

## Определение некоторых дополнительных характеристик диаграмм инструментального вдавливания сферы

П.М. Огар<sup>a</sup>, В.С. Федоров<sup>b</sup>, В.С. Кушнарев<sup>c</sup>, Н.В. Карьялайнен<sup>d</sup>

Братский государственный университет, ул. Макаренко, 40, Братск, Россия  
<sup>a</sup>ogar@brstu.ru, <sup>b</sup>fedorov-v-s@yandex.ru, <sup>c</sup>kushvs@yandex.ru, <sup>d</sup>alybeiw@mail.ru  
<sup>a</sup><https://orcid.org/0000-0001-7717-9377>, <sup>b</sup><https://orcid.org/0000-0001-5507-307X>,  
<sup>c</sup><https://orcid.org/0000-0003-3931-2215>, <sup>d</sup><https://orcid.org/0000-0003-2483-3763>  
 Статья поступила 19.05.2023, принята 22.05.2023

*Статья посвящена определению дополнительных характеристик диаграмм инструментального вдавливания сферой. Показано, что мощным инструментом при исследовании свойств материалов является использование основного уравнения индентирования. В настоящей работе оно использовалось для аналитического построения диаграммы кинетического индентирования, определения радиусов восстановленных и невосстановленных отпечатков, определении относительного внедрения индентора, соответствующему равномерной деформации. Указано, что при аналитическом построении диаграммы кинетического индентирования отсутствует необходимость учитывать упругую податливость звеньев экспериментального оборудования. Относительное внедрение индентора, соответствующему равномерной деформации, определено для восьми материалов. Со средней погрешностью 8,74 % подтверждена зависимость его значения от экспонента ветви нагружения. Достоверность полученных аналитических выражений для описания ветви нагружения диаграммы кинетического индентирования подтверждена результатами конечно-элементного моделирования*

**Ключевые слова:** диаграмма вдавливания сферы; основное уравнение индентирования; жесткость разгрузки; упругопластическое полупространство; кривая нагружения; кривая разгрузки.

## Determination of some additional characteristics of diagrams of instrumental indentation of the sphere

P.M. Ogar<sup>a</sup>, V.S. Fedorov<sup>b</sup>, V.S. Kushnarev<sup>c</sup>, N.V. Kar'yalaajnen<sup>d</sup>

Bratsk State University; 40, Makarenko St., Bratsk, Russia  
<sup>a</sup>ogar@brstu.ru, <sup>b</sup>fedorov-v-s@yandex.ru, <sup>c</sup>kushvs@yandex.ru, <sup>d</sup>alybeiw@mail.ru  
<sup>a</sup><https://orcid.org/0000-0001-7717-9377>, <sup>b</sup><https://orcid.org/0000-0001-5507-307X>,  
<sup>c</sup><https://orcid.org/0000-0003-3931-2215>, <sup>d</sup><https://orcid.org/0000-0003-2483-3763>  
 Received 19.05.2023, accepted 22.05.2023

*The article is devoted to the definition of additional characteristics of diagrams of instrumental indentation by a sphere. It is shown that a powerful tool in the study of the properties of materials is the use of the basic indentation equation. In this paper, it was used for analytical construction of a kinetic indentation diagram, determination of the radii of restored and non-restored prints, determination of the relative insertion of the indenter corresponding to uniform deformation. It is indicated that in the analytical construction of the kinetic indentation diagram, there is no need to take into account the elastic compliance of the links of experimental equipment. The relative embedding of the indenter corresponding to uniform deformation is determined for eight materials. With an average error of 8.74 %, the equality of its value to the value , where is the exponent of the loading branch, is confirmed. The reliability of the obtained analytical expressions for describing the loading branch of the kinetic indentation diagram is confirmed by the results of finite element modeling*

**Keywords:** sphere indentation diagram, basic indentation equation, unloading stiffness, elastic-plastic half-space, loading curve, unloading curve.

**Введение.** Детали и механизмы технологического оборудования эксплуатируются под воздействием различных механических нагрузок и температурных воздействий. В результате конструкционные материалы повреждаются из-за их пластической деформации и последующего зарождения и распространения трещин. Это приводит к изменению физико-механических свойств материалов. Обнаружение повреждений и изменения физико-механических свойств материалов на начальном этапе и в процессе технического обслуживания имеет решающее значение для обеспечения без-

опасности и долговечности элементов конструкций и оборудования в целом.

Многообещающим инструментом для диагностики и контроля механических параметров материалов стало инструментальное индентирование. В последнее время появилось множество работ, связанных с различными подходами к определению механических свойств материалов и методами реализации разработанных на их основе методик. К ним можно отнести аналитические методы [1; 2], методы, связанные с процедурами идентификации [2–5], с энергетическим подходом [6–8], с

построением и обучением нейронных сетей [9; 10], методы, связанные с определением накопления повреждений в материале и относительным сужением образца при одноосном нагружении [11–14].

Более простой подход, связанный с преобразованием кинетической диаграммы вдавливания сферического индентора в диаграмму растяжения в области равномерной деформации, предложен авторами [15]. Суть состоит в двух стадиях преобразования: 1) вначале диаграмма вдавливания «нагрузка – перемещение» преобразуется в диаграмму «невосстановленная твердость – относительная глубина невосстановленного отпечатка»; 2) затем эта диаграмма преобразуется в диаграмму растяжения «напряжение – деформация». При этом авторами [15] получено выражение, позволяющее рассчитать истинные деформации по относительной глубине невосстановленного отпечатка и экспоненте ветви нагружения диаграммы кинетического индентирования.

К работе [15] авторов настоящей статьи привлек внимание тот факт, что параметры индентирования связаны с экспонентой  $\alpha$  уравнения ветви нагружения диаграммы  $P - h$ , которое имеет вид:

$$P = P_m h_m^{-\alpha} h^\alpha, \quad (1)$$

где  $P_m$  и  $h_m$  — максимальное усилие и максимальная величина внедрения. Ранее нами в [16; 17] экспонента  $\alpha$  использовалась для определения распределения давления  $p(r)$  на площадке контакта радиусом  $a$ :

$$p(r) = (\beta + 1) p_m (1 - r^2/a^2)^\beta, \quad (2)$$

где  $\beta = \alpha - 1$ ,  $\beta \in [0, 0.5]$ ;  $p_m$  — среднее давление (здесь и ранее авторами принято обозначать дробные параметры греческими буквами, за исключением дробных параметров латинскими буквами:  $t$  — индекса Майера;  $n$  — экспоненты упрочнения в уравнениях Холломова или Людвика).

По утверждению авторов [15], «...анализ экспериментальных данных показал, что для испытанных материалов  $\bar{h}_u = (h/R)_u$  зависит от параметра деформационного упрочнения материала  $\alpha$ , а их связь имеет вид»:

$$\bar{h}_u = (h/R)_u = \alpha - 1. \quad (3)$$

Здесь  $\bar{h}_u$  — относительное внедрение индентора, при котором невосстановленная твердость по Бринеллю  $HB_t$  достигает своего максимума  $(HB_t)_u$ . Аналогичный уравнению (3) вид предложен для условной равномерной деформации:

$$\delta_u = \alpha - 1. \quad (4)$$

Из-за неубедительности доказательств выражений (3) и (4) могут возникнуть вопросы: по каким выражениям рассчитывались параметры  $\bar{h}_u$  и  $\delta_u$ ? Какие экспериментальные данные использовались? Влияет ли на параметры  $\bar{h}_u$  и  $\delta_u$  распределение контактного давления?

В связи с вышеизложенным, целью настоящей работы является представить наш взгляд на определение

равномерного относительного внедрения  $\bar{h}_u$  и других дополнительных характеристик расчетным путем и сравнить аналитическое решение для описания внедрения индентора с решением, полученным конечно-элементным моделированием.

**Методологические аспекты.** Во многих случаях при определении свойств материалов из диаграмм кинетического индентирования используется конечно-элементное моделирование (КЭМ), например, в работах [1; 2; 18 и др.]. Аналогично, если имеется аналитическая модель, адекватно описывающая процесс внедрения и разгрузки сферического индентора, то ее можно использовать при определении физико-механических свойств материалов. При этом возникает определенное преимущество — отсутствует необходимость учитывать упругую податливость испытательного оборудования. Для аналитического восстановления диаграмм кинетического индентирования используем данные табл. 1 с характеристиками испытываемых материалов работы [15]. Схемы диаграмм кинетического индентирования испытываемых материалов представлены на рис. 2 той же работы. Данные по другим материалам, используемым в настоящей работе, позаимствованы из работ тех же авторов [19, табл. 2; 20, рис. 3; 21, табл. 1].

Важное значение при кинетическом индентировании имеет модуль упругости. В работе [18] рекомендуется производить определение модуля упругости материала при относительно небольшой глубине вдавливания (на уровне 0,04D), поскольку его величина может непрерывно снижаться во время испытаний из-за повреждения материала. Более подробно повреждения материала рассмотрены в работах [11–14]. Исследования по влиянию глубины вдавливания на точность измерений [18] показали, что глубина индентирования 0,13D является достаточной для получения наилучших значений для исследуемых параметров материала.

Согласно [22], различают модуль упругости образца (материала)  $E_s$ , модуль упругости индентора  $E_i$ , приведенный модуль упругости  $E_r = ((1 - \nu_s^2)/E_s + (1 - \nu_i^2)/E_i)^{-1}$  и модуль упругости при индентировании  $E_{IT}$ . Следуя данным [23]:

$$E_{IT} = \frac{1 - \nu_s^2}{1/E_r - (1 - \nu_i^2)/E_i}, \quad (5)$$

здесь  $E_r$  — приведенный модуль упругости в области индентирования;  $\nu_s, \nu_i$  — коэффициенты Пуассона соответствующих материалов;

$$E_r = \frac{S \cdot \sqrt{\pi}}{2 \sqrt{A_p}}, \quad (6)$$

где:

$$A_p = \pi a_c^2, \quad a_c = \sqrt{2Rh_c - h_c^2}. \quad (7)$$

Для  $h_c/R \leq 0.15$  с погрешность менее 2 % можно принять  $a_c = \sqrt{2Rh_c}$ .

Уравнение кривой разгрузки согласно рекомендации [24]:

$$P_e = P_m \left( \frac{h_e - h_p}{h_m - h_p} \right)^\gamma, \quad (8)$$

где  $\gamma$  — экспонента.

Тогда:

$$S = \left. \frac{dP_e}{dh_e} \right|_{h_e=h_m} = \frac{P_m \cdot \gamma}{h_m - h_p}. \quad (9)$$

Согласно [22, п. 10.2.5]:

$$h_c = h_m - 0.75 \frac{P_m}{S} = h_m - \frac{0.75}{\gamma} (h_m - h_p) = 0.5(h_m + h_p). \quad (10)$$

Подставляя уравнения (7), (9), (10) в (6), для приведенного модуля упругости в области индентирования получим:

$$E_r = \frac{3P_m}{4(h_m - h_p)\sqrt{R(h_m + h_p)}}. \quad (11)$$

Тогда модуль упругости материала в области индентирования:

$$E_{mIT} = \frac{1 - \nu^2}{4(h_m - h_p)\sqrt{R(h_m + h_p)} - \frac{1 - \nu_i^2}{3P} E_i}. \quad (12)$$

Согласно концептуальной модели процесса кинетического индентирования сферы, предложенной авторами [17], в процессе нагружения сферы в результате сложных процессов упругой и пластической деформаций в контакте индентора с материалом формируется распределение давления вида (2), которое определяется уравнением (1) кривой нагружения. Для такого случая модуль упругости материала при индентировании:

$$E_m = \frac{1 - \nu^2}{\frac{\pi(h_m - h_p)\sqrt{R(h_m + h_p)}}{K_\beta P} - \frac{1 - \nu_i^2}{E_i}}, \quad (13)$$

где  $K_\beta = K_\beta(\beta) = 2^{2\beta+1}(1+\beta)V(\beta+1, \beta+1)$ ,  $V(\alpha_1, \alpha_2)$  — бета-функция.

Уравнение (12) получено для «герцевского» распределения контактного давления, т. е. для  $\beta = 0.5$ , и является частным случаем уравнения (13), так как  $\pi/K_\beta(0.5) = 4/3$ . Как будет показано далее, для определения значения  $\beta$  необходимо определить экспоненту  $\alpha$  уравнения (1).

Основным «кирпичиком» при построении диаграммы кинетического индентирования является параметр деформационного упрочнения  $q = P_m / (h_p R)$  [15; 19], который при выбранном значении  $P_m$  определяет линейную зависимость Мартенса  $h_{pi}(P_i)$  (прямая OA на рис. 1). В работах М.С. Дрозда и М.М. Матлина с учениками используется аналог  $q$  — пластическая твердость  $HD = q / (2\pi)$ .

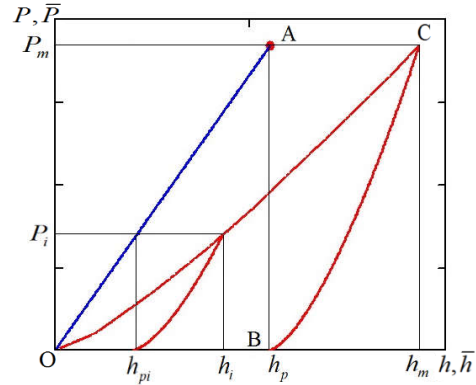


Рис.1. К построению диаграммы кинетического индентирования

До построения диаграммы необходимо определить модуль упругости материала при индентировании, желательно выполнив приведенную выше рекомендацию работы [18]. Изначально, в отличие от работы [25], зависимость  $h(P)$  предполагалось получить с использованием  $a_c$  по уравнению (7), а не приближенно. Однако после сравнения результатов по определению  $\beta$  оказалось, что они изменились всего на 0.2 %, Поэтому использовать точное решение в этом случае не целесообразно и оставляем решение, полученное в [25].

Исходным является основное уравнение индентирования:

$$a_{ci} = \frac{K_\beta}{\pi} \cdot \frac{P_i}{(h_i - h_{pi})E_r}, \quad \text{или}$$

$$(h + h_p)^{0.5}(h - h_p) = \frac{K_\beta P}{\pi R^{0.5} E_r}. \quad (14 \text{ а, б})$$

После дальнейшего преобразования имеем:

$$\left(\frac{h}{h_p} + 1\right)^{0.5} \left(\frac{h}{h_p} - 1\right) = \frac{K_\beta P}{\pi h_p^{1.5} R^{0.5} E_r}. \quad (15)$$

Обозначая  $\frac{h}{h_p} + 1 = y^2$ , представим уравнение (15)

в виде:

$$y^3 - 2y - \frac{K_\beta P}{\pi h_p^{1.5} R^{0.5} E_r} = 0. \quad (16)$$

Для нахождения корня  $y_k(P, \beta)$  кубического уравнения (16) используем решение Кардано: Тогда

$$h(P, \beta) = \frac{P}{qR} (y_k^2(P, \beta) - 1) \text{,} \quad (17)$$

После первого расчета зависимости  $h(P, \beta)$  производим ее аппроксимацию методом наименьших квадратов к виду

$$P = P_m \left( \frac{c_0 h}{h_m} \right)^{c_1}, \quad (18)$$

где  $c_0, c_1 = \alpha$  — коэффициенты аппроксимации, обычно  $c_0 \approx 1.002$ , поэтому его можно принять равным 1. Коэффициент корреляции при этом составляет  $R^2 = 0.99998$ .

Далее рассчитываем  $\beta = \alpha - 1$ , модуль упругости материала при индентировании по уравнению (13) и повторяем процедуру расчета  $h(P)$  и новой аппроксимации и модуля упругости, пока их значения не совпадут. Обычно итерация заканчивается на втором шаге. Следует отметить, что расчетные значения  $h(P)$  при этом не меняются, так как приведенный модуль остается постоянным. Значения  $\beta = \alpha - 1$  нужны для сравнения с искомыми параметрами.

Для построения ветви разгрузки диаграммы используется уравнение (8), в котором  $\gamma$  согласно [25] равно

$$\gamma = \frac{3 - 2\bar{h}_c}{2 - \bar{h}_c}, \quad (19)$$

где  $\bar{h}_c = h_c/R$ ,  $h_c$  – определяется уравнением (10).

**Определение равномерного относительного внедрения.** Уравнение (17) для невосстановленной твердости по Бринеллю в работе [15] является монотонно возрастающим относительно невосстановленной глубины внедрения индентора, поэтому экстремума не имеет.

Многие исследователи рассматривают остаточную лунку как сферическую поверхность радиусом:

$$R' = \frac{h_p^2 - a_s^2}{2h_p}, \quad (20)$$

В относительных величинах ветвь нагружения (рис. 1) можно представить как:

$$\bar{P} = A\bar{h}^\alpha, \quad (21)$$

где  $A = \bar{P}_m \bar{h}^{-\alpha}$ ,  $\bar{P} = \frac{P}{E_r R^2}$ .

С другой стороны, для прямой Мартенса:

$$P = qh_p R, \quad \bar{P} = q_e \bar{h}_p, \quad q_e = q / E_r. \quad (22)$$

Из уравнений (21) и (22) следует:

$$\bar{h}_p = \frac{A\bar{h}^\alpha}{q_e} \quad (23)$$

Запишем выражение для невосстановленной твердости по Бринеллю и преобразуем его:

$$HB_t = \frac{E_r R^2 A \bar{h}^\alpha}{2\pi R'(h_p) h_p}; \quad \frac{HB_t}{E_r} = HB_{te} = \frac{A \bar{h}^\alpha}{2\pi R'(h_p) h_p}; \quad (24 a)$$

$$HB_{te} = \frac{A \bar{h}^\alpha 2 \bar{h}_p}{2\pi(\bar{h}_p^2 + \bar{a}_s^2) \bar{h}_p} = \frac{A}{\pi} \cdot \frac{\bar{h}^\alpha}{(A \bar{h}^\alpha / q_e)^2 + \bar{a}_s^2}. \quad (24 б)$$

Дифференцируя уравнение (24 б) по  $\bar{h}$  и приравняв к нулю, получим:

$$\bar{h}^{2\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha - 1} \cdot (\bar{a}_s q_e / A)^2. \quad (25)$$

Учитывая, что  $q_e / A = qR^2 \bar{h}_m^\alpha / P_m$ , получим выражение для экстремального значения величины относительного внедрения:

$$\bar{h}_u = \left( \frac{\alpha}{\alpha - 1} \right)^{\frac{1}{2\alpha}} \cdot \left( \frac{\bar{a}_s q R^2}{P_m} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \bar{h}_m. \quad (26)$$

Расчеты параметра  $\bar{h}_u$  показали, что для всех рассматриваемых материалов его значение превышает единицу, что не имеет физического смысла. Этот пример мы привели для «любителей» моделировать форму восстановленной лунки сферой.

Так как  $\bar{h}_u$  не может быть экстремальным значением, решением поставленной задачи считаем то относительное внедрение  $\bar{h}$ , которое обеспечит относительный радиус контакта  $\bar{a}_s = \bar{a}_u$ , который определяется по известной формуле Г. О'Нейля:

$$\bar{a}_u = \frac{[m(m-2)]^{0.5}}{m-1}. \quad (27)$$

Геометрически соответствующая значению  $\bar{a}_u$  относительная высота сферического сегмента равна:

$$\bar{h}_{au} = \frac{m-2}{m-1}. \quad (28)$$

Индекс Майера  $m$  определяем по двум точкам:

$$m = \frac{\lg(P_2/P_1)}{\lg(a_2/a_1)}, \quad (29)$$

где  $P_i$ ,  $a_i$  — значения усилий и радиусов восстановленных отпечатков.

Аналогично можно рассчитать индекс  $m_s$ :

$$m_s = \frac{\lg(P_2/P_1)}{\lg(a_{s2}/a_{s1})}, \quad (30)$$

где  $a_{si}$  — значения радиусов невосстановленных отпечатков.

Согласно [25], значения радиусов невосстановленных и восстановленных отпечатков определяются уравнениями:

$$a_{si} = \frac{P_i}{\pi E_r} \frac{K_\beta}{h_i - h_{pi}}, \quad (31)$$

$$a_i = \frac{P_i}{\pi E_r} \left( \frac{K_\beta}{h_i - h_{pi}} - \frac{0.2857}{a_{si}} \right). \quad (32)$$

Из основного уравнения индентирования (14 а) следует:

$$h - h_p = \frac{K_\beta P}{\pi a_s E_r}, \quad h = \frac{P}{qR} + \frac{K_\beta P}{\pi a_s E_r}, \quad (33)$$

$$\bar{h} = \frac{h}{R} = \frac{P}{qR^2} + \frac{K_\beta P}{\pi \bar{a}_s E_r R^2}. \quad (34)$$

Величина относительного внедрения по уравнению (34) должна согласовываться с уравнением (17), описывающим ветвь нагружения, поэтому:

$$\frac{P}{qR^2} + \frac{K_\beta P}{\pi \bar{a}_s E_r R^2} = \frac{h(P, \beta)}{R}, \quad (35)$$

Тогда для обеспечения  $\bar{a}_u$  необходимо определить требуемое значение  $P_u$  из выражения:

$$\frac{P_u}{qR^2} + \frac{K_\beta P_u}{\pi \bar{a}_u E_r R^2} = \frac{h(P_u, \beta)}{R}, \quad (36)$$

Это удобно сделать из уравнения  $F(P_u) = 0$  в среде *Mathcad* с помощью оператора «root»:

$$F(P_u) = \frac{P_u}{qR^2} + \frac{K_\beta P_u}{\pi \bar{a}_u E_r R^2} - \frac{h(P_u, \beta)}{R} = 0. \quad (37)$$

После определения  $P_u$  значения параметра  $\bar{h}_u$  определяют из уравнения (34) или из (17).

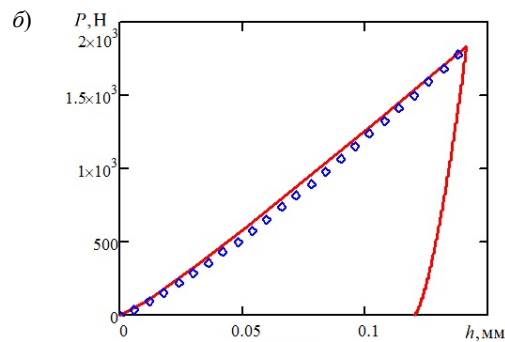
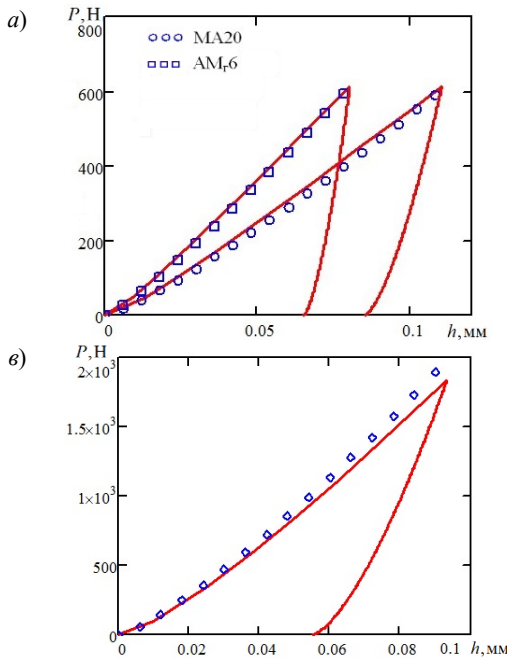
Расчетные диаграммы кинетического индентирования представлены на рис. 2, расчетные значения исследуемых параметров приведены в табл. 1.

**Таблица 1.** Исходные параметры рассматриваемых материалов [15, 19] и дополнительно определенные характеристики индентирования

Материал	$q$ , МПа	$E_m$ , ГПа	$P_m$ , Н	$m$	$\bar{a}_u$	$\bar{h}_{au}$	$\bar{h}_u$	$\beta$	$\frac{\beta - \bar{h}_u}{\beta}$ , %
МА20	5771	34,220	613	2,1486	0,4920	0,1294	0,1340	0,1541	13,1
АМг6	7546	74,152	613	2,1507	0,4947	0,1310	0,1315	0,1288	-2,1
Сталь 45	12262	153,366	1839	2,0941	0,4038	0,0860	0,0899	0,1023	12,1
25Х2МФА	21021	177,384	1839	2,1734	0,5232	0,1478	0,1525	0,1765	13,6
ВТ16	26754	106,700	1839	2,2886	0,6307	0,2239	0,2306	0,2586	10,8
ЭП17	11386	142320	1376	2,0437	0,2863	0,0419	0,0459	0,0511	10,2
35ХВФЮА	10452	177900	1376	2,1066	0,4282	0,0963	0,1035	0,09857	-0,05
ЭИ474	30342	172630	1376	2,1517	0,4961	0,1318	0,1434	0,1559	8,0

**Таблица 2.** Параметры упругопластического тела для расчетов по уравнению (38)

Материал	$E_r$ , ГПа	По уравнению (39)		По уравнению (41)		$A(\varepsilon_y, n)$		$\beta$
		$n$	$\varepsilon_y$	$n$	$\varepsilon_y$	ур. (39)	ур. (41)	
МА20	32,95	0,204	0,0398	0,1516	0,0041	1,23	1,21	0,1541
АМг6	63,04	0,223	0,00222	0,183	0,023	1,209	1,194	0,1288
Сталь 45	99,04	0,1945	0,00163	0,1652	0,00168	1,193	1,182	0,1023
25Х2МФА	177,38	0,1146	0,00370	0,0866	0,00375	1,23	1,221	0,1765
ВТ16	77,82	0,097	0,00756	0,05731	0,00764	1,258	1,259	0,2586



**Рис. 2.** Построенные диаграммы кинетического индентирования для материалов: МА20 и АМг6 (а), сталь 45 (б), ВТ16 (в) и их сравнение с результатами конечно-элементного моделирования [26] (обозначены точками)

**Сравнение с результатами конечно-элементного моделирования.** Для сравнения выбрана конечно-элементная модель внедрения сферы в упругопластическое полупространство [26]. Ветвь нагружения описывается выражениями:

$$\frac{P}{E^* R^2} = e^{-B(\varepsilon_y, n)} \left(\frac{h}{R}\right)^{A(\varepsilon_y, n)}, \quad (38)$$

где  $\varepsilon_y = \sigma_y / E_r$ ,  $\sigma_y$  — предел пропорциональности,  $n$  — экспонента упрочнения.

Если изначально заданы параметры условной диаграммы растяжения  $\sigma_{02}$  и  $\sigma_u$ , то экспоненту упрочнения  $n$  следует определять из выражения:

$$n \ln n - n(1 + \ln(\sigma_{02}/E + 0,002)) - \ln\left(\frac{\sigma_u}{\sigma_{02}}\right) = 0. \quad (39)$$

При известном значении  $n$  предел пропорциональности равен:

$$\varepsilon_y = \left( \frac{\sigma_{02}/E}{(\sigma_{02}/E + 0,002)^n} \right)^{\frac{1}{1-n}}, \quad \sigma_y = \varepsilon_y E. \quad (40)$$

В случае, когда изначально заданы истинные напряжения  $S_{02}$  и  $S_u$ , экспоненту упрочнения  $n$  определяют из выражения:

$$n = \frac{\lg(S_{02}/S_u)}{\lg(0,002/\varepsilon_u)}. \quad (41)$$

Сравнение результатов приведено на рис. 2.

**Обсуждение полученных результатов.** Определимся с термином и назовем относительное внедрение индентора, соответствующее равномерной деформации, «*относительным равномерным внедрением*». Основным объектом исследований являлось определение соответствия относительного равномерного внедрения  $\bar{h}_u$  значению  $\alpha - 1 = \beta$ . Определение других характеристик носило сопутствующий характер. Из представленных в табл. 1 результатов следует, что это верно со средней погрешностью 8.74 %, — вполне хороший результат. Если убрать два лучших результата, то средняя погрешность повысится до 11.3 %, причем в положительную сторону. На взгляд авторов, это может быть связано с игнорированием эффекта *pile-up*, причем сознательно. Предвидя ситуацию, авторы готовят на эту тему материал для публикации с использованием разработанной нами методики. Второй причиной систематической погрешности может быть определение индек-

#### Литература

- Zhang T., Wang S., Wang W. A constitutive model independent analytical method in determining the tensile properties from incremental spherical indentation tests (ISITs) // Int J Mech Sci. 2018. 148. P. 9-19.
- Sun Z. Numerical and analytical study to the uniqueness problem in identification of uniaxial parameters through spherical indentation // Mechanics of Materials. 2022. V. 173. 104429.
- Wang M., Wu J. Identification of plastic properties of metal materials using spherical indentation experiment and Bayesian model updating approach // Int. J. of Mechanical Sciences. 2019. V. 151. P. 733-745.
- Kan Y., Wu Y., Ren L., Chen H. A Simple Method for Measuring Plastic Properties of Power Hardening Metals via the Indentation Curve with a Large Depth // Adv. in Mater. Sci. and Eng. Vol. 2020. 7372807. 8 p.
- Ding Y., Yuan W.-K., Liang X.-M., Wang G.-F., Niu X. Identification of Plastic Properties through Spherical Indentation // Adv. Eng. Mater. 2022. 2200379.
- Chen H., Cai L.-X., Bao C. Equivalent-energy indentation method to predict the tensile properties of light alloys // Materials and Design. 2019. 162. P. 322-330.
- Ogar P., Kushnarev V., Kobzova I. Energy approach to determine mechanical properties of materials from the kinetic diagram of spherical indentation // Mater. Today. Proc. 2019. V. 19. P. 2342-2346.
- Zhang T., Wang S., Wang W. An energy-based method for flow property determination from a single-cycle spherical indentation test (SIT). Int J Mech Sci. 2020. 171. 105369.
- Lu L., Dao M., Kumar P., Ramamurty U., Karniadakis G.E., Suresh S. Extraction of mechanical properties of materials through deep learning from instrumented indentation, Proc. of the National Academy of Sciences 117(13). 201922210.
- Kim Y., Gu G.H., Asghari-Rad P., Noh J., Rho J., Seo M.H., Kim H.S. Novel deep learning approach for practical applications of indentation // Materials Today Adv. 2022. 13. 100207.
- Lee J.-S., Jang J., Lee B.-W., Choi Y., Lee S.G., Kwon D. An instrumented indentation technique for estimating fracture toughness of ductile materials: A critical indentation energy model based on continuum damage mechanics // Acta Materialia. 2006. V. 54. P. 1101-1109.
- Zou B., Guan K.S., Wu S.B. Determination of area reduction rate by continuous ball indentation test // International Journal of Pressure Vessels and Piping. 2016. 139-140. P. 220-227.
- Malicki M., Socha G., Krysztofik J. Detection of early stage of ductile and fatigue damage presented in Inconel 718 alloy using instrumented indentation technique // Open Engineering. 2022. 12. P. 991-1004.
- Yu F., Fang J., Omacht D., Sun M., Li Y. A new instrumented spherical indentation test methodology to determine fracture toughness of high strength steels // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. 2023. V. 124. 103744.
- Матюнин В.М., Марченков А.Ю., Волков П.В., Каримбеков М.А., Жгут Д.А., Петрова М.П., Веремеева Н.О. Преобразование кинетических диаграмм вдавливания сферического индентора в диаграммы растяжения для металлических конструкционных материалов // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2022. Т. 88. № 2. С. 54-63.
- Ogar P.M., Tarasov V.A. Kinetic Indentation Application to Determine Contact Characteristics of Sphere and Elastoplastic Half-Space // Adv. Mater. Research. 2013. V. 664. P. 625-631.
- Ogar P.M., Shilin V.A., Fedorov V.S., Kar'yalaajnen N.V. On the contact pressure distribution during the sphere indentation into an elastic-plastic half-space // Systems. Methods. Technologies. 2022. № 1 (53). P. 7-11.
- Zhang T., Wang S., Wang W. Method to determine the optimal constitutive model from spherical indentation tests // Results in Physics. 2018. V. 8. P. 716-727.
- Matyunin V.M., Marchenkov A.Yu., Abusaif N., Goryachkina M.V., Rodyakina R.V., Karimbekov M.A., Zhgut D.A. Evaluation of Young's modulus of construction materials by

- instrumented indentation using a ball indenter // *Zavod. Lab. Diagn. Mater.* 2021. V. 87. № 8. P. 64-68.
20. Matyunin V.M., Marchenkov A.Yu., Abusaif N., Volkov P.V., Zhgut D.A. Regularities and properties of instrumented indentation diagrams obtained by ball-shaped indenter // *Zavod. Lab. Diagn. Mater.* 2020. V. 86. № 5. P. 43-51.
  21. Матюнин В.М., Марченков А.Ю. Взаимосвязь деформаций и параметров упрочнения металла при растяжении и вдавливании в пластической области // *Заводская лаборатория. Диагностика материалов*, 2016. V. 82. № 9. P. 51-57.
  22. ГОСТ Р 56232-2014. Определение диаграммы «напряжение - деформация» методом инструментального индентирования шара. Введ. 01.03.2016. М.: Стандартинформ, 2016. 38 с.
  23. ГОСТ Р 8.748-2011. Металлы и сплавы. Измерение твердости и других характеристик материалов инструментальным индентированием. Введ. 01.05.2013. М.: Стандартинформ, 2013. 23 с.
  24. Oliver W.C., Pharr G.M. Measurement of hardness and elastic modulus by instrumented indentation: Advances in understanding and refinements to methodology // *Journal of Materials research society*. 2004. V. 19. № 1. P. 3-20.
  25. Огар П.М., Шилин В.А., Карьялайнен Н.В., Обухов З.Д. Математическое описание диаграмм инструментального вдавливания сферой. Основное уравнение индентирования // *Системы. Методы. Технологии*. 2023. № 1 (57). С. 21-27.
  26. Collin J.-M., Mauvoisin G., Pilvin P. Materials characterization by instrumented indentation using two different approaches // *Materials and Design*. 2010. V. 31. P. 636-640.
- References*
1. Zhang T., Wang S., Wang W. A constitutive model independent analytical method in determining the tensile properties from incremental spherical indentation tests (ISITs) // *Int J Mech Sci.* 2018. 148. P. 9-19.
  2. Sun Z. Numerical and analytical study to the uniqueness problem in identification of uniaxial parameters through spherical indentation // *Mechanics of Materials*. 2022. V. 173. 104429.
  3. Wang M., Wu J. Identification of plastic properties of metal materials using spherical indentation experiment and Bayesian model updating approach // *Int. J. of Mechanical Sciences*. 2019. V. 151. P. 733-745.
  4. Kan Y., Wu Y., Ren L., Chen H. A Simple Method for Measuring Plastic Properties of Power Hardening Metals via the Indentation Curve with a Large Depth // *Adv. in Mater. Sci. and Eng.* Vol. 2020. 7372807. 8 p.
  5. Ding Y., Yuan W.-K., Liang X.-M., Wang G.-F., Niu X. Identification of Plastic Properties through Spherical Indentation // *Adv. Eng. Mater.* 2022. 2200379.
  6. Chen H., Cai L.-X., Bao C. Equivalent-energy indentation method to predict the tensile properties of light alloys // *Materials and Design*. 2019. 162. P. 322-330.
  7. Ogar P., Kushnarev V., Kobzova I. Energy approach to determine mechanical properties of materials from the kinetic diagram of spherical indentation // *Mater. Today. Proc.* 2019. V. 19. P. 2342-2346.
  8. Zhang T., Wang S., Wang W. An energy-based method for flow property determination from a single-cycle spherical indentation test (SIT). *Int J Mech Sci.* 2020. 171. 105369.
  9. Lu L., Dao M., Kumar P., Ramamurty U., Karniadakis G.E., Suresh S. Extraction of mechanical properties of materials through deep learning from instrumented indentation, *Proc. of the National Academy of Sciences* 117(13). 201922210.
  10. Kim Y., Gu G.H., Asghari-Rad P., Noh J., Rho J., Seo M.H., Kim H.S. Novel deep learning approach for practical applications of indentation // *Materials Today Adv.* 2022. 13. 100207.
  11. Lee J.-S., Jang J., Lee B.-W., Choi Y., Lee S.G., Kwon D. An instrumented indentation technique for estimating fracture toughness of ductile materials: A critical indentation energy model based on continuum damage mechanics // *Acta Materialia*. 2006. V. 54. P. 1101-1109.
  12. Zou B., Guan K.S., Wu S.B. Determination of area reduction rate by continuous ball indentation test // *International Journal of Pressure Vessels and Piping*. 2016. 139-140. P. 220-227.
  13. Malicki M., Socha G., Krysztofik J. Detection of early stage of ductile and fatigue damage presented in Inconel 718 alloy using instrumented indentation technique // *Open Engineering*. 2022. 12. P. 991-1004.
  14. Yu F., Fang J., Omacht D., Sun M., Li Y. A new instrumented spherical indentation test methodology to determine fracture toughness of high strength steels // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. 2023. V. 124. 103744.
  15. Matyunin V.M., Marchenkov A.YU., Volkov P.V., Karimbekov M.A., Zhgut D.A., Petrova M.P., Veremeeva N.O. Transformation of kinetic diagrams of spherical indenter indentation into stretching diagrams for metallic structural materials // *Industrial laboratory. Materials diagnostics*. 2022. V. 88. № 2. P. 54-63.
  16. Ogar P.M., Tarasov V.A. Kinetic Indentation Application to Determine Contact Characteristics of Sphere and Elastoplastic Half-Space // *Adv. Mater. Researchyu*. 2013. V. 664. P. 625-631.
  17. Ogar P.M., Shilin V.A., Fedorov V.S., Kar'yalajnen N.V. On the contact pressure distribution during the sphere indentation into an elastic-plastic half-space // *Systems. Methods. Technologies*. 2022. № 1 (53). P. 7-11.
  18. Zhang T., Wang S., Wang W. Method to determine the optimal constitutive model from spherical indentation tests // *Results in Physics*. 2018. V. 8. P. 716-727.
  19. Matyunin V.M., Marchenkov A.Yu., Abusaif N., Goryachkina M.V., Rodyakina R.V., Karimbekov M.A., Zhgut D.A. Evaluation of Young's modulus of construction materials by instrumented indentation using a ball indenter // *Industrial laboratory. Materials diagnostics*. 2021. V. 87. № 8. P. 64-68.
  20. Matyunin V.M., Marchenkov A.Yu., Abusaif N., Volkov P.V., Zhgut D.A. Regularities and properties of instrumented indentation diagrams obtained by ball-shaped indenter // *Industrial laboratory. Materials diagnostics*. 2020. V. 86. № 5. P. 43-51.
  21. Matyunin V.M., Marchenkov A.YU. The relationship of deformations and parameters of metal hardening during stretching and indentation in the plastic region // *Industrial laboratory. Materials diagnostics*. 2016. V. 82. № 9. P. 51-57.
  22. ГОСТ R 56232-2014. Determination of the stress-strain diagram by the method of instrumental ball indentation. Введ. 01.03.2016. М.: Стандартинформ, 2016. 38 p.
  23. ГОСТ R 8.748-2011. Metals and alloys. Measurement of hardness and other characteristics of materials by instrumental indentation. Введ. 01.05.2013. М.: Стандартинформ, 2013. 23 p.
  24. Oliver W.C., Pharr G.M. Measurement of hardness and elastic modulus by instrumented indentation: Advances in understanding and refinements to methodology // *Journal of Materials research society*. 2004. V. 19. № 1. P. 3-20.
  25. Ogar P.M., Shilin V.A., Kar'yalajnen N.V., Obuhov Z.D. Mathematical description of diagrams of instrumental indentation by a sphere. The basic indentation equation // *Systems. Methods. Technologies*. 2023. № 1 (57). P. 21-27.
  26. Collin J.-M., Mauvoisin G., Pilvin P. Materials characterization by instrumented indentation using two different approaches // *Materials and Design*. 2010. V. 31. P. 636-640.