двух полых цилиндров одинаковой толщины, представленных в работе [23] (рис. 5). Сравнение результатов аналитического решения и нашей КЭ-модели представлены в табл. 4.

Теперь рассмотрим контактное взаимодействие трех полых цилиндров разной толщины, описанное в работе [24] (рис. 6). Сравнение результатов аналитического решения и численного анализа системы ANSYS с нашей КЭ-моделью с применением SOL401 для второго расчетного варианта (табл. 5) представлены в табл. 6 и 7.

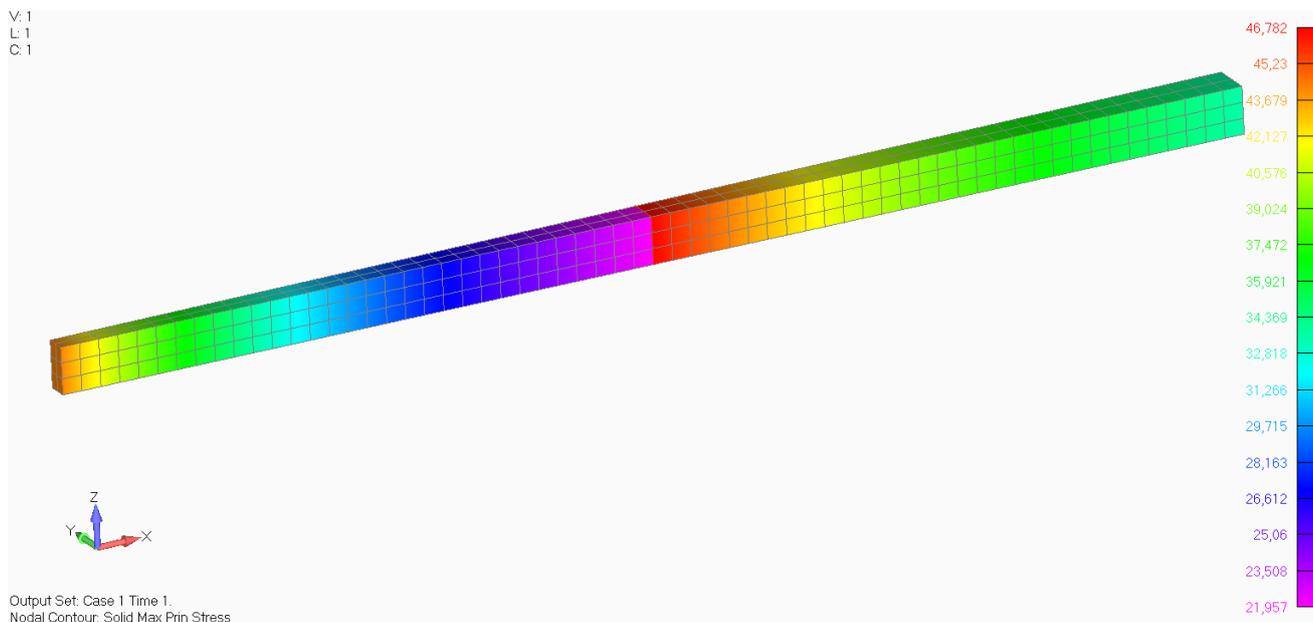


Рис. 5. Распределение тангенциальных напряжений в радиальном направлении двух сопряженных с натягом полых цилиндров под давлением 35 МПа

Таблица 4. Результаты расчета тангенциальных напряжений двух сопряженных с натягом цилиндров, находящихся под внутренним давлением 35 МПа

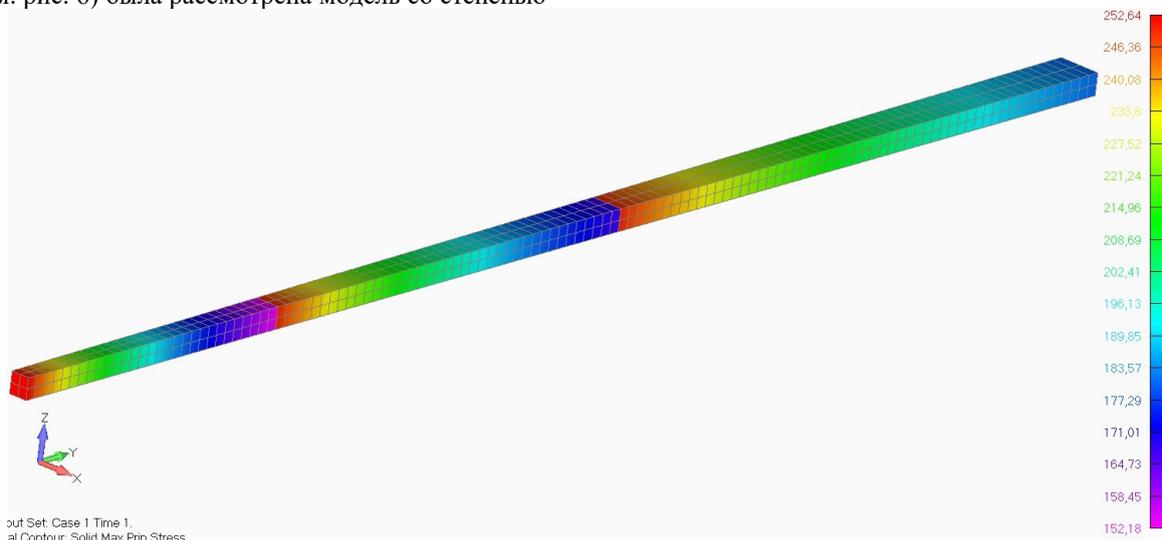
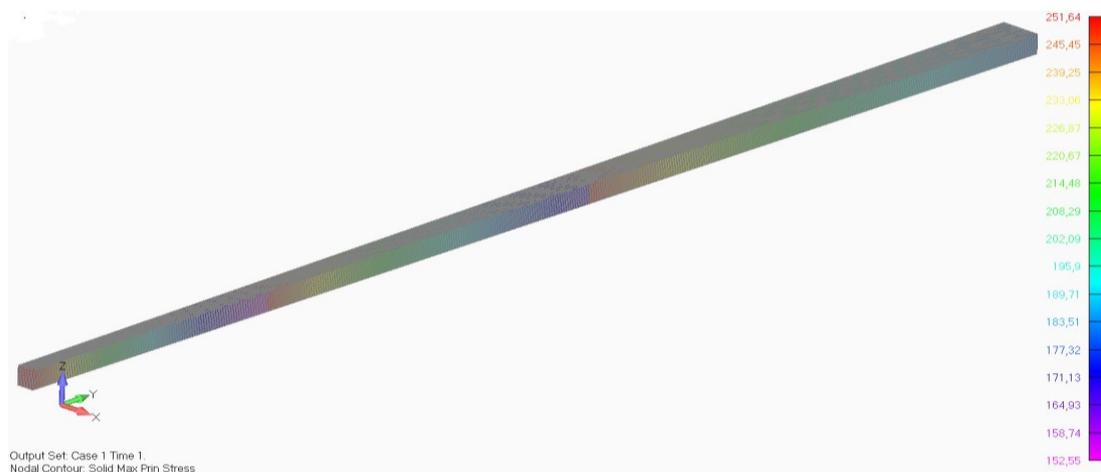
Расчет	Тело 1, МПа		Тело 2, МПа	
	$r = 25$ мм	$r = 37,5$ мм	$r = 37,5$ мм	$r = 50$ мм
Аналитический	45,32	23,00	45,34	32,64
КЭ-модель SOL401	44,242	21,957	46,781	33,526
Отклонение, %	-2,38	-4,5	3,18	2,71

Таблица 5. Геометрические параметры модели трех сопряженных полых цилиндров [24]

d_1	d_2	d_{2i}	d_3	d_{3i}	d_4	δ_{12}	δ_{23}
100	128,5	128,446	167,7	167,64	222,2	0,027	0,030

С целью демонстрации отсутствия каких-либо существенных отклонений в результатах КЭ-анализа, связанных с возможной недостаточностью плотности КЭ-сетки моделей, представленных выше, для данного примера (см. рис. 6) была рассмотрена модель со степенью

равномерного сгущения КЭ-сетки в 8 раз меньше исходной (рис. 7). Результаты анализа этой модели также внесены в табл. 6 и 7.

**Рис. 6.** Распределение тангенциальных напряжений в радиальном направлении трех сопряженных с натягом полых цилиндров**Рис. 7.** Распределение тангенциальных напряжений в модели (см. рис. 6) со степенью равномерного сгущения КЭ-сетки в 8 раз**Таблица 6.** Результаты расчета тангенциальных напряжений трех сопряженных с натягом цилиндров

Расчет	Тангенциальные напряжения на поверхности, МПа					
	d_1	d_2	d_{2i}	d_3	d_{3i}	d_4
Аналитическое решение	250,00	–	250,00	–	250,00	–
ANSYS	–	154,63	–	162,56	–	175,09
КЭ-модель SOL401	252,63	152,18	250,22	166,55	249,78	180,82
Отклонение, %	1,052	–1,61	0,088	2,45	–0,088	3,27
КЭ-модель SOL401 x8	251,635	152,55	249,66	166,82	249,47	181,01
Отклонение, %	0,654	–1,36	–0,224	2,62	–0,212	3,38

Таблица 7. Результаты расчета контактных давлений трех сопряженных с натягом цилиндров

Расчет	Контактное давление P_{s12} , МПа	Контактное давление P_{s23} , МПа
Аналитическое решение	25,00	20,60
КЭ-модель SOL401	24,75	20,41
Отклонение, %	-1	-0,922
КЭ-модель SOL401 x8	24,76	20,42
Отклонение, %	-0,96	-0,874

Заключение. Многоступенчатый нелинейный структурный тип анализа SOL401 позволяет проводить численные расчеты контактного взаимодействия осесимметричных тел на объемных (3D) моделях с малыми углами секторов $0^\circ 30' - 1^\circ$ моделируемых объектов, что кратко, а зачастую и на порядок сокращает временные затраты вычислительной техники. Получаемые при таком подходе результаты расчетов отличаются высокой степенью точности. Также в моделях полностью отсутствуют краевые эффекты.

Анализ контактного взаимодействия двух сопряженных тел одинаковой толщины с общей степенью толстостенности 0,22 показал, что погрешность в значениях тангенциальных напряжений находится в пределах от -0,46 до +0,63 %, а для аналогичной конструкции с общей степенью толстостенности 1 эта погрешность варьируется в пределах от -4,5 до +3,18 %.

Анализ трех сопряженных тел одинаковой толщины с общей степенью толстостенности также 0,22 показал,

что погрешность в значениях тангенциальных напряжений находится в пределах от -0,075 до +0,238 %, а погрешность в значениях контактных давлений составляет не более 2,421 %.

Анализ контактного взаимодействия трех разнотолщинных тел с общей степенью толстостенности 1,222 показал, что погрешность в значениях тангенциальных напряжений находится в пределах от -0,088 до +1,052 %, а погрешность в значениях контактных давлений составляет не более -1 % от точного теоретического решения. Сравнение результатов анализа тангенциальных напряжений по двум численным методам расчета этой конструкции (ANSYS [24] и предлагаемого в данной работе) также показало высокую точность и оказалось в пределах от -1,61 до +3,27 %. Отметим, что равномерное сгущение КЭ-сетки в этом примере [24] в 8 раз также не внесло каких-либо существенных изменений в значения тангенциальных напряжений и контактных давлений.

Таблица 8. Условные обозначения

P	Внутреннее давление, МПа
P_0	Внешнее давление, МПа
σ_θ	Тангенциальное напряжение в телах, МПа
$\sigma_{\theta 1}$	Результирующее тангенциальное напряжение в теле (полом цилиндра) 1, МПа
$\sigma_{\theta 2}$	Результирующее тангенциальное напряжение в теле (полом цилиндра) 2, МПа
$\sigma_{\theta 3}$	Результирующее тангенциальное напряжение в теле (полом цилиндра) 3, МПа
d_1	Внутренний диаметр тела (полого цилиндра) 1, мм
d_2	Внешний диаметр тела (полого цилиндра) 1 и внутренний диаметр тела (полого цилиндра) 2, мм
d_3	Внешний диаметр тела (полого цилиндра) 2 и внутренний диаметр тела (полого цилиндра) 3, мм
d_4	Внешний диаметр тела (полого цилиндра) 3, мм
r_1	Внутренний радиус тела (полого цилиндра) 1, мм
r_2	Внешний радиус тела (полого цилиндра) 1 и внутренний радиус тела (полого цилиндра) 2, мм
r_3	Внешний радиус тела (полого цилиндра) 2 и внутренний радиус тела (полого цилиндра) 3, мм
r_4	Внешний радиус тела (полого цилиндра) 3, мм
P_{s12}	Контактное давление между телами (полыми цилиндрами) 1 и 2, МПа
P_{s23}	Контактное давление между телами (полыми цилиндрами) 2 и 3, МПа
U_{r1o}	Радиальное перемещение на внешней поверхности тела (полого цилиндра) 1, мм
U_{r2i}	Радиальное перемещение на внутренней поверхности тела (полого цилиндра) 2, мм
δ_{12}	Величина натяга между телами (полыми цилиндрами) 1 и 2, мм
U_{r2o}	Радиальное перемещение на внешней поверхности тела (полого цилиндра) 2, мм
U_{r3i}	Радиальное перемещение на внутренней поверхности тела (полого цилиндра) 3, мм
δ_{23}	Величина натяга между телами (полыми цилиндрами) 2 и 3, мм
ν	Коэффициент Пуассона

Литература

1. Миронова Л.И., Гуров В.А. Модели осесимметричного упругопластического состояния кольца или цилиндра в методах оптимального проектирования оболочечных конструкций // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2014. № 2. С. 69-74.
2. Бикбулатов А.Л., Багманов Р.Р., Гумеров К.М. Особенности напряженно-деформированного состояния двухслойных труб в условиях нестационарных термомеханических воздействий // Проблемы сбора, подготовки и транспорта нефти и нефтепродуктов. 2015. № 2. С. 120-126.
3. Геча Э.Я., Любан И.Б. Радиальная жесткость многослойных цилиндрических конструкций // Фотон-экспресс. 2006. № 6. С. 163-171.
4. Исаев А.Н., Лебедев А.Р. Исследование контактных напряжений в процессе локального кольцевого упругопластического деформирования составного цилиндра // Advanced Engineering Research. 2012. V. 12, № 22. P. 25-31.
5. Корчак Е.С., Андреев А.А. Исследование влияния процесса автофреттирования на прочностные характеристики многослойных контейнеров промышленных газостатов // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні. 2015. № 1. С. 57-61.
6. Егоров А.В. Формы возможных отслоений лайнера в металлокомпозитном баллоне высокого давления // Инженерный журнал: наука и инновации. 2019. № 8 (92). С. 1-12.
7. Seifi R. Maximizing working pressure of autofretted three-layer compound cylinders with considering Bauschinger effect and reverse yielding // Meccanica. 2018. № 53. P. 2485-2501.
8. Sharifi M., Hematiyan M.R., Banan R.A. New Analytical Solution for Optimum Design of Shrink-Fit Multi-Layer Compound Cylinders // Proceedings of the ASME 2012 Pressure Vessels and Piping Conference. Volume 5: High-Pressure Technology; ASME NDE Division. (Toronto, Ontario, Canada. July 15-19, 2012 г.). Toronto, 2012. P. 75-81.
9. Suvarna Y., Ravisekhar B. Modeling and analysis of multi-layer high-pressure vessels // International Journal of Science technology and Management. 2016. № 9. P. 52-60.
10. Zhang Q.G. Analytical solution of the thermo-mechanical stresses in a multilayered composite pressure vessel considering the influence of the closed ends // International Journal of Pressure Vessels and Piping. 2012. № 98. P. 102-110.
11. Bai Z. Contact Pressure Algorithm of Multi-Layer Interference Fit Considering Centrifugal Force and Temperature Gradient // Applied Sciences. 2018. № 8 (5). P. 1-12.
12. Brazenas A., Vaiciulis D. Determination of stresses and strains in two-layer mechanically inhomogeneous pipe subjected to internal pressure at elastic plastic loading // Mechanika. 2009. V. 80, № 6. P. 12-17.
13. Farshi Karimi Morvarid. Optimum Autofrettage and Shrink-Fit Combination in Multi-Layer Cylinders // Journal of Pressure Vessel Technology. 2006. V. 128. P. 196-200.
14. Kumar N. Optimum autofrettage pressure and shrink-fit combination for minimum stress in multilayer pressure vessel // International Journal of Engineering Science & Technology. 2011. V. 3, № 5. P. 4020-4030.
15. Pimshtein P.G. Strength of multilayer high-pressure vessels // Chem Petrol Eng. 1968. № 4. P. 574-578.
16. Vedeld K., Sollund H.A. Stresses in Heated Pressurized Multi-Layer Cylinders in Generalized Plane Strain Conditions // International Journal of Pressure Vessels and Piping. 2014. V. 120-121. P. 27-35.
17. Qiu J., Zhou M. Analytical Solution for Interference Fit for Multi-Layer Thick-Walled Cylinders and the Application in Crankshaft Bearing Design // Applied Sciences. 2016. № 6. № 167. P. 1-20.
18. Пожарский Д.А. Контактная задача для полого цилиндра // Прикладная математика и механика. 2017. Т. 81, № 6. С. 727-733.
19. Бабайцев А.В., Бурцев А.Ю., Рабинский Л.Н., Соляев Ю.О. Методика приближенной оценки напряжений в толстостенной осесимметричной композитной конструкции // Труды МАИ. 2019. № 107. С. 4.
20. Пожарский Д.А. Периодические контактные и смешанные задачи теории упругости (обзор) // Изв. высш. учеб. заведений. Северо - Кавказский регион. Сер. Естественные науки. 2021. № 2 (210). С. 22-33.
21. Гордеев К.А., Еловенко Д.А. Метод моделирования НДС многослойных цилиндрических конструкций под давлением, собранных с межслойными натягами // Модели инновационных решений повышения конкурентоспособности Отечественной науки: сб. ст. Всерос. науч.-практической конф. с междунар. участием (Оренбург, 28 окт. 2022 г.). Уфа, 2022. С. 21-28.
22. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости М.: Наука, 1975. 576 с.
23. Hareram Lohar. Stress analysis and Burst pressure determination of two layer compound pressure vessel // International Journal of Engineering Science and Technology (IJEST). 2013. V. 5, № 2. P. 349-353.
24. Ayub A. Miraje, Sunil A. Patil. Optimum thickness of three-layer shrink fitted compound cylinder for uniform stress distribution // International Journal of Advances in Engineering & Technology. May 2012. V. 3, iss. 2. P. 591-605.

References

1. Mironova L.I., Gurov V.A. Models of axisymmetric elastoplastic state of a ring or cylinder in methods of optimal design of shell structures // Engineering and Automation Problems. 2014. № 2. P. 69-74.
2. Bikbulatov A.L., Bagmanov R.R., Gumerov K.M. Features of the stress-strain state of two-layer pipes under conditions of non-stationary thermomechanical effects // Problems of Gathering, Treatment and Transportation of Oil and Oil Products. 2015. № 2. P. 120-126.
3. Gecha E.Y.A., Lyuban I.B. Radial stiffness of multilayer cylindrical structures // Foton-ekspress. 2006. № 6. P. 163-171.
4. Isaev A.N., Lebedev A.R. Investigation of contact stresses in the process of local annular elastoplastic deformation of a compound cylinder // Advanced Engineering Research. 2012. V. 12, № 22. P. 25-31.
5. Korchak E.S., Andreev A.A. Investigation of the influence of the autofrettage process on the strength characteristics of multilayer containers of industrial gasostats // New materials and technologies in metallurgy and machine building. 2015. № 1. P. 57-61.
6. Egorov A.V. Forms of possible liner delaminations in a metal-composite high-pressure cylinder // Engineering Journal: Science and Innovation. 2019. № 8 (92). P. 1-12.
7. Seifi R. Maximizing working pressure of autofretted three-layer compound cylinders with considering Bauschinger effect and reverse yielding // Meccanica. 2018. № 53. P. 2485-2501.
8. Sharifi M., Hematiyan M.R., Banan R.A. New Analytical Solution for Optimum Design of Shrink-Fit Multi-Layer Compound Cylinders // Proceedings of the ASME 2012 Pressure Vessels and Piping Conference. Volume 5: High-Pressure Technology; ASME NDE Division. (Toronto, Ontario, Canada. July 15-19, 2012 г.). Toronto, 2012. P. 75-81.

9. Suvarna Y., Ravisekhar B. Modeling and analysis of multi-layer high-pressure vessels // *International Journal of Science technology and Management*. 2016. № 9. P. 52-60.
10. Zhang Q.G. Analytical solution of the thermo-mechanical stresses in a multilayered composite pressure vessel considering the influence of the closed ends // *International Journal of Pressure Vessels and Piping*. 2012. № 98. P. 102-110.
11. Bai Z. Contact Pressure Algorithm of Multi-Layer Interference Fit Considering Centrifugal Force and Temperature Gradient // *Applied Sciences*. 2018. № 8 (5). P. 1-12.
12. Brazenas A., Vaiciulis D. Determination of stresses and strains in two-layer mechanically inhomogeneous pipe subjected to internal pressure at elastic plastic loading // *Mechanika*. 2009. V. 80, № 6. P. 12-17.
13. Farshi Karimi Morvarid. Optimum Autofrettage and Shrink-Fit Combination in Multi-Layer Cylinders // *Journal of Pressure Vessel Technology*. 2006. V. 128. P. 196-200.
14. Kumar N. Optimum autofrettage pressure and shrink-fit combination for minimum stress in multilayer pressure vessel // *International Journal of Engineering Science & Technology*. 2011. V. 3, № 5. P. 4020-4030.
15. Pimshtein P.G. Strength of multilayer high-pressure vessels // *Chem Petrol Eng*. 1968. № 4. P. 574-578.
16. Vedeld K., Sollund H.A. Stresses in Heated Pressurized Multi-Layer Cylinders in Generalized Plane Strain Conditions // *International Journal of Pressure Vessels and Piping*. 2014. V. 120-121. P. 27-35.
17. Qiu J., Zhou M. Analytical Solution for Interference Fit for Multi-Layer Thick-Walled Cylinders and the Application in Crankshaft Bearing Design // *Applied Sciences*. 2016. № 6. № 167. P. 1-20.
18. Pozharskij D.A. Contact problem for a hollow cylinder // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2017. V. 81, № 6. P. 727-733.
19. Babajcev A.V., Burcev A.YU., Rabinskij L.N., Solyaev YU.O. A technique for approximate stresses evaluation in a thick-wall composite axisymmetric structure // *Trudy MAI*. 2019. № 107. P. 4.
20. Pozharskij D.A. Periodic contact and mixed problems of the elasticity theory (review) // *Bulletin of higher education institutes. North-Caucasian Region. Natural science*. 2021. № 2 (210). P. 22-33.
21. Gordeev K.A., Elovenco D.A. Method for modeling SSS of multilayer cylindrical structures under pressure assembled with interlayer tensions // *Modeli innovacionnyh reshenij povysheniya konkurentosposobnosti Otechestvennoj nauki: sb. st. Vseros. nauch.-prakticheskoy konf. s mezhdunar. uchastiem (Orenburg, 28 okt. 2022 g.)*. Ufa, 2022. P. 21-28.
22. Timoshenko S.P., Gud'er Dzh. *Theory of elasticity*. M.: Nauka, 1975. 576 p.
23. Hareram Lohar. Stress analysis and Burst pressure determination of two layer compound pressure vessel // *International Journal of Engineering Science and Technology (IJEST)*. 2013. V. 5, № 2. P. 349-353.
24. Ayub A. Miraje, Sunil A. Patil. Optimum thickness of three-layer shrink fitted compound cylinder for uniform stress distribution // *International Journal of Advances in Engineering & Technology*. May 2012. V. 3, iss. 2. P. 591-605.