

ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ И МАШИНОСТРОЕНИЯ

УДК 519.71, 629.4.015, 62-752, 534.015

DOI: 10.18324/2077-5415-2024-1-10-20

Формирование динамических эффектов в механических колебательных системах в рамках концепции обобщенного рычага с учетом дополнительных кинематических связей

А.В. Елисеев^{1a}, И.С. Ситов^{2b}, Н.К. Кузнецов^{3c}¹ Иркутский государственный университет путей сообщения, ул. Чернышевского, 15, Иркутск, Россия² Братский государственный университет, ул. Макаренко, 40, Братск, Россия³ Иркутский национальный исследовательский технический университет, ул. Лермонтова, 83, Иркутск, Россия^a eavsh@ya.ru, ^b sitov@yandex.ru, ^c knik@istu.edu^a <https://orcid.org/0000-0003-0222-2507>, ^b <https://orcid.org/0000-0001-6785-632X>, ^c <https://orcid.org/0000-0002-3083-0182>

Статья поступила 27.11.2023, принята 10.02.2024

В целях обеспечения безопасности технических объектов транспортного и технологического назначения развивается системный подход к разработке структурных математических моделей для решения задач оценки, формирования и коррекции динамических эффектов, вызываемых интенсивными внешними нагрузками с учетом дополнительных кинематических связей. Основой используемых методов структурного математического моделирования служат механические колебательные системы, отображающие существенные свойства технических объектов в условиях связанных кинематических возмущений. В рамках структурного математического моделирования механической колебательной системе, рассматриваемой в качестве расчетной схемы технического объекта, ставится в соответствие структурная схема эквивалентной в динамическом отношении системы автоматического управления; свойства механической колебательной системы оцениваются на основе совокупности передаточных функций, отображающих рычажные связи между входными и выходными сигналами. В качестве модельного примера рассматривается механическая колебательная система с тремя степенями свободы, совершающая малые вынужденные колебания относительно положения статического равновесия. Решается задача формирования эффекта сближения частот, обнуляющих амплитуды колебаний точек системы, с собственными частотами путем варьирования коэффициентов связности кинематических возмущений. На основе экстремальных свойств функций, представляющих собой нормировку амплитудно-частотных характеристик, разработан нестандартный подход к определению критических коэффициентов связности, обеспечивающих сближение собственных частот системы с частотами, обнуляющими амплитуды колебаний точек объекта, динамическое состояние которого оценивается. Предложена новая аналитическая характеристика восприимчивости механической колебательной системы к совокупности внешних возмущений, связанная с эффектами совмещения собственных частот системы с частотами, обнуляющими амплитуды колебания элементов. Представлены результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: методы структурного математического моделирования; механическая колебательная система; передаточные функции; динамические состояния; рычажные связи; связанные кинематические возмущения; динамические инварианты; обобщенный рычаг; динамическое гашение; динамические эффекты.

Formation of dynamic effects in mechanical oscillatory systems within the framework of the generalized lever concept taking into account additional kinematic ties

A.V. Eliseev^{1a}, I.S. Sitov^{2b}, N.K. Kuznetsov^{3c}¹ Irkutsk State Transport University; 15, Chernyshevsky St., Irkutsk, Russia² Bratsk State University; 40, Makarenko St., Bratsk, Russia³ Irkutsk National Research Technical University; 83, Lermontov St., Irkutsk, Russia^a eavsh@ya.ru, ^b sitov@yandex.ru, ^c knik@istu.edu^a <https://orcid.org/0000-0003-0222-2507>, ^b <https://orcid.org/0000-0001-6785-632X>, ^c <https://orcid.org/0000-0002-3083-0182>

Received 27.11.2023, accepted 10.02.2024

In order to ensure the safety of technical objects of transport and technological purposes, a systematic approach to the development of structural mathematical models for solving problems of assessment, formation and correction of dynamic effects caused by intense external loads, taking into account additional kinematic connections, is being developed. The basis of the structural mathematical modeling methods used are mechanical oscillatory systems that display the essential properties of technical objects in conditions of coherent

kinematic disturbances. Within the framework of structural mathematical modeling of a mechanical oscillatory system, considered as a design scheme of a technical object, a structural scheme of an automatic control system equivalent in dynamic terms is put into correspondence; the properties of a mechanical oscillatory system are evaluated on the basis of a combination of transfer functions displaying lever connections between input and output signals. As a model example, a mechanical oscillatory system with three degrees of freedom that performs small forced oscillations relative to the static equilibrium position is considered. The problem of forming the effect of convergence of frequencies, zeroing the amplitudes of oscillations of points of the system, with natural frequencies by varying the coefficients of connectivity of kinematic disturbances is solved. Based on the extreme properties of functions representing the normalization of amplitude-frequency characteristics, a non-standard approach has been developed to determine the critical connectivity coefficients that ensure the convergence of the natural frequencies of the system with frequencies that reset the oscillation amplitudes of the points of the object whose dynamic state is evaluated. A new analytical characteristic of the susceptibility of a mechanical oscillatory system to a set of external disturbances is proposed, related to the effects of combining the natural frequencies of the system with frequencies that reset the amplitudes of the oscillation of the elements. The results of numerical experiments are presented.

Keywords: methods of structural mathematical modeling; mechanical oscillatory system; transfer functions; dynamic states; lever connections; connected kinematic disturbances; dynamic invariants; generalized lever; dynamic damping; dynamic effects.

Введение. В настоящее время значительное внимание обращают на себя вопросы обеспечения безопасности технических объектов, находящихся в условиях интенсивных вибрационных нагрузений [1–7]. С точки зрения системного подхода, вопросы безопасности технических объектов отличаются большой сложностью. Ряд вопросов безопасности технических объектов, находящихся в условиях интенсивных нагрузений, может быть сведен к задачам динамики машин, вибрационной защиты и виброизоляции, задачам обеспечения динамического качества взаимодействий элементов вибрационных технологических машин [8–13].

Наравне с задачами безопасности, направленными на выявление и устранение опасных или вредных эффектов, могут быть рассмотрены двойственные задачи, которые также связаны с интенсивными вибрационными нагрузениями, но направлены на выявление и формирование полезных эффектов, происходящих в технических объектах в процессе вибрационных взаимодействий. Примерами, представляющими большое значение для вибрационных технологий, служат процессы вибрационной транспортировки, упрочнения, сепарации материалов, разделения сыпучих сред на фракции, ориентации деталей в процессе сборки и др. [14–17]. Можно отметить, что и вопросы, связанные с устранением вредных эффектов, и вопросы, связанные с обеспечением полезных эффектов, реализующихся в условиях вибрационных нагрузений, могут быть охвачены задачами оценки, формирования, коррекции управления динамическими состояниями [18–20].

Решение широкого класса задач оценки, формирования и коррекции динамических состояний технических объектов в условиях вибрационных нагрузений предполагает развитие единой методологической базы системных представлений [21–27]. Для динамических взаимодействий элементов технических объектов получили распространение расчетные схемы в виде механических колебательных систем с конечным числом степеней свободы. На начальных этапах исследования для ряда технических объектов, находящихся в условиях интенсивных вибрационных нагрузений, можно полагать, что рассматриваемые колебания малы и происходят около положений статического равновесия или установившихся форм движений.

Одной из фундаментальных проблем системного анализа технических объектов является моделирование вынужденных форм движения, в частности, которые реализуются в условиях связанных возмущений [28]. Существенное значение в моделировании вынужденных движений технических объектов имеют внешние синфазные гармонические колебания. С учетом значимости установившихся стационарных режимов вибрационных взаимодействий обращают на себя внимание динамические состояния в виде совокупности малых вынужденных колебаний точек. В качестве базовых критериев оценки динамических состояний технических объектов могут быть использованы характеристики рычажных связей, представляющие собой отношения амплитуд колебаний точек объекта, и амплитуд колебаний точек опорных поверхностей, выполняющих роль внешних связанных кинематических возмущений [29].

В рамках методологии структурного математического моделирования рычажные связи, реализующиеся в механической колебательной системе, могут быть представлены передаточными функциями, для которых входными сигналами служат колебания опорных поверхностей, а выходными — колебания точек объектов [30]. Значения амплитудно-частотных характеристик, принимающие положительные, отрицательные, нулевые и бесконечные значения, могут быть интерпретированы как рычажные отношения рычагов 1-го (двуплечий рычаг) или 2-го (одноплечий рычаг) рода, а также с помощью характеристик вырожденных рычагов, обладающими плечами нулевой или бесконечной длины. Рычажные отношения, интерпретирующие значения амплитудно-частотных характеристик, определяются частотой внешних возмущений и представляют собой оценку динамических состояний системы. Совокупность динамических состояний объектов может быть охарактеризована множеством амплитудно-частотных характеристик, включающих коэффициенты связности внешних кинематических возмущений.

Обобщенное представление о разнообразии амплитудно-частотных характеристик, зависящих от коэффициентов связности, может быть получено на основе динамических инвариантов, отображающих основные свойства в виде числа положительных и отрицательных ветвей амплитудно-частотных характеристик, а также числа частот, являющихся либо

нулями амплитудно-частотных характеристик, либо точками [31–34]. Количества указанных ветвей и частот представляют собой своеобразные интегральные характеристики динамических инвариантов.

Изменение коэффициентов связности кинематических возмущений может приводить к сближению частот обнуления и собственных частот, что представляет собой специфический эффект, который может отображаться с помощью распределения динамических инвариантов по множеству параметров системы. В работах [34; 35] построены карты динамических инвариантов, отображающие распределение обобщенных динамических состояний в зависимости от коэффициента связности внешних возмущений и координат точек объекта.

Наравне с методами, использующими динамические инварианты, предложен нестандартный подход, заключающийся в том, что совокупности динамических состояний, зависящих от коэффициентов связности, могут быть представлены проекциями значений амплитудно-частотных характеристик на дуги окружности, которые интерпретируются как обобщенные рычажные связи или условные обобщенные рычаги, представляющие собой нормирование совокупности рычажных отношений, зависящей от частот внешних возмущений [35].

В рамках развиваемой концепции, учитывающей рычажные отношения, интерес представляет возможность формирования различных динамических эффектов. В работе [35] показано, что эффекты сближения частоты, обнуляющей координату объекта, с собственной частотой системы могут быть выражены через обобщенные представления о рычажных связях.

Вместе с тем, нестандартный подход к определению критических значений коэффициентов связности, обеспечивающих реализацию эффекта сближения частот, в рамках представлений об обобщенных рычажных связях не получил должной детализации.

Статья посвящена разработке системных представлений о рычажных связях в формировании динамических эффектов, проявляющихся в результате предельного сближения частоты, обнуляющей амплитуду колебаний объекта, и собственных частот путем варьирования коэффициентов связности внешних кинематических возмущений.

1. Основные положения. Постановка задачи.

Рассматривается механическая колебательная система с тремя степенями свободы, образованная двумя твердыми телами в виде стержней, установленными с помощью упругих элементов на опорные поверхности, которые совершают связные синфазные гармонические колебания. Полагается, что кинематические возмущения со стороны опорных поверхностей вызывают вертикальные плоские малые установившиеся гармонические колебания твердых тел относительно положений статических равновесий (рис. 1).

В общем случае для фиксированных коэффициентов связности кинематические возмущения в зависимости от частоты колебаний способны формировать в выбранной точке системы различные режимы. Возможны режимы динамического гашения, когда

амплитуда колебания в выбранной точке системы становится равной нулю. Возможен резонанс, когда частота внешнего возмущения совпадает с собственной частотой системы, и амплитуда колебания координаты не ограничена. В качестве параметров движений рассматриваются частоты и коэффициенты связности внешних кинематических возмущений со стороны опорных поверхностей.

В рамках представлений о рычажных связях динамические состояния отображаются с помощью виртуальных рычагов; режимы динамического гашения или режимы обнуления амплитуд колебаний представляются виртуальными рычагами с нулевыми выходными плечами и нулевыми рычажными отношениями; режим резонанса интерпретируется в виде виртуального рычага с бесконечным плечом и бесконечным рычажным отношением.

Полагается, что внешние кинематические возмущения могут быть подобраны таким образом, что реализуется сближение частоты, обнуляющей амплитуду колебания выбранной координаты, и собственной частоты.

Задача заключается в определении коэффициентов связности кинематических возмущений, которые бы позволили обеспечить совпадение собственных частот и частот, обнуляющих амплитуды колебаний координаты системы, и сформировать представления о параметрах виртуального рычага, отображающего динамическое состояние системы.

II. Математическая модель. Механическая колебательная система образована двумя твердыми телами с массами M_1, M_2 и моментами инерции J_1, J_2 ; размеры плеч для твердых тел составляют l_{11}, l_{12} и l_{21}, l_{22} (рис. 1). Твердые тела в точках A_1, A_2, A_3 установлены на упругие элементы с жесткостями k_1, k_2, k_3 .

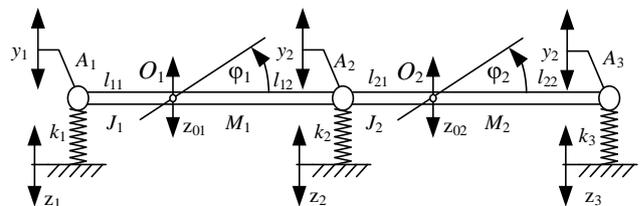


Рис. 1. Механическая колебательная система: z_1, z_2, z_3 — опорные поверхности; k_1, k_2, k_3 — упругие элементы; A_1A_2, A_2A_3 — твердые тела в виде стержней; A_2 — точка сочленения твердых тел A_1A_2, A_2A_3 (данная система рассматривается как предельная к системе, в которой стержни A_1A_2 и A_2A_3 соединены в точках A_2 и A_2 упругим элементом, жесткость которого устремлена к бесконечности)

В качестве координат твердых тел механической колебательной системы служат величины y_1, y_2, y_3 , отображающие смещения точек A_1, A_2, A_3 относительно положений статического равновесия. Система совершает малые вынужденные колебания под действием кинематических возмущений со стороны опорных поверхностей z_1, z_2, z_3 , представляющих собой синфазные гармонические возмущения, которые связаны между собой соотношениями:

$$z_2 = \gamma_2 z_1, \quad z_3 = \gamma_3 z_1, \quad (1)$$

где γ_2, γ_3 — коэффициенты связности. Для построения математической модели в рамках формализма уравнений Лагранжа 2-го рода выбирается система координат y_1, y_2, y_3 и $z_{01}, z_{02}, \phi_1, \phi_2$, где ϕ_1, ϕ_2 — малые углы поворотов, а z_{01}, z_{02} — малые смещения центров тяжести O_1 и O_2 твердых тел относительно положений статического равновесия. Координаты $\{y_i\}, i = 1..3$ и $\{z_{0i}, \phi_i\}, i = 1..2$ связаны между собой соотношениями:

$$z_{01} = a_1 y_1 + b_1 y_2, \quad (2) \quad \phi_1 = c_1 (y_2 - y_1), \quad (3)$$

$$z_{02} = a_2 y_2 + b_2 y_3, \quad (4) \quad \phi_2 = c_2 (y_3 - y_2), \quad (5)$$

Потенциальная и кинетическая энергии системы могут быть представлены выражениями:

$$\Pi = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} k_i (y_i - z_i)^2, \quad (6)$$

$$\Gamma = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} (M_i \dot{z}_{0i}^2 + J_i \dot{\phi}_i^2). \quad (7)$$

В матричном виде формулы (6), (7) имеют запись:

$$\Pi = \frac{1}{2} \langle K(y - z), (y - z) \rangle, \quad (8)$$

$$\Gamma = \frac{1}{2} \langle M \dot{z}_0, \dot{z}_0 \rangle + \frac{1}{2} \langle J \dot{\phi}, \dot{\phi} \rangle, \quad (9)$$

где $K = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix}$ — матрица коэффициентов жесткости;

$M = \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix}$ — матрица масс;

$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix}$ — матрица моментов инерции; $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$ — вектор внешних кинематических возмущений;

$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ — вектор координат системы; $z_0 = \begin{pmatrix} z_{01} \\ z_{02} \end{pmatrix}$ —

вектор смещений центров масс относительно положений статического равновесия; $\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$ —

вектор малых углов поворота; $\dot{\phi}, \dot{z}_0$ — производные соответствующих векторов.

Зависимости между векторами z, ϕ и y представляются выражениями:

$$z = Uy, \quad (10) \quad \phi = Vy, \quad (11)$$

где $U = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} -c_1 & c_1 & 0 \\ 0 & -c_2 & c_2 \end{pmatrix}$ — матрицы

перехода между координатами.

В системе координат $\{y_i\}$ потенциальная и кинетическая энергии могут быть представлены в виде:

$$\Pi = \frac{1}{2} \langle K(y - z), (y - z) \rangle, \quad (12)$$

$$\Gamma = \frac{1}{2} \langle (U^T M U + V^T J V) y, y \rangle. \quad (13)$$

Относительно вектора искомым перемещений y система дифференциальных уравнений Лагранжа 2-го рода принимает вид:

$$(U^T M U + V^T J V) \ddot{y} + Ky = K^T z. \quad (14)$$

После интегральных преобразований Лапласа с учетом нулевых начальных условий система дифференциальных уравнений (14) приводится к системе алгебраических:

$$((U^T M U + V^T J V) p^2 + K) \bar{y} = K^T \bar{z}, \quad (15)$$

где U^T, V^T и K^T — транспонированные матрицы для U, V, K ; $p = j\omega$ — комплексное число; $j = \sqrt{-1}$ — мнимая единица; значок « \ominus » над символом обозначает изображение Лапласа [36]. На основе известных методов [23] система уравнений (15) может быть представлена структурной схемой эквивалентной в динамическом отношении системы автоматического управления (рис. 2).

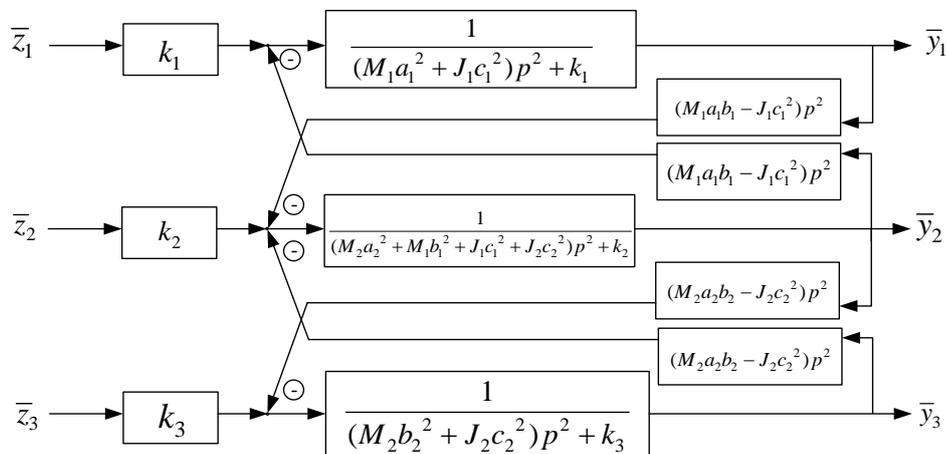


Рис. 2. Структурная схема механической колебательной системы (рис. 1)

На основе структурной схемы (рис. 2) могут быть построены передаточные функции, отображающие рычажные связи:

$$W_1(p) = \frac{\bar{y}_1}{\bar{z}_1} \Big|_{\bar{z}_1 \neq 0, \bar{z}_{i \neq 1} = 0}, \quad (16)$$

$$W_2(p) = \frac{\bar{y}_2}{\bar{z}_1} \Big|_{\bar{z}_2 \neq 0, \bar{z}_{i \neq 2} = 0}, \quad (17)$$

$$W_3(p) = \frac{\bar{y}_3}{\bar{z}_1} \Big|_{\bar{z}_3 \neq 0, \bar{z}_{i \neq 3} = 0}. \quad (18)$$

Выражения (16) – (18) с учетом условий связности (1) кинематических возмущений представляют собой параметрические семейства функций. Для фиксированных коэффициентов связности γ_2, γ_3 амплитудно-частотные характеристики передаточных функций (16) – (18) отображают динамические особенности рычажных связей с помощью

положительных и отрицательных ветвей, которые интерпретируются как рычаги 2-го или 1-го рода соответственно; нулями, которые отображают режимы обнуления амплитуд колебаний точек системы; разрывами 2-го рода, которые отображают резонансы (рис. 3).

Каждому значению амплитудно-частотной характеристики может быть поставлен в соответствие виртуальный рычаг с плечами, отношение которых равно значению амплитудно-частотной характеристики с учетом частоты и связности внешних возмущений. Варьирование коэффициентов связности приводит к изменению формы и длины условного обобщенного рычага, представляющего собой проекцию амплитудно-частотной характеристики на окружность [35]. Рычажные отношения, отображающие резонанс, проецируются в верхний полюс окружности, рычажные отношения, отображающие обнуление амплитуд колебаний обобщенных координат, проецируются в нижний полюс окружности.

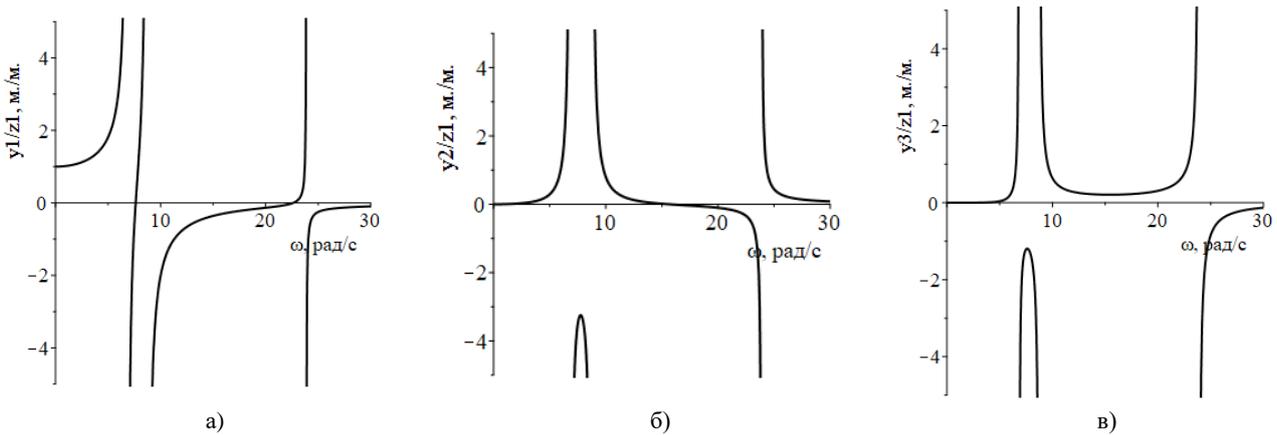


Рис. 3. Амплитудно-частотные характеристики: а — y_1/z_1 ; б — y_2/z_1 ; в — y_3/z_1 . Резонансы $\sigma_1 = 6.85$ рад/с, $\sigma_2 = 8.75$ рад/с, $\sigma_3 = 23.88$ рад/с. Для вычислительного эксперимента использовались данные: $M_1 = 10$ кг, $l_{11} = 1$ м, $l_{12} = 2$ м, $J_1 = 6$ кг·м², $M_2 = 11$ кг, $l_{21} = 2$ м, $l_{22} = 3$ м, $J_1 = 7$ кг·м², $k_1 = 300$ Н/м, $k_2 = 400$ Н/м, $k_3 = 500$ Н/м

В рамках развиваемых представлений об обобщенных рычажных связях значительный интерес представляет эффект сближения собственных частот с частотами, обеспечивающими обнуление амплитуд колебаний обобщенных координат системы.

III. Формирование эффекта сближения частоты обнуления с собственной частотой системы на основе обобщенных рычажных связей. Для фиксированной частоты ω значение амплитудно-частотной характеристики передаточной функции $W_i(j\omega)$ может быть спроецировано в точку $(X_i(\omega), Y_i(\omega))$ окружности $X^2 + (Y-1/2)^2 = 1/4$ посредством преобразования [35]:

$$X_i = \frac{W_i(j\omega)}{1 + W_i^2(j\omega)}, \quad (19) \quad Y_i = \frac{W_i^2(j\omega)}{1 + W_i^2(j\omega)}. \quad (20)$$

Преобразования (19), (20) переводят амплитудно-частотную характеристику (рис. 3) на окружность в связную совокупность дуг (рис. 4), отображающую рычажные отношения в виде ограниченной кривой конечной длины. Образы (рис. 4) отображения амплитудно-частотных характеристик на окружность представляют совокупность рычажных связей системы и могут быть названы условными обобщенными рычагами.

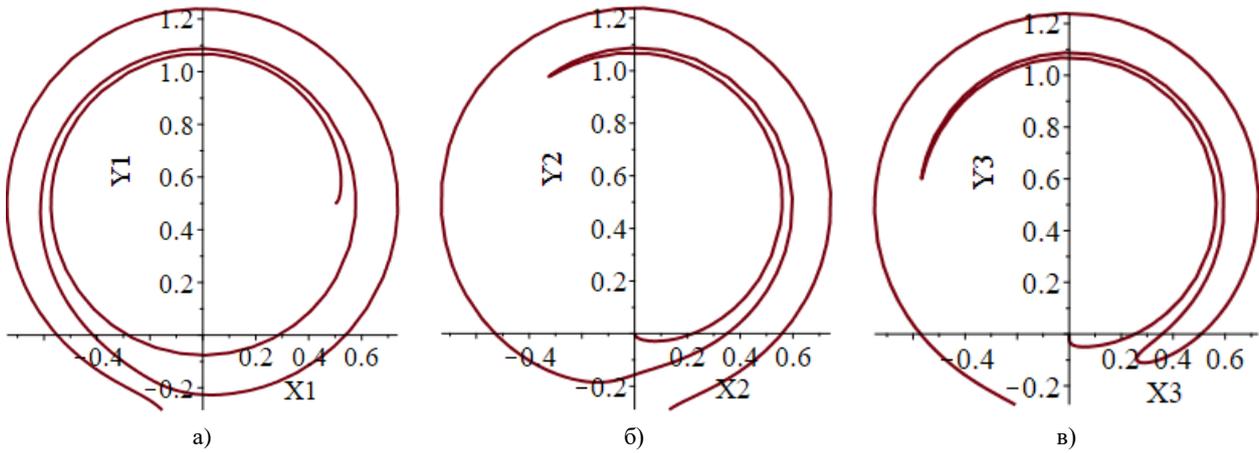


Рис. 4. Отображение амплитудно-частотных характеристик на окружность для коэффициентов связности: $\gamma_2 = 0, \gamma_3 = 0$: а — y_1/z_1 ; б — y_2/z_1 ; в — y_3/z_1 (для наглядности проекция на окружность развернута в виде спирали)

Преобразования (19), (20) отображают совокупность рычажных отношений, принимающих конечные положительные, нулевые и отрицательные значения, а также бесконечные значения, на окружность в виде полюсов и точек правых и левых полуокружностей. Значения амплитудно-частотных

характеристик, заданные на интервале частот, отображаются в дуги окружности.

Малая окрестность частот, включающая собственную частоту σ_i и частоту σ_0 , обнуляющую амплитуду колебаний координат системы, проецируется на дугу, длина которой близка к длине окружности (рис. 5).

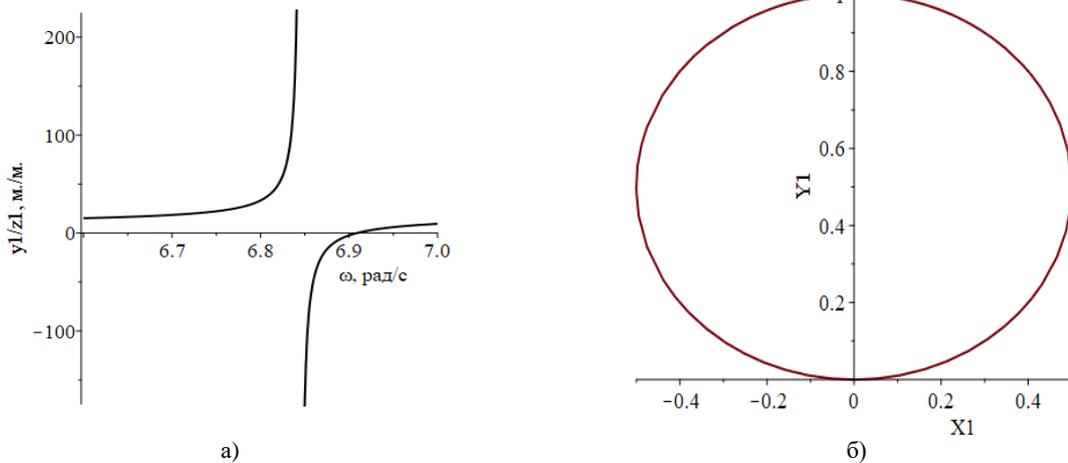


Рис. 5. Проекция значений, заданных в малой окрестности, на окружность: а — значения амплитудно-частотной характеристики в окрестности (6.6..7) рад/с собственной частоты $\sigma_1 = 6.85$ рад/с; б — окружность радиуса $R = 1/2$

Можно предположить, что для достаточно близких друг к другу собственной частоты σ_i и частоты σ_0 выполнено приближенное соотношение:

$$\int_{\sigma_k - \varepsilon_{ik}}^{\sigma_k + \varepsilon_{ik}} \sqrt{\left(\frac{\partial X_i}{\partial \omega}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y_i}{\partial \omega}\right)^2} d\omega \approx \pi, \quad (21)$$

где $\varepsilon_{ik} \ll 1$ — достаточно малые положительные числа; σ_k — k -я собственная частота; i — номер обобщенной координаты.

Для достаточно малых ε_{ik} приближенное равенство (21) можно использовать для нахождения коэффициента связности γ_3 , обеспечивающего

близость частоты σ_0 и собственной частоты σ_k , при некотором фиксированном γ_2 как аргумент решения задачи минимизации:

$$\gamma^{(ik)} = \arg \lim_{\substack{\varepsilon_{ik} \rightarrow 0 \\ \varepsilon_{ik} > 0}} \left(\inf_{\gamma_3} \varphi_{ik}(\gamma_3) \right), \quad (22)$$

$$\text{где } \varphi_{ik}(\gamma_3) = \left(\int_{\sigma_k - \varepsilon_{ik}}^{\sigma_k + \varepsilon_{ik}} \sqrt{\left(\frac{\partial X_i}{\partial \omega}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y_i}{\partial \omega}\right)^2} d\omega - \pi \right)^2.$$

Формально функция φ_{ik} может быть рассмотрена как функция двух параметров γ_2, γ_3 (рис. 6). В рамках

рассматриваемой задачи для упрощения полагается, что $\gamma_2 = 0$.

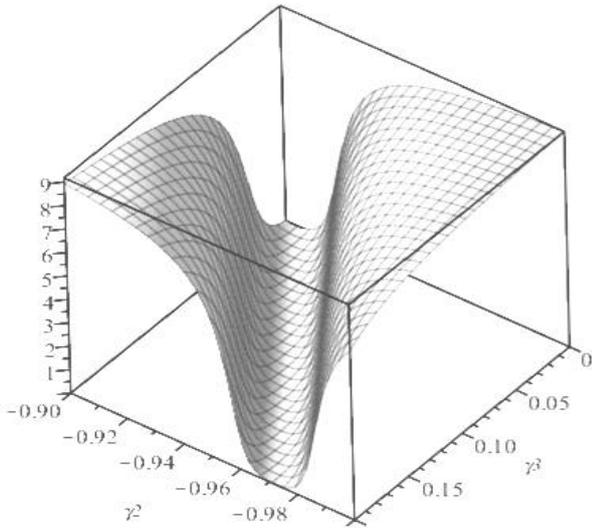
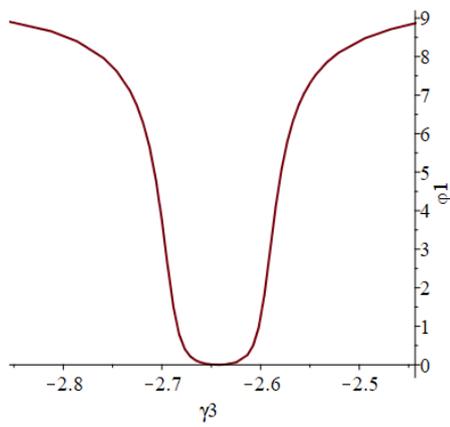


Рис. 6. Пример функции $\varphi(\gamma_2, \gamma_3)$ двух переменных

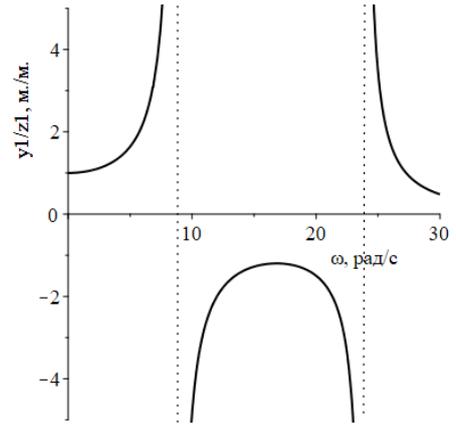
На основе решения задачи минимизации (22) обобщенной координате y_i , $i = 1..3$, и собственной частоте системы σ_k , $k = 1..3$ могут быть поставлены в соответствие критические коэффициенты связности $\gamma_3^{(ik)}$, формирующие эффект совмещения режима резонанса на частоте σ_k и режима обнуления амплитуды колебания координаты y_i .

IV. Определение критических коэффициентов связности. Фиксируется координата y_1 . На основе графического метода решения задачи (22) находятся критические коэффициенты $\gamma_3^{(11)}$, $\gamma_3^{(12)}$, $\gamma_3^{(13)}$, формирующие эффект взаимного устранения режима «обнуления» амплитуды колебания обобщенной координаты y_1 и резонанса.

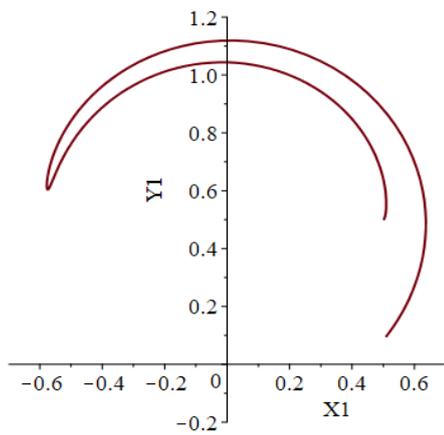
1. Для определения критического коэффициента связности $\gamma_3^{(11)}$, обеспечивающего совпадения σ_0 частоты обнуления с собственной частотой $\sigma_1 = 6.85$ рад/с, может быть построена функция $\varphi_{11}(\gamma_3)$, для которой аргументом является коэффициент связности γ_3 (рис. 7).



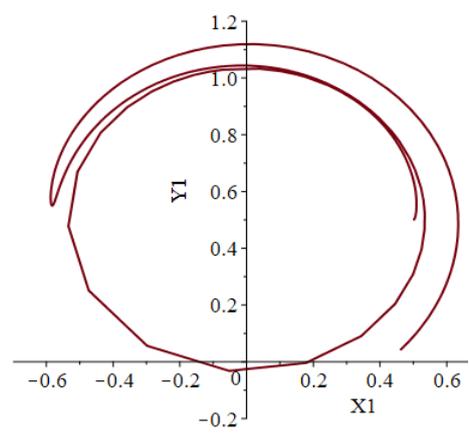
(а)



(б)



в)



г)

Рис. 7. Режим совмещения частоты «обнуления» с собственной частотой $\sigma_1 = 6.85$ рад/с для критического коэффициента связности $\gamma_3^{(11)} = -2.6423$; а — график функции $\varphi_{11}(\gamma_3)$; б — амплитудно-частотная характеристика для варианта совпадения частоты обнуления с собственной частотой $\sigma_1 = 6.85$ рад/с; в — обобщенный рычаг для критических коэффициентов связности $\gamma_2 = 0, \gamma_3 = -2.6423$; г — обобщенный рычаг для смещенного коэффициента связности $\gamma_3 = -2.3423$

Минимум функция $\varphi_{11}(\gamma_3)$ достигает в точке $\gamma_3^{(11)} = -2.6423$ (рис. 7, а). Соответствующая амплитудно-частотная характеристика имеет только два из трех разрывов 2-го рода (рис. 7, б). Разрыв 2-го рода на частоте $\sigma_1 = 6.85$ рад/с устранен в результате выбора критического параметра $\gamma_3 = -2.6423$, обеспечивающих совпадение частоты обнуления с собственной частотой. Обобщенный рычаг, соответствующий амплитудно-частотной характеристике (рис. 7, б), имеет особенную форму и длину (рис. 7, в) в сравнении с обобщенным рычагом для смещенного параметра $\gamma_3 = -2.3423$ (рис. 7, з). В частности, его длина меньше примерно на π .

Значение амплитудно-частотной характеристики передаточной функции составляет $W_1(j\sigma_1) \approx 3.12$.

2. Для определения критического коэффициента связности $\gamma_3^{(12)}$, обеспечивающего совпадение частоты обнуления с собственной частотой $\sigma_2 = 8.75$ рад/с, построена функция $\varphi_{12}(\gamma_3)$, нижняя граница значений которой позволяет определить критическое значение коэффициента связности $\gamma_3^{(12)}$ (рис. 8, а). Соответствующая амплитудно-частотная характеристика для коэффициента связности $\gamma_3^{(12)} = 1.4920$ (рис. 8, б) имеет только два разрыва 2-го рода вместо трех.

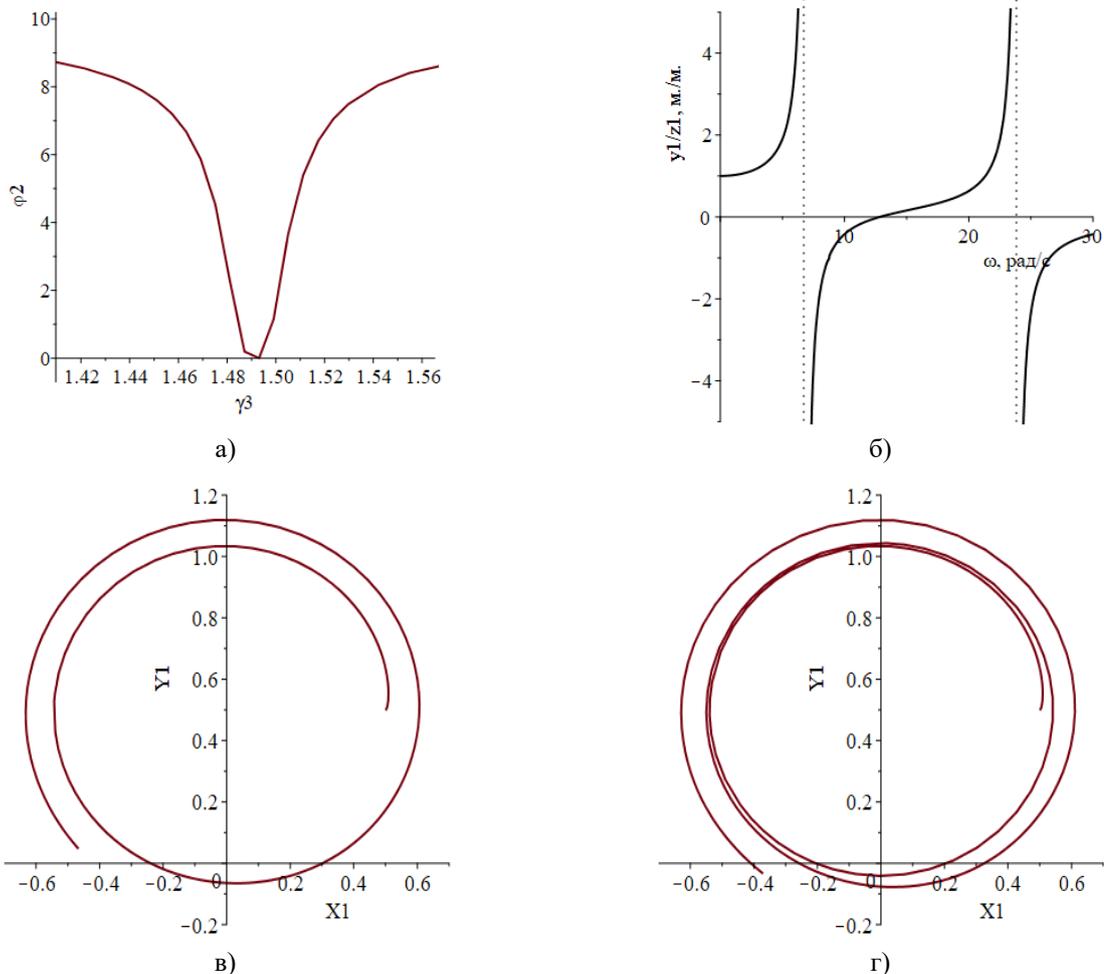


Рис. 8. Режим совмещения частоты обнуления с собственной частотой $\sigma_2 = 8.75$ рад/с для критического коэффициента связности $\gamma_3^{(12)} = 1.4920$; а — график функции $\varphi_{12}(\gamma_3)$; б — амплитудно-частотная характеристика для варианта совпадения частоты «обнуления» с собственной частотой σ_2 ; в — обобщенный рычаг для критических коэффициентов связности $\gamma_3^{(12)} = 1.4920$; г — обобщенный рычаг для смещенных коэффициентов связности $\gamma_3 = 0.992$

Разрыв 2-го рода на частоте $\sigma_2 = 8.75$ рад/с устранен в результате выбора критического коэффициента $\gamma_3^{(12)} = 1.4920$, обеспечивающего совпадение частоты обнуления с собственной частотой σ_2 . Обобщенный рычаг, соответствующий амплитудно-частотной характеристике (рис. 8, б), имеет особенную форму и длину (рис. 8, в) в сравнении с обобщенным рычагом для смещенных параметров, к примеру, $\gamma_3 = 0.992$ (рис. 8, з).

Значение рычажного отношения на частоте σ_2 для параметра $\gamma_3^{(12)} = 1.4920$ составляет $W_1(j\sigma_2) \approx -0.97$.

3. Разрыв 2-го рода на частоте $\sigma_3 = 23.88$ рад/с устраняется в результате выбора критического коэффициента $\gamma_3^{(13)} = -0.1003$, обеспечивающего совпадение частоты обнуления с собственной частотой σ_3 (рис. 9).

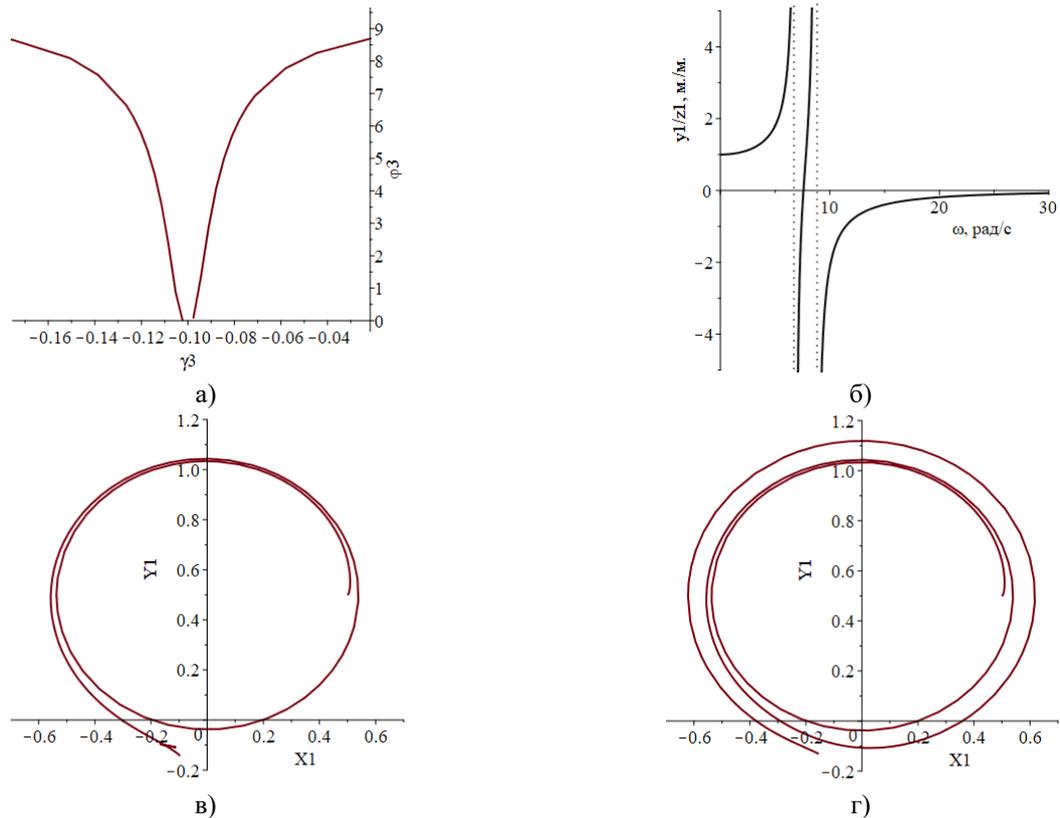


Рис. 9. Режим совмещения частот обнуления с собственной частотой $\sigma_3 = 23.88$ рад/с для критического коэффициента связности $\gamma_3^{(13)} = -0.1003$, $\gamma_2 = 0$; а — график функции $\varphi_{13}(\gamma_3)$; б — амплитудно-частотная характеристика для варианта совпадения частоты обнуления с собственной частотой $\sigma_3 = 23.88$ рад/с; в — обобщенный рычаг для критического коэффициента связности $\gamma_3^{(13)} = -0.1003$; г — обобщенный рычаг для смещенного коэффициента связности $\gamma_3^{(3)} = -0.11$

Для определения критического коэффициента связности $\gamma_3^{(13)}$, обеспечивающего совпадение частоты обнуления σ_0 с собственной частотой σ_3 , построена функция $\varphi_{13}(\gamma_3)$ (рис. 9, а). Обобщенный рычаг, соответствующий амплитудно-частотной характеристике (рис. 9, б), имеет особую форму и длину (рис. 9, в) в сравнении с обобщенным рычагом для смещенного параметра $\gamma_3 = -0.11$ (рис. 9, г). В результате выбора критического значения коэффициента связности $\gamma_3^{(13)} = -0.1003$ амплитудно-частотная характеристика отображает «погашенный» резонанс на собственной частоте σ_3 . Величина передаточного отношения на собственной частоте для внешнего возмущения с критическим коэффициентом связности $\gamma_3 = -0.1003$ составляет $W_1(j\sigma_3) \approx -0.123$.

Таким образом, найдены критические коэффициенты связности внешних кинематических возмущений, формирующие эффект предельного сближения частоты, обнуляющей амплитуду колебания координаты объекта, и собственной частоты. В рамках рычажных представлений данный эффект проявляется в возможности оценки динамического состояния системы на частоте собственных колебаний в виде виртуального рычага с рычажными отношениями 3.12, -0.97 и -0.123 .

V. Обобщенная характеристика разнообразия динамических состояний, вызванных варьированием внешних возмущений. Разрабатывается подход, основанный на своеобразном нормировании амплитудно-частотных характеристик,

используемых для анализа динамических состояний, с помощью их проекции на окружность. Результат проекции амплитудно-частотной характеристики на окружность может быть представлен как своеобразная «спираль», состоящая из «витков» и «петель». Форма и длина такой спирали определяется взаимным расположением частот обнуления и собственных частот системы. Если между двумя собственными частотами расположена одна частота обнуления, то интервал между собственными частотами проецируется на полный виток окружности. Если между собственными частотами отсутствует частота обнуления, то интервал между собственными частотами проецируется в петлю. В частности, если частоты обнуления чередуются с собственными частотами, и при переходе через собственные частоты и частоты обнуления амплитудно-частотная характеристика меняет знак, то проекция будет выглядеть в виде правильной спирали, состоящей только из полных витков, закрученных в одну сторону.

Включение в структуру амплитудно-частотной характеристики коэффициентов связности приводит к тому, что частоты обнуления перераспределяются относительно собственных частот, а спираль изменяет свою форму и длину. Эффект сближения частоты обнуления с собственной частотой проявляется в том, что один виток спирали устраняется, а длина спирали укорачивается. Можно полагать, что при определенных коэффициентах связности длина спирали примет

минимально возможную длину, а при других значениях коэффициентов связности — максимально возможную.

Отношение максимальной длины к минимальной характеризует то, каким образом внешние возмущения определяют разнообразие динамических состояний механической колебательной системы:

$$\Xi = \frac{\sup_{\gamma \in \Gamma} \left(\int_0^{\infty} \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial \omega}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial \omega}\right)^2} d\omega \right)}{\inf_{\gamma \in \Gamma} \left(\int_0^{\infty} \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial \omega}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial \omega}\right)^2} d\omega \right)}, \quad (23)$$

$$\text{где } X = \frac{W(j\omega, \gamma)}{1 + W^2(j\omega, \gamma)}, \quad Y = \frac{W^2(j\omega, \gamma)}{1 + W^2(j\omega, \gamma)}$$

где X — координаты проекции амплитудно-частотной характеристики $W(j\omega, \gamma)$, содержащей в своем составе коэффициент связности внешних возмущений γ , принимающий значения из некоторого множества Γ .

Заключение. В рамках методологии структурного математического моделирования разработан нестандартный подход к оценке, формированию и коррекции динамических состояний механической

колебательной системы на основе представлений о рычажных связях с учетом особенностей внешних кинематических возмущений.

Основой подхода служит нормированная оценка рычажных связей, отображающая разнообразие динамических взаимодействий, вызванных варьированием внешних кинематических возмущений.

Предложенный подход может быть обобщен на системы с учетом сил вязкого трения. При учете вязкого трения передаточная функция рычажной связи представляет собой комплексное число, образованное вещественной и мнимой частями. Вещественная и мнимая части, являющиеся вещественными дробно-рациональными функциями, могут быть спроецированы на окружность по аналогии с передаточной функцией системы без вязкого трения.

Наравне с эффектом сближения собственной частоты и частоты обнуления, можно полагать, существует и обратный эффект расщепления динамического состояния с конечными характеристиками на режим резонанса и режим обнуления, что предполагает дополнительные исследования.

Вычислительные эксперименты проведены с частичным использованием программного пакета [37].

Литература

- Harris S.M. Shock and Vibration Handbook. New York: McGraw - Hill Book So, 2009. 1168 p.
- Iwnicki Simon. Handbook of railway vehicle dynamics. CRC Press Taylor & Francis Group, 2006. 527 p.
- Clarence W. de Silva. Vibration: Fundamentals and Practice. Boca Raton, London, New York, Washington, D.C.: CRC Press, 2006. 1064 p.
- Moheimani S.O.Reza, Halim D., Fleming A.J. Spatial control of vibration: Theory and experiments. World Scientific Publishing Co Ptc. Ltd. Singapore, 2003. 417 p.
- Nessler P. Modelling and control of vibration in mechanical systems. Uppsala Univ. Sweden.
- Prenmont A. Vibration control of active structures: An introduction, Kluwer academic publisher. Dordrecht, 2002. 418 p.
- Rocard Y. General Dynamics of Vibrations. Parsi: Masson, 1949. 458 p.
- Антипов В.А. Подавление вибрации агрегатов и узлов транспортных систем: моногр. М.: Маршрут, 2006. 264 с.
- Асташев В.К., Бабицкий В.И., Вульфсон И.И. Динамика машин и управление машинами. М.: Машиностроение, 1988. 240 с.
- Karnovsky I.A., Lebed E. Theory of Vibration Protection, Springer International Publishing, Switzerland, 2016. 708 p.
- Banakh L., Kempner M. Vibrations of Mechanical Systems with Regular Structure, Berlin; Heidelberg: Springer, 2010. 262 p.
- Доронин С.В., Шокин Ю.И., Лепихин А.М., Москвичев В.В. Моделирование прочности и разрушения несущих конструкций технических систем. Новосибирск: Наука, 2005. 249 с.
- Хохлов А.А. Динамика сложных механических систем. М.: МИИТ, 2002. 172 с.
- Потураев В.Н., Надутый В.П., Юрченко А.В., Блюсс Б.А. Механика вибрационных машин с эластичными рабочими органами. Киев: Наукова думка, 1991. 152 с.
- Блехман И.И., Джанелидзе Г.Ю. Вибрационное перемещение. М.: Наука, 1964. 410 с.
- Быховский И.И. Основы теории вибрационной техники. М.: Машиностроение, 1968. 363 с.
- Вайсберг Л.А. Проектирование и расчет вибрационных грохотов. М.: Наука, 1986. 144 с.
- Елисеев А.В., Кузнецов Н.К., Миронов А.С. Системный подход в оценке динамических состояний технических объектов: элементы концепции динамических инвариантов // Вестн. Астраханского гос. технического ун-та. Сер. Управление, вычислительная техника и информатика. 2023. № 1. С. 16-24.
- Елисеев А.В., Вьюнг К.Ч. Некоторые возможности управления одномерным вибрационным полем технологической машины // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2016. № 1 (49). С. 33-41.
- Елисеев А.В., Мамаев Л.А., Ситов И.С. Некоторые подходы к обоснованию схемы инерционного возбуждения в технологических вибрационных машинах // Системы. Методы. Технологии. 2015. № 4 (28). С. 15-24.
- Eliseev S.V., Eliseev A.V. Theory of Oscillations. Structural Mathematical Modeling in Problems of Dynamics of Technical Objects. Series: Studies in Systems, Decision and Control. Springer International Publishing, Cham. 2020. V. 252. 521 p.
- Елисеев С.В. Прикладной системный анализ и структурное математическое моделирование (динамика транспортных и технологических машин: связность движений, вибрационные взаимодействия, рычажные связи): моногр. Иркутск: ИрГУПС, 2018. 692 с.
- Елисеев С.В., Елисеев А.В., Большаков Р.С., Хоменко А.П. Методология системного анализа в задачах оценки, формирования и управления динамическим состоянием технологических и транспортных машин. Новосибирск, 2021. 679 с.
- Большаков Р.С. Особенности вибрационных состояний транспортных и технологических машин. Динамические реакции и формы взаимодействия элементов. Новосибирск: Наука, 2020. 411 с.
- Елисеев А.В., Ситов И.С., Кузнецов Н.К. Системные подходы к оценке динамических состояний технических объектов при вибрационных нагружениях: частотные функции, динамические инварианты, методы регуляризации // Системы. Методы. Технологии. 2022. № 4 (56). С. 7-15.
- Белокобыльский С.В., Елисеев С.В., Кашуба В.Б. Прикладные задачи структурной теории виброзащитных систем. СПб.: Изд-во «Политехника», 2013. 363 с.
- Белокобыльский С.В., Елисеев С.В., Кашуба В.Б. Импедансные подходы как одна из форм оценки динамических свойств механических колебательных систем в структурном математическом моделировании // Системы. Методы. Технологии. 2015. № 4 (28). С. 7-15.
- Калинин В.Н. Четыре фундаментальные проблемы теории системных исследований // Труды Военно-космической акад. им. А.Ф. Можайского. 2012. № 637-2. С. 62-73.
- Eliseev A.V. Structural Mathematical Modeling Applications in Technological Machines and Transportation Vehicles. Hershey, PA: IGI Global, 2023.
- Коловский М.З. Автоматическое управление виброзащитными системами. М.: Наука, 1976. 320 с.
- Елисеев А.В., Кузнецов Н.К., Николаев А.В. Концепция динамических инвариантов в оценке структурных особенностей механических колебательных систем // Транспортное, горное и строительное машиностроение: наука и производство. 2022. № 15. С. 18-30.

32. Eliseev A.V., Mironov A.S. Evaluation of the set of dynamic features of mechanical oscillatory systems based on the map of dynamic invariants // Journal of Advanced Research in Technical Science. 2022. № 32. P. 62-69.
33. Елисеев А.В., Кузнецов Н.К. Технология структурного математического моделирования технических объектов в условиях вибрационного нагружения: формы взаимодействий и динамические инварианты // iPolytech Journal. 2022. V. 26, № 3. P. 368-385.
34. Елисеев А.В., Миронов А.С. Оценка динамических особенностей технических объектов в условиях связанных вибрационных нагружений на основе карты динамических инвариантов // Автоматизированное проектирование в машиностроении. 2022. № 13. С. 96-105.
35. Елисеев А.В., Кузнецов Н.К. Развитие рычажных представлений в оценке динамических состояний механических колебательных систем в условиях связанных вибрационных нагружений // Вестн. кибернетики. 2023. Т. 22, № 2. С. 75-86.
36. Лурье А.И. Операционное исчисление и применение в технических приложениях. М.: Наука. 1959. 368 с.
37. Mathematics-based software & services for education, engineering, and research. Maple. URL: <https://www.maplesoft.com> (дата обращения: 14.02.2023).
19. Eliseev A.V., Vyong K.CH. Some possibilities of controlling a one-dimensional vibration field of a technological machine // Modern technologies. System analysis. Modeling. 2016. № 1 (49). P. 33-41.
20. Eliseev A.V., Mamaev L.A., Sitov I.S. Some approaches to substantiating the scheme of inertial excitation in technological vibration machines // Systems. Methods. Technologies. 2015. № 4 (28). P. 15-24.
21. Eliseev S.V., Eliseev A.V. Theory of Oscillations. Structural Mathematical Modeling in Problems of Dynamics of Technical Objects. Series: Studies in Systems, Decision and Control. Springer International Publishing, Cham. 2020. V. 252. 521 p.
22. Eliseev S.V. Applied system analysis and structural mathematical modeling (dynamics of transport and technological machines: connectivity of movements, vibration interactions, lever connections): monogr. Irkutsk: IrGUPS, 2018. 692 p.
23. Eliseev S.V., Eliseev A.V., Bol'shakov R.S., Homenko A.P. Methodology of system analysis in the tasks of assessment, formation and management of the dynamic state of technological and transport machines. Novosibirsk, 2021. 679 p.
24. Bol'shakov R.S. Features of vibration states of transport and technological machines. Dynamic reactions and forms of inter-action of elements. Novosibirsk: Nauka, 2020. 411 p.
25. Eliseev A.V., Sitov I.S., Kuznecov N.K. System approaches to the assessment of dynamic states of technical objects under vibration loads: frequency functions, dynamic invariants, regularization methods // Systems. Methods. Technologies. 2022. № 4 (56). P. 7-15.
26. Belokobyl'skij S.V., Eliseev S.V., Kashuba V.B. Applied problems of the structural theory of vibration protection systems. SPb.: Izd-vo «Politekhnika», 2013. 363 p.
27. Belokobyl'skij S.V., Eliseev S.V., Kashuba V.B. Impedance approaches as one of the forms of evaluation of dynamic properties of mechanical oscillatory systems in structural mathematical modeling // Systems. Methods. Technologies. 2015. № 4 (28). S. 7-15.
28. Kalinin V.N. Four fundamental problems of the theory of system research // Trudy Voenno-kosmicheskoy akad. im. A.F. Mozhajskogo. 2012. № 637-2. P. 62-73.
29. Eliseev A.V. Structural Mathematical Modeling Applications in Technological Machines and Transportation Vehicles. Hershey, PA: IGI Global, 2023.
30. Kolovskij M.Z. Automatic control of vibration protection systems. M.: Nauka, 1976. 320 p.
31. Eliseev A.V., Kuznecov N.K., Nikolaev A.V. The concept of dynamic invariants in the assessment of structural features of mechanical oscillatory systems // Transport, mining and construction engineering: science and production. 2022. № 15. P. 18-30.
32. Eliseev A.V., Mironov A.S. Evaluation of the set of dynamic features of mechanical oscillatory systems based on the map of dynamic invariants // Journal of Advanced Research in Technical Science. 2022. № 32. P. 62-69.
33. Eliseev A.V., Kuznecov N.K. Technology of structural mathematical modeling of technical objects in conditions of vibration loading: forms of interactions and dynamic invariants // iPolytech Journal. 2022. V. 26, № 3. P. 368-385.
34. Eliseev A.V., Mironov A.S. Evaluation of dynamic features of technical objects under conditions of connected vibration loads based on the map of dynamic invariants // Avtomatizirovannoe proektirovanie v mashinostroenii. 2022. № 13. P. 96-105.
35. Eliseev A.V., Kuznecov N.K. Developing a level concept in assessment of the dynamic state of mechanical oscillatory systems subjected to connected vibrational loadings // Proceedings in Cybernetics. 2023. V. 22, № 2. P. 75-86.
36. Lur'e A.I. Operational calculus and application in technical application. M.: Nauka. 1959. 368 p.
37. Mathematics-based software & services for education, engineering, and research. Maple. URL: <https://www.maplesoft.com> (data obrashcheniya: 14.02.2023).

References

1. Harris S.M. Shock and Vibration Handbook. New York: McGraw - Hill Book So, 2009. 1168 p.
2. Iwnicki Simon. Handbook of railway vehicle dynamics. CRC Press Taylor & Francis Group, 2006. 527 p.
3. Clarence W. de Silva. Vibration: Fundamentals and Practice. Boca Raton, London, New York, Washington, D.C.: CRC Press, 2006. 1064 p.
4. Moheimani S.O.Reza, Halim D., Fleming A.J. Spatial control of vibration: Theory and experiments. World Scientific Publishing Co Ptc. Ltd. Singapore, 2003. 417 p.
5. Nessler P. Modelling and control of vibration in mechanical systems. Uppsala Univ. Sweden.
6. Prenmont A. Vibration control of active structures: An introduction, Kluwer academic publisher. Dordrecht, 2002. 418 p.
7. Rocard Y. General Dynamics of Vibrations. Parsi: Masson, 1949. 458 p.
8. Antipov V.A. Vibration suppression of aggregates and nodes of transport systems: monogr. M.: Marshrut, 2006. 264 p.
9. Astashev V.K., Babickij V.I., Vul'fon I.I. Dynamics of machines and control of machines. M.: Mashinostroenie, 1988. 240 p.
10. Karnovsky I.A., Lebed E. Theory of Vibration Protection, Springer International Publishing, Switzerland, 2016. 708 p.
11. Banakh L., Kempner M. Vibrations of Mechanical Systems with Regular Structure, Berlin; Heidelberg: Springer, 2010. 262 p.
12. Doronin S.V., SHokin YU.I., Lepihin A.M., Moskvichev V.V. Modeling of strength and destruction of bearing structures of technical systems. Novosibirsk: Nauka, 2005. 249 p.
13. Hohlov A.A. Dynamics of complex mechanical systems. M.: MIIT, 2002. 172 p.
14. Poturaev V.N., Nadutyj V.P., YUrchenko A.V., Blyuss B.A. Mechanics of vibrating machines with elastic working bodies. Kiev: Naukova dumka, 1991. 152 p.
15. Blekhman I.I., Dzhanelidze G.YU. Vibrational displacement. M.: Nauka, 1964. 410 p.
16. Byhovskij I.I. Fundamentals of the theory of vibration technology. M.: Mashinostroenie, 1968. 363 p.
17. Vajsberg L.A. Design and calculation of vibrating screens. M: Nauka, 1986. 144 p.
18. Eliseev A.V., Kuznecov N.K., Mironov A.S. A systematic approach in assessing the dynamic states of technical objects: elements of the concept of dynamic invariants // Vestnik of Astrakhan State Technical University. Series: Management, Computer Science and Informatics. 2023. № 1. P. 16-24.