УДК 536.24 DOI:10.18324/2077-5415-2023-2-80-85

Теплообмен при ламинарном течении жидкости в плоском канале

Ю.В. Видин[1a], Р.В. Казаков[1b], А.А. Федяев[2c] , Т.А. Григорьева[3d]

[1] Сибирский федеральный университет, пр. Свободный, 79, Красноярск, Россия
[2] Санкт-Петербургский государственный лесотехнический университет им. С.М. Кирова, пер. Институтский, 5, Санкт-Петербург, Россия
[3] Братский государственный университет, ул. Макаренко, 40, Братск, Россия
a zlobinsfu@mail.ru, b roman.v.kazakov@gmail.com, c vends1@mail.ru, d Umubrgu@mail.ru
a https://orcid.org/0000-0002-3777-6676, b https://orcid.org/0000-0001-7861-0253,
c https://orcid.org/0000-0001-6233-3757, d https://orcid.org/0000-0002-5361-6832
Статья поступила 02.05.2023, принята 10.05.2023

Результаты фундаментальных тепловых расчетов используются практически в любых областях производства, поэтому процессам передачи теплоты уделяется особое внимание. Для исследований процессов теплопередачи в жидких или твердых телах используется аналитическая теория теплопроводности. Основная задача при этом заключается в определении распределения полей температур при заданных краевых условиях по объему тела. Интенсивность процесса теплопередачи напрямую зависит от информации о температурном поле, а значит, и о возможности управлять параметрами потока энергоносителя на любой стадии соответствующего технологического процесса. Различная интенсивность теплообмена априори ведет к применению более сложных характеристических уравнений, решение которых сейчас осуществляется, в подавляющем большинстве, численными методами. Представленная работа посвящена исследованию распределения температуры внутри ламинарного потока жидкости, движущейся в плоском канале. При этом предполагается, что течение среды является стационарным, с параболическим профилем скорости, и теплофизические свойства ее постоянные. В статье излагается приближенный аналитический метод расчета температурного поля в ламинарном потоке жидкости, движущемся в плоском канале. Получены сравнительно простые математические зависимости для определения первой собственной функции сформулированной задачи и ее первого характеристического корня. Предлагаемые выражения обладают высокой точностью и позволяют оперативно исследовать процесс теплообмена в зоне упорядоченного режима течения среды в щелевидной трубе, являющегося основным после начального термического участка канала. Рекомендуемые авторами аналитические решения доведены до конечных расчетных формул, пригодных для непосредственного практического применения. Следует отметить, что повышение эффективности приближенных аналитических способов решения линейных задач теплопереноса позволяет на их основе успешно проводить также исследования широкого класса важных процессов нелинейного теплообмена, например, осуществлять расчет высокотемпературного нагрева ламинарных потоков жидкости, текущей в каналах постоянного сечения. Особенность в этом случае заключается в том, что с ростом температуры греющей среды механизм конвективного переноса значительно усиливается радиационной составляющей. Благодаря этому граничное условие на внешней поверхности канала оказывается существенно нелинейной функцией ее температуры, что весьма усложняет задачи такого класса. Математическая сложность краевых условий не позволяет решать данный тип задач с помощью строго аналитических методов. В подобных случаях целесообразно использовать наиболее подходящие приближенные способы.

Ключевые слова: плоский канал, ламинарное течение, температура потока, математические зависимости, теплообмен.

Heat transfer under laminar flow of liquid in a flat channel

Yu.V. Vidin[1a], R.V. Kazakov[1b], A. A. Fedyaev[2c], T.A. Grigorieva[3d]

[1] Siberian Federal University; 79, Svobodny Pros., Krasnoyarsk, Russia
[2] St. Peterburg State Forest University under name of S.M. Kirov; 5, Institutsky Per., St. Petersburg, Russia
[3] Bratsk State University; 40, Makarenko St., Bratsk, Russia
[a] zlobinsfu@mail.ru, [b] roman.v.kazakov@gmail.com, [c] vends1@mail.ru, [d] Umubrgu@mail.ru
a https://orcid.org/0000-0002-3777-6676, b https://orcid.org/0000-0001-7861-0253,
c https://orcid.org/0000-0001-6233-3757, d https://orcid.org/0000-0002-5361-6832
Received 02.05.2023, accepted 10.05.2023

The results of fundamental thermal calculations are used in almost all areas of production, therefore, special attention is paid to heat transfer processes. To study heat transfer processes in liquid or solid bodies, the analytical theory of heat conduction is used. The main task in this case is to determine the distribution of temperature fields under given boundary conditions over the volume of the body. The intensity of the heat transfer process directly depends on information about the temperature field, and hence on the ability to control the parameters of the energy carrier flow at any stage of the corresponding technological process. Different intensity of heat transfer a priori leads to the use of more complex characteristic equations, the solution of which is now carried out in the vast majority of numerical methods. The present work is devoted to the study of the temperature distribution inside a laminar fluid flow moving in a flat channel. In this case, it is assumed that the flow of the medium is stationary with a parabolic velocity profile and its thermophysical *properties are constant. The article presents an approximate analytical method for calculating the temperature field in a laminar fluid flow moving in a flat channel. Relatively simple mathematical dependencies are obtained for determining the first eigenfunction of the formulated problem and its first characteristic root. The proposed expressions are highly accurate and allow one to quickly investigate the heat transfer process in the zone of the ordered flow of the medium in the slot-like tube, which is the main one after the initial thermal section of the channel. The analytical solutions recommended by the authors have been brought to final calculation formulas suitable for direct practical application. It should be noted that increasing the efficiency of approximate analytical methods for solving linear problems of heat transfer makes it possible to successfully study a wide class of important processes of nonlinear heat transfer on their basis, for example, to calculate high-temperature heating of laminar fluid flows flowing in channels of constant cross section. The peculiarity in this case is that with an increase in the temperature of the heating medium, the mechanism of convective transfer is significantly enhanced by the radiation component. Due to this, the boundary condition on the outer surface of the channel turns out to be an essentially non-linear function of its temperature, which greatly complicates problems of this class. The mathematical complexity of the boundary conditions does not allow solving this type of problems using strictly analytical methods. In such cases, it is advisable to use the most suitable approximate methods.*

Key words: flat channel; laminar flow; flow temperature; mathematical dependencies; heat transfer.

Введение. При инженерном рассмотрении задач, как правило, главной целью является получение конечного результата в численном виде. Исследуемые задачи могут быть представлены достаточно общими дифференциальными уравнениями в частных производных. Как правило, в этом случае реальное физическое явление или процесс и его математическую модель отделяет друг от друга определенный ряд допущений и упрощений. Чем более существенны данные упрощения и допущения, тем проще осуществлять теоретический анализ исследуемого явления или процесса. Тогда нередко результаты таких исследований могут оказаться весьма грубым приближением к фактической действительности. Поэтому на первом этапе (наиболее ответственном) необходимо разработать оптимальное математическое описание исследуемого технологического процесса или объекта. На втором, не менее сложном этапе следует получить аналитическое решение поставленной на практике задачи.

Результаты фундаментальных тепловых расчетов различных технологических процессов используются практически в любых областях производства, поэтому процессам передачи теплоты уделяется особое внимание, так как это напрямую связано с рациональным использованием топливных и других энергетических ресурсов. Для исследований процессов теплопередачи в жидких, газообразных или твердых телах используется аналитическая теория теплопроводности. Основная задача при ее применении заключается в определении распределения полей температур при заданных краевых условиях по объему изучаемого объекта. Практические условия требуют создания все более тонких и в то же время более удобных инженерных способов математического анализа большого круга прикладных задач.

Одной из проблем, представляющих значительный интерес, являются вопросы, связанные с распределением температуры внутри потока жидкости, в частности, при ламинарном режиме. Похожие закономерности изучаемых процессов могут быть использованы в задачах диффузии, течения жидкости через пористую среду (фильтрация), замедление нейтронов и т. п.

При проведении таких исследований основной целью является нахождение температурных полей внутри объекта при известных краевых условиях, которые дают информацию о стадии завершенности технологической операции и при помощи обратной связи дают возможность направленно воздействовать на внешние условия для интенсификации протекания всего технологического процесса.

Изучению процессов теплообмена при ламинарном режиме течения среды в каналах посвящено значительное число научных работ, например [1–9]. В этой области достигнуты существенные теоретические результаты, имеющие важное значение для практики конструирования современных высокоэффективных, например, теплообменных устройств.

В указанных публикациях сравнительно подробно, на математической основе, рассмотрены, в частности, случаи ламинарного движения жидкости в трубах различной геометрической конфигурации при различных краевых условиях. В монографиях [8; 9] для решения сформулированных задач были использованы специальные вырожденные гипергеометрические функции [10–12]. На основе этих функций были выведены аналитические зависимости для определения собственных функций и собственных значений поставленных задач.

Однако полученные аналитически строгие расчетные зависимости в математическом отношении являются сравнительно громоздкими при проведении по ним конкретных инженерных вычислительных операций. В связи с этим целесообразно к методам расчетов, рекомендуемым в [8–12], разработать более упрощенные способы проведения технических вычислений характеристик изучаемого вида конвективного теплообмена.

Постановка и исследование задачи конвективного теплообмена. Число существующих аналитических приближенных методов достаточно обширно. Главными из них являются следующие: интегральные, вариационные, разложения искомой функции в ряд по степеням известной величины, считающейся малой (метод малого параметра), сведения задач переноса к интегральным уравнениям.

Однако нужно иметь в виду, что не всегда эти методы оказываются эффективными, а иногда и вообще не могут быть применены. Постоянное расширение круга теплофизических задач, встречающихся в практике, вызывает необходимость модернизации, развития известных методов интегрирования и создания новых, более универсальных.

В большинстве случаев строгое аналитическое решение для температурного поля выражается в виде бесконечных рядов, сходимость которых в начальные моменты времени очень медленная. Поэтому использовать их в расчетной практике на иррегулярной стадии прогрева весьма затруднительно. Как показал А.В. Лыков [2], с помощью операционного метода Лапласа можно получить достаточно простые приближенные зависимости, пригодные для нахождения температурного поля при малых значениях критерия Фурье *Fo*. Однако такие формулы удается вывести для относительно несложных задач (тело однородное, равномерная начальная температура, неизменность граничных условий, отсутствие внутренних источников теплоты и т. д.). В связи с отмеченным разработка инженерных методов расчета распределения потенциалов в начальном этапе для реальных условий нагрева заслуживает особого внимания и должна считаться весьма актуальной.

Известно, что род граничных условий существенно влияет на математическую форму аналитического решения. Представляется целесообразным более всесторонне изучить и тепловые задачи с граничными условиями 2-го и 3-го рода. Граничные условия 1-го рода методически более правильно считать частным случаем условий 3-го рода.

С учетом принятых выше допущений математическая постановка рассматриваемой задачи в безразмерной форме имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \vartheta(X,Y)}{\partial \gamma^2} = \left(1-\gamma^2\right)\frac{\partial \gamma(X,Y)}{\partial X}, \qquad (1)$$

$$0 \le X \le \infty;\ 0 \le Y \le 1,$$

$$\frac{\partial \vartheta(X,0)}{\partial \gamma} = 0, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial \vartheta(X,1)}{\partial \gamma} - Bi\vartheta(X,1), \qquad (3)$$

$$\vartheta(1,Y) = 1, \qquad (4)$$

где $\vartheta(X,Y)$ — безразмерная температура жидкости (искомое температурное поле); X,Y соответственно осевая и поперечная координаты канала; Bi — число Био, характеризующее интенсивность теплообмена на наружной поверхности канала.

В исследованиях [8–10] получено математическое выражение для определения значения температуры в ламинарном потоке жидкости для плоского канала в виде бесконечного ряда:

$$\vartheta(X,Y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \psi_n \exp\left(-\mu_n^2 X\right). \qquad (5)$$

Здесь $\psi_n(Y)$ — собственные функции сформулированного процесса, которые определяются на основе решения соответствующей задачи Штурма – Лиувилля:

$$\psi'' + \mu^2\left(1-Y^2\right)\psi = 0, \qquad (6)$$

$$\psi' = 0 \text{ при } Y = 0, \qquad (7)$$

$$\psi' = -Bi\psi \text{ при } Y = 1. \qquad (8)$$

Данная постановка задачи справедлива для плоского щелевидного канала. Аналитическое решение системы (6)–(8) получено в [9; 10; 13] на базе конфлюэнтной гипергеометрической функции в форме бесконечной суммы [14–18]:

$$\psi = \exp\left(-\mu\frac{Y^2}{2}\right)\bullet$$
$$\bullet\begin{bmatrix} 1 + \frac{(1-\mu)\mu}{2}Y^2 + \\ \frac{(1-\mu)\left(5-\mu^2\right)}{12}\frac{Y^4}{2!} + \ldots \\ \ldots + \frac{(1-\mu)(5-\mu)(9-\mu)\ldots}{2^m\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots} \\ \frac{\ldots(4m-3-\mu)m^m}{\ldots\cdot(2m-1)}\frac{Y^{2m}}{m!} + \ldots \end{bmatrix}, \qquad (9)$$

где $m = 1, 2, 3 \ldots$

Произведя подстановку формулы (9) в граничное условие (8), удается получить уравнение для нахождения характеристических чисел μ_n:

$$\frac{\mu}{Bi} = \frac{\left[1 + \frac{(1-\mu)\mu}{2} + \frac{(1-\mu)(5-\mu)\mu^2}{24} + \ldots \right.}{1 - \left[(1-\mu) + \frac{(1-\mu)(5-\mu)\mu}{6} + \ldots\right.}$$
$$\frac{\left. + \frac{(1-\mu)(5-\mu)\ldots(4m-3-\mu)}{2^m\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot(2m-1)m!} + \ldots\right]}{\left. + \frac{2m(1-\mu)(5-\mu)\ldots(4m-3-\mu)\mu^{m-1}}{2^m\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot(2m-1)m!} + \ldots\right]}, \qquad (10)$$

где $m = 1, 2, 3 \ldots$

Вполне очевидно, что зависимости (9) и (10) являются сравнительно сложными и громоздкими. Однако в случае, когда осевая координата канала X оказывается больше 0,2, в выражении (5) достаточно учитывать только первое слагаемое суммы, так как последующие члены ряда будут незначительными.

Следовательно, для сечения канала, у которого $X \ge 0{,}2$, допустимо вместо (5) использовать соотношение:

$$\vartheta(X,Y) = A_1\psi_1(Y) - \exp\left(-\mu_1^2 X\right). \qquad (11)$$

Для расчета первой собственной функции $\psi_1(Y)$, входящей в усеченное решение (11), может быть использована вместо (9) весьма несложная инженерная зависимость:

$$\psi(Y) = 1 - \frac{\mu_1^2}{2}Y^2\left(1 - \frac{Y^2}{6}\right) + \frac{\mu_1^4}{24}Y^4\left(1 - \frac{7}{15}Y^2\right), \qquad (12)$$

которая полностью удовлетворяет условию симметрии (7) и с достаточной точностью — дифференциальному уравнению (6).

Подставляя (12) в граничное условие на поверхности канала (8), получим выражение для определения первого собственного значения μ_1:

$$\mu_1^2 = 7{,}5\frac{8+5Bi}{9+4Bi}\left[1 - \sqrt{1 - \frac{16Bi(9+4Bi)}{5(8+5Bi)^2}}\right]. \qquad (13)$$

Очевидно, что формула (13) существенно проще, чем строгая аналитическая зависимость (10). Важной ее особенностью является также то, что она позволяет дать оценку действительной величине μ_1 снизу с высокой степенью точности. Так, если безразмерный комплекс Bi стремится к бесконечности ($Bi => \infty$), то, согласно (13), имеем $\mu_1^2 = 2{,}82590655$, т. е., следовательно, $\mu_1 = 1{,}6810$.

В табл. 1 приведены значения μ_1 характеристического уравнения (10) для ряда величин Bi в интервале от 0 до ∞, рассчитанные численным методом.

Из данной таблицы следует, что при $Bi => \infty$ $\mu_1 = 1{,}6816$, т. е. расхождение с определенной величиной по (13) не превышает 0,05 %.

Из анализа характеристического уравнения (10) вытекает, что имеют место следующие условия:

$$0 \le \mu_1 \le 1, \text{ если } 0 \le Bi < 1, \quad (14)$$

$$1 \le \mu_1 \le 1{,}6816, \text{ если } 1 \le Bi < \infty, \quad (15)$$

$$4{,}2827 \le \mu_2 \le 5, \text{ если } 0 \le Bi \le 2{,}7778, \quad (16)$$

$$5 \le \mu_2 \le 5{,}6699, \text{ если } 2{,}7778 \le Bi < \infty, \quad (17)$$

$$8{,}3037 \le \mu_3 \le 9, \text{ если } 0 \le Bi \le 4{,}0685, \quad (18)$$

$$9 \le \mu_3 \le 9{,}6682, \text{ если } 4{,}0685 \le Bi < \infty. \quad (19)$$

Отсюда видно, что числа μ_n резко возрастают с ростом порядкового номера n.

Поэтому основной зоной исследования теплообмена, как правило, является участок канала, для которого осевая координата $X > 0{,}2$.

Необходимо также отметить, что на практике нередко температура греющей среды $T_c = T_c(\text{Fo})$ переменчива в довольно большом диапазоне, что необходимо учитывать при расчетных исследованиях. Процесс прогрева неоднородных элементов изучаемого объекта при наличии, например лучистого тепла от какого либо внешнего источника с непостоянной по времени температурой с математической точки зрения является достаточно сложной задачей.

Поэтому, хотя подобного рода задачи являются на практике весьма актуальными, они до настоящего времени аналитически изучены весьма недостаточно. Даже для однородных тел пока не имеется надежных способов расчета областей физических величин (в данном случае температурного поля) при условии $T_c = T_c(\text{Fo})$. Особенно важно, что на практике невозможно провести и номографирование, так как область имеющихся в реальных условиях закономерностей перемены температуры излучающего теплоисточника оказывается весьма широкой.

Продемонстрируем возможности формулы (13) для умеренных величин параметра Bi. Например, $Bi = 0{,}1$.

Тогда, согласно (13), будем иметь:

$$\mu_1^2 = 7{,}5\,\frac{8{,}5}{9{,}4}\left(1-\sqrt{1-\frac{1{,}6\cdot 9{,}4}{5\cdot 8{,}2}}\right) = 0{,}1426773\ ,$$

т. е. $\mu_1 = 0{,}3777$.

Табличное значение $\mu_1 = 0{,}3782$. Таким образом, и в данном случае невязка невелика.

Формула (12) дает возможность определить величину первой собственной функции ψ_1 в любой точке сечения канала. Рассмотрим вариант Bi = 0,1 и $Y = 1$. Тогда из (12) следует, что:

$$\psi_1(1) = 1 - \frac{0{,}3777^2}{2}\left(1-\frac{1}{6}\right) + \frac{0{,}3777^4}{24}\left(1-\frac{7}{15}\right) = 0{,}941$$

Эта величина практически полностью соответствует табличной [8].

Таким образом, предлагаемые упрощенные аналитические зависимости могут быть успешно и эффективно использованы для исследования теплообмена при ламинарном движении жидкости в плоском канале на участке упорядоченного режима.

Система дифференциальных уравнений для плоского канала подобна системе для круглого канала. При проведении ее линеаризации с учетом сделанных допущений она может быть преобразована для новой переменной в задачу, которая может быть решена аналогичным представленному в данной работе методом. Тогда можно говорить о более широких возможностях использования предлагаемым упрощенным расчетным зависимостям.

Коэффициент A_1, входящий в расчетную формулу (11), находится из уравнения:

$$A_1 = \frac{\int_0^1 (1-Y^2)\psi_1(Y)dY}{\int_0^1 (1-Y^2)\psi_1^2(Y)dY}. \quad (20)$$

Величина этого коэффициента, как следует из табл. 2, меняется сравнительно незначительно в интервале от 1 примерно до 1,2. Числовые значения этого коэффициента в зависимости от параметра Bi представлены в табл. 2.

Таблица 1. Значения первого корня μ_1 характеристического уравнения (10)

Bi	μ_1	Bi	μ_1
0	0	1,50	1,1319
0,01	0,1222	2,00	1,2202
0,02	0,1724	3,00	1,3391
0,03	0,2106	4,00	1,4003
0,04	0,2426	5,00	1,4463
0,05	0,2706	10,00	1,5524
0,06	0,2957	20,00	1,6141
0,07	0,3187	30,00	1,6361
0,08	0,3398	40,00	1,6475
0,09	0,3596	50,00	1,6544
0,10	0,3782	60,00	1,6590
0,20	0,5227	70,00	1,6622
0,30	0,6263	80,00	1,6649
0,40	0,7080	90,00	1,6668
0,50	0,7755	100,00	1,6684
0,60	0,8329	1000,00	1,6813
0,70	0,8827	∞	1,6816
0,80	0,9264	–	–
0,90	0,9652	–	–
1,00	1,000	–	–

Следует иметь в виду, что корни μ_2 и μ_3 значительно больше μ_1, и их величины лежат в следующих соответствующих интервалах: $4{,}2827 \le \mu_2 \le 5{,}6699$; $8{,}3037 \le \mu_3 \le 9{,}6682$. При этом известно, что если $Bi = 2{,}7778$, то $\mu_2 = 5{,}0000$, а для $Bi = 4{,}0685$ $\mu_3 = 9{,}0000$ [8].

Таблица 2. Значения коэффициента A_1, рассчитанного по зависимости (20)

Bi	A_1	Bi	A_1
0	1,0000	1,5	1,1106
0,1	1,0132	2,0	1,1262
0,2	1,0251	3,0	1,1462
0,3	1,0359	4,0	1,1581
0,4	1,0456	5,0	1,1660
0,5	1,0544	10,0	1,1831
0,6	1,0624	20,0	1,1921
0,7	1,0698	30,0	1,1951
0,8	1,0765	40,0	1,1966
0,9	1,0826	50,0	1,1975
1,0	1,0882	100,0	1,1993

В частных случаях на основе базового решения (9) могут быть получены простые соотношения для нахождения собственных функций:

$$\psi_1(Y) = \exp\left(-\frac{Y^2}{2}\right)$$

при Bi = 1, (21)

$$\psi_2(Y) = \left(1 - 10Y^2\right)\exp\left(-2{,}5Y^2\right)$$

при Bi = 2,7778, (22)

$$\psi_3(Y) = \left(1 - 36Y^2 + 108Y^4\right)\exp\left(-4{,}5Y^2\right)$$

при Bi = 4,0685. (23)

Полученные расчетные зависимости могут рассматриваться как эталонные при разработке приближенных инженерных решений для определения функций $\psi_2(Y)$, $\psi_3(Y)$ и т. д. при любых величинах параметра Bi. Для проведения расчетных исследований и получения результатов могут быть использованы рекомендации, имеющиеся в справочнике [19].

Если в формулу (20) подставить зависимость (21), то получим результат для коэффициента A, соответствующий $A_1 = 1{,}0882$.

Как было уже отмечено, как правило, точное аналитическое решение для температурного поля (и других физических величин — давления, концентрации, скоростных параметров и т. п.) выражается в виде бесконечных рядов, сходимость которых в начальные моменты времени протекает весьма медленно, даже с использованием современной вычислительной техники.

Поэтому использовать их в расчетной практике на иррегулярной стадии прогрева весьма затруднительно. Используя [2] операционный метод Лапласа, можно получить достаточно простые приближенные зависимости, которые можно использовать с достаточной точностью для определения, в частности, физического поля температур (и других физических величин) при малых значениях критерия Фурье Fo. Но такие зависимости удается получить для относительно простых (тело однородное, равномерная начальная температура, неизменность граничных условий, отсутствие внутренних источников теплоты и т. д.). По отмеченной выше причине разработка инженерных методов расчета распределения потенциалов на начальном этапе для реальных условий рассматриваемых задач (например, нагрева для различных начальных условий) заслуживает особого внимания и должна считаться, конечно же, актуальной.

Заключение. В итоге следует отметить, что полученные аналитические решения дополняют ранее опубликованные результаты в данной области. Предлагаемый в статье математический метод может быть эффективно применен для решения многих других задач, например, при изучении теплообмена в ламинарном потоке жидкости в плоском канале при несимметричных граничных условиях на противоположных поверхностях.

Таким образом, предлагаемые упрощенные аналитические зависимости могут быть успешно и эффективно использованы для исследования теплообмена при ламинарном движении жидкости в плоском канале на участке упорядоченного режима.

Система дифференциальных уравнений для плоского канала подобна системе для круглого канала. При проведении ее линеаризации с учетом сделанных допущений она может быть преобразована для новой переменной в задачу, которая может быть решена аналогичным представленному в данной работе методом.

Повышение эффективности приближенных аналитических способов решения линейных задач теплопереноса позволяет на их основе успешно проводить также исследования широкого класса важных процессов нелинейного теплообмена, например, осуществлять расчет высокотемпературного нагрева ламинарных потоков жидкости, текущей в каналах постоянного, но разного сечения. В этом случае с ростом температуры греющей среды механизм конвективного переноса значительно усиливается радиационной составляющей. Благодаря этому граничное условие на внешней поверхности канала оказывается существенно нелинейной функцией ее температуры, что весьма усложняет задачи такого класса.

Математическая сложность краевых условий не позволяет решать данный тип задач с помощью строго аналитических методов. В подобных случаях целесообразно использовать наиболее подходящие приближенные способы. Достигнутые в этой области существенные теоретические результаты имеют важное значение для практики конструирования современных высокоэффективных, например, теплообменных устройств (в частности, тепловые трубы). Также можно отметить другие направления, где на практике такого рода задачи встречаются достаточно часто, например, бензопроводы, маслопроводы круглого, плоского или других сечений, отдельные участки которых работают в областях достаточно высоких, но переменных температур многочисленных транспортных механизмов и устройств различного назначения и др.

Также необходимо отметить, что чем более широкий диапазон сложных линейных и нелинейных задач теплопередачи будет аналитически изучен, тем более вероятно существенно увеличить возможности теоретического изучения, в частности, ламинарных режимов течения, которые достаточно встречаются в инженерной практике. Как уже отмечалось ранее, им посвящено значительное число научных работ, но до настоящего времени они исследованы весьма ограниченно.

Литература

1. Петухов Б.С. Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах. М.: Энергия, 1967. 411 с.
2. Лыков А.В. Тепломассообмен: справ. М.: Энергия, 1978. 479 с.
3. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978. 736 с.
4. Карташов Э.М., Кудинов В.А., Калашников В.В. Теория тепломассопереноса: решение задач для многослойных конструкций. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Изд-во «Юрайт», 2018. 435 с.
5. Садиков И.Н. Ламинарный теплообмен в плоском канале при неравномерном поле температуры на входе // Инженерно - физический журнал. 1965. Т. 8. № 3. С. 283-289.
6. Карташов Э.М. Теплопроводность при переменном коэффициенте теплообмена // Теплофизика высоких температур. 2019. Т. 57. Вып. 5. С. 694-701.
7. Цой П.В. Методы расчета задач тепло- массопереноса. М.: Энергоатомиздат, 1984. 414 с.
8. Видин Ю.В., Федяев А.А., Казаков Р.В. Инженерные методы расчета задач теплообмена при ламинарном течении жидкости в каналах: моногр. Братск: Изд-во БрГУ, 2020. 307 с.
9. Видин Ю.В., Злобин В.С., Иванов В.В., Медведев Г.Г. Инженерные методы расчета задач нелинейного теплообмена при ламинарном течении жидкости в каналах. Красноярск: СФУ, 2015. 155 с.
10. Видин Ю.В., Иванов В.В., Казаков Р.В. Инженерные методы расчета задач теплообмена. Красноярск: СФУ, 2014. 167 с.
11. Федяев А.А. Особенности структуры пограничных слоев канальных течений // Тр. Братского гос. ун-та. Сер. Естественные и инженерные науки: в 2 т. Братск, 2013. Т. 2. С. 166-170.
12. Федяев А.А. Математическая модель для оценки потенциала энергосбережения в низкотемпературных процессах тепло- и массопереноса // Тр. Братского гос. ун-та. Сер. Естественные и инженерные науки: в 2 т. Братск, 2013. Т. 1. С. 72-78.
13. Видин Ю.В., Казаков Р.В. Расчет теплообмена при ламинарном течении жидкости в цилиндрическом канале при наличии аксиальной теплопроводности // Теплофизика высоких температур. 2019. Т. 57. № 2. С. 308-311.
14. Маделунг Э. Математический аппарат физики. М.: Наука, 1968. 618 с.
15. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. М.: Наука, 1977. 342 с.
16. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 833 с.
17. Polyanin A.D., Manzhirov A.V. Handbook of Mathematics for Engineers and Scientists. 2007 by Taylor & Francis Group, LLC.
18. Baehr H.D., Stephan K. Heat and Mass Transfer. Springer Berlin Heidelberg New York, 2006.
19. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. 576 с.

References

1. Petuhov B.S. Heat transfer and resistance in laminar fluid flow in pipes. M.: Energiya, 1967. 411 p.
2. Lykov A.V. Heat and mass transfer: sprav. M.: Energiya, 1978. 479 p.
3. Lojcyanskij L.G. Mechanics of liquid and gas. M.: Nauka, 1978. 736 p.
4. Kartashov E.M., Kudinov V.A., Kalashnikov V.V. Theory of heat and mass transfer: problem solving for multilayer structures. 2-e izd., pererab. i dop. M.: Izd-vo «YUrajt», 2018. 435 p.
5. Sadikov I.N. Laminar heat transfer in a flat channel with an uneven temperature field at the inlet // Journal of Engineering Physics. 1965. V. 8. № 3. P. 283-289.
6. Kartashov E.M. Thermal conductivity with a variable heat transfer coefficient // High Temperature. 2019. V. 57. Vyp. 5. P. 694-701.
7. Coj P.V. Methods for calculating problems of heat and mass transfer. M.: Energoatomizdat, 1984. 414 p.
8. Vidin YU.V., Fedyaev A.A., Kazakov R.V. Engineering methods for calculating heat transfer problems in laminar fluid flow in channels: monogr. Bratsk: Izd-vo BrGU, 2020. 307 p.
9. Vidin YU.V., Zlobin V.S., Ivanov V.V., Medvedev G.G. Engineering methods for calculating problems of nonlinear heat transfer in laminar fluid flow in channels. Krasnoyarsk: SFU, 2015. 155 p.
10. Vidin YU.V., Ivanov V.V., Kazakov R.V. Engineering methods for calculating heat transfer problems. Krasnoyarsk: SFU, 2014. 167 p.
11. Fedyaev A.A. Features of the structure of the boundary layers of channel flows // Tr. Bratskogo gos. un-ta. Ser. Estestvennye i inzhenernye nauki: v 2 t. Bratsk, 2013. V. 2. P. 166-170.
12. Fedyaev A.A. Mathematical model for assessing the potential for energy saving in low-temperature processes of heat and mass transfer // Tr. Bratskogo gos. un-ta. Ser. Estestvennye i inzhenernye nauki: v 2 t. Bratsk, 2013. V. 1. P. 72-78.
13. Vidin YU.V., Kazakov R.V. Calculation of heat transfer in a laminar fluid flow in a cylindrical channel in the presence of axial heat conduction // High Temperature. 2019. V. 57. № 2. P. 308-311.
14. Madelung E. Mathematical apparatus of physics. M.: Nauka, 1968. 618 p.
15. YAnke E., Emde F., Lyosh F. Special functions. M.: Nauka, 1977. 342 p.
16. Abramovic M., Stigan I. Handbook of special functions. M.: Nauka, 1979. 833 p.
17. Polyanin A.D., Manzhirov A.V. Handbook of Mathematics for Engineers and Scientists. 2007 by Taylor & Francis Group, LLC.
18. Baehr H.D., Stephan K. Heat and Mass Transfer. Springer Berlin Heidelberg New York, 2006.
19. Kamke E. Handbook of Ordinary Differential Equations. M.: Nauka, 1976. 576 p.