

## Глубина погружения ударника в грунт при жесткой остановке и сравнение элементарной теории проникания с другими методами

В.А. Коронатов

Братский государственный университет, ул. Макаренко, 40, Братск, Россия

kortavik@mail.ru

<https://orcid.org/0000-0002-1331-213X>

Статья поступила 01.05.2023, принята 05.05.2023

*Главные отличия элементарной теории проникания от других методов заключаются в следующем: учитывается изменение прочности грунта из-за возникающих трещин от удара при нахождении лобового сопротивления; силовое влияние удара на возможность погружения тела в грунт определяется через сравнение текущего и эталонного ударов по их начальным скоростям; фаза удара должна предшествовать началу возможного проникания; начальная скорость погружения определяется как разность между начальными скоростями текущего и эталонного ударов; отрицается необходимость определения плотности грунтовой среды и фактически доказано, что метод локального взаимодействия ошибочен. Подвергнуты сомнениям и публикации об экспериментальных данных, подтверждающие результаты метода локального взаимодействия. Утверждается, что остановка погружения ударника в грунтовых средах может происходить только в жестком режиме. В отличие от воздушных сред, в момент остановки текущая скорость проникания уменьшится до нулевого значения, изменяясь не непрерывно, а скачком, как при ударе. Перед движущимся по инерции телом перед окончанием погружения возникает препятствие в виде той части грунта, где прочность не уменьшилась до нужной величины. Объясняется это затуханием трещин, приводящим к восстановлению прочности, по мере удаления от места произведенного удара. Получены формулы, устанавливающие связь между глубиной погружения, скоростью или ее обобщенным выражением перед остановкой ударника. Это сделано для ударов — обычного прямого и комбинированного, составляющими которого будут прямой и вращательный удары. Дано объяснение почему вращение ударника приводит к увеличению глубины проникания. Затухающий характер влияния удара на прочность среды принимается в обратно экспоненциальном виде, но несколько иначе, чем это делалось ранее. Дифференциальные уравнения движения ударника, начальные условия и условия для нахождения глубины проникания будут существенно отличаться от того, как это было общепринято записывать в таких случаях.*

**Ключевые слова:** ударник; грунт; проникание; глубина проникания; жесткая остановка; прочность грунта; трещины; лобовое сопротивление; элементарная теория проникания; метод локального взаимодействия.

## The depth of immersion of the striker in the ground at a hard stop and comparison of the elementary theory of penetration with other methods

V.A. Koronotov

Bratsk State University; 40, Makarenko, Bratsk, Russia

kortavik@mail.ru

<https://orcid.org/0000-0002-1331-213X>

Received by 01.05.2023, accepted 05.05.2023

*The main differences between the elementary theory of penetration from other methods are as follows: the change in the strength of the soil due to cracks arising from the impact is taken into account when the drag is found; the force effect of the impact on the possibility of immersion of the body into the ground is determined by comparing the current and reference impacts by their initial velocities; the phase of the impact must precede the beginning of possible penetration; the initial speed of immersion it is defined as the difference between the initial velocities of the current and reference impacts; the necessity of determining the density of the soil medium is denied and it is actually proved that the method of local interaction is erroneous. Publications on experimental data confirming the results of the local interaction method are also questioned. It is argued that stopping the immersion of the drummer in ground environments can only occur in hard mode. Unlike air media, at the moment of stopping, the current penetration rate decreases to zero, changing not continuously, but in a jump, as in a shock. Before the body moving by inertia, an obstacle arises before the end of the dive – in the form of that part of the ground where the strength has not decreased to the desired value. This is explained by the attenuation of cracks, leading to the restoration of strength, as they move away from the place of the impact. Formulas are obtained that establish a relationship between the depth of immersion, speed, or its generalized expression before stopping the drummer. The formulas are used for strikes - the usual direct, and combined, the components of which will be direct and rotational strikes. An explanation is given why the rotation of the drummer leads to an increase in the penetration depth. The attenuating nature of the impact effect on the strength of the medium is taken in an inversely exponential form, but somewhat differently than it was done earlier. The differential equations of the motion of*

*the striker, the initial conditions and the conditions for finding the penetration depth will differ significantly from how it was generally accepted to record in such cases.*

**Keywords:** striker; ground; penetration; penetration depth; hard stop; ground strength; cracks; drag; elementary theory of penetration; method of local interaction.

**Введение.** Для существующих методов моделирования проникания ударника в грунт до недавнего времени не было ясности в понимании физики протекающих процессов, объясняющих возможность или наоборот невозможность погружения тела в грунт в результате нанесенного удара. И главным недостатком этого являлось полное игнорирование возможности образования трещин в грунтовой среде, размеры которых зависят от силы удара. А трещины существенным образом могут влиять на снижение прочностных свойств грунта. Применяемая стереомеханическая теория удара [1; 2] не позволяла определять силу удара, а используемые в механике силы сопротивления — учитывать уменьшение прочности грунтовых сред от возникновения трещин. Раньше было принято использовать аналогию с движением тела в воздушной среде, которая для указанных задач часто заменяется на сжимаемую пластическую среду [3; 4], где возникновение трещин полностью исключалось. Все это послужило причиной для принятия ошибочных допущений в существующих методах и моделях, в том числе и для модели локального взаимодействия (МЛВ) [3; 4], наиболее применяемой в настоящее время. Недавно опубликованная элементарная теория проникания ударника в грунт [5; 6] создавалась, чтобы исправить указанные недостатки прежних методов. Для этого брались за основу совершенно новые принципы для моделирования данного процесса, без использования аналогий с воздушными или сжимаемыми пластическими средами. Данная теория была названа элементарной из-за отсутствия необходимости описывать волновые явления в грунтовой среде, что заметно облегчает ее понимание и математическое описание проникания ударника в грунт.

В статье приведено сравнение элементарной теории проникания с существующими методами. Указаны ошибки прежних методов и моделей, показано, как они были учтены в элементарной теории проникания. Сделаны уточнения аналитического выражения в нахождении силы лобового сопротивления при определении затухающего действия удара на прочность среды. Приведены обоснования возможности жесткой остановки ударника при проникании в грунт. Получены формулы, устанавливающие связь между глубиной погружения, скоростью или ее обобщенным выражением перед окончанием погружения. Сделано это сначала при поступательном движении ударника, а затем полученные результаты обобщены и на случай наличия вращательной составляющей движения — при комбинированном ударе по нормали к поверхности грунта.

**Сравнение элементарной теории проникания с другими методами.** К наиболее распространенным ошибкам существующих методов и моделей, по мнению автора, можно отнести следующие:

1. Модель грунта принималась в виде сжимаемой пластической среды [3; 4], исключая возможность нарушения своей целостности в результате нанесения

удара — что в реальности не подтверждается из-за появления трещин.

2. Лобовое сопротивление со стороны грунта, действующее на ударник, задается в форме Резаля или Понселе [7; 8] по аналогии с тем, как это принято делать для тел, движущихся в воздушных средах. Что предполагает зависимость только от текущей скорости проникания, без учета изменения прочностных свойств грунта. Прочность, если и принималась во внимание, то только в статическом варианте — в виде свободного слагаемого квадратного трехчлена аналитической зависимости для силы лобового сопротивления от скорости погружения [9], но без учета динамики процесса. Не учитывалось, что в результате удара погружение ударника вблизи места нанесения удара будет происходить лучше, чем при удалении от него, а при достаточно большом удалении — может быть и вообще невозможным. Здесь неучтенная динамика восстановления прочности грунта проявляется в виде затухающих трещин. Указанное можно учесть, если определять силу лобового сопротивления, используя нелинейную зависимость от скорости проникания и начальной скорости удара в виде аппроксимации Паде 1-й степени [5; 6]. Отметим, что найденная зависимость имеет ограничение по максимуму, без чего могли возникать сверхвысокие расчетные напряжения грунта, многократно превышающие его предельно-допустимое значение при описании высокоскоростного проникания — столь нереальные результаты получаются иногда [10; 11] при использовании классических методов.

3. Влияние удара на грунт в МЛВ пытаются учесть через изменение плотности по аналогии с тем, как это делается для воздушных сред [3; 4]. Что делается некорректно, так как в грунтах могут возникать трещины. А наличие трещин будет говорить о нарушении гипотезы неразрывности и однородности среды, что лишает обоснованности применение самих уравнений механики сплошной среды, используемых для этих целей. Плотность не будет здесь играть той определяющей роли, какая отводится ей для воздушных сред, в том числе и для сжимаемых пластических сред, где возникновение трещин исключалось. *По мнению автора, согласно выше-сказанному, МЛВ для рассматриваемых задач следует признать ошибочным. А прежние результаты, полученные с помощью этого метода, должны подлежать пересмотру.*

4. Фаза удара совмещалась с начальной фазой погружения ударника для того, чтобы начальную скорость погружения приравнять к начальной скорости удара [3; 4; 10–20]. Что было необходимо для определения начальных условий для дифференциального уравнения проникания, другого способа определения начальной скорости погружения не было. Что ошибочно и приводит к такому противоречию: при слабом ударе погружение может и не начаться, а начальная скорость проникания, тем не менее, будет отлична от нуля и приравнена к начальной

скорости такого удара. Это говорит о том, что фазы удара и начала проникания должны отделяться друг от друга по времени.

5. Применение стереомеханической теории Ньютона [1; 2] для рассматриваемых задач было затруднительно из-за отсутствия возможностей определять силу удара. Нахождение этой силы или ее влияние на прочность грунтовой среды обсуждать было не принято, а о том, как это следует делать — общепризнанного понимания нет.

6. Без нахождения силы удара учитывать его влияние на возможность погружения тела в грунт не удавалось. В частности, определять, при каком ударе может произойти погружение, а при каком — нет. Из-за этого в МЛВ [3; 4] принималось предположение, что погружение начнется при любом высокоскоростном ударе, а влияние удара пытаются учесть через изменение плотности среды [3; 4] — но это, как уже отмечалось, будет некорректно из-за возникающих трещин.

7. Возможность жесткой остановки ударника в конце погружения даже не обсуждалась — а ведь это, как оказалось, является единственно возможным вариантом, что будет показано ниже. Возможность мягкой остановки, обычной для движущихся тел в воздушных средах, в грунтах выполняться не будет.

Случай комбинированного удара, возникающего при наличии вращательной составляющей движения ударника [6], раньше фактически не обсуждался из-за отсутствия возможностей предсказать, когда проникание начнется с вращением или без него, и с какими начальными скоростями погружения и вращения это будет происходить. Поэтому приводимое ниже сравнение методов будет касаться вопросов проникания только при прямом ударе.

Критерием совершенства принятых моделей и методов, как известно, являются экспериментальные факты, которые подтверждают или наоборот опровергают теоретические выводы. А все перечисленные выше ошибочные допущения говорят о несовершенстве применяемых методов и о возможности, скорее всего, больших расхождений теоретических результатов с экспериментальными данными, чем об их схожести. И как раз этого в существующих публикациях автор так и не увидел. Например, в статьях Нижегородской школы [14–16], обладающей солидной экспериментальной базой, наоборот неоднократно подчеркивалось хорошее совпадение результатов МЛВ с полученными экспериментальными данными. Ожидаемые большие расхождения никем не фиксировались, существуют лишь публикации с сомнительными утверждениями малости таких различий. Автору данной статьи к таким утверждениям приходится относиться с большим недоверием. Трудно ожидать иного при столь явных изъянах теории, ее несовершенстве. Тем более что вышеперечисленные сомнительные допущения будут приводить к следующим серьезным ошибкам и неточностям тематического описания самого процесса проникания:

- в записи исходного вида дифференциального уравнения — для силы лобового сопротивления раньше никак не отображалось влияние удара на прочность грунта [3; 4; 10–20], а попытки делать это через плотность среды сомнительна;

- из-за возникающих трещин будут бесполезны уточняющие значения плотности среды — что являлось главным в применении МЛВ [3; 4];

- в задании начальных условий к дифференциальному уравнению проникания начальная скорость погружения не будет равна начальной скорости удара — как это раньше принималось [3; 4; 10–20];

- в отсутствии возможностей предсказать, когда может или наоборот не может начаться проникание, а значит — когда следует использовать дифференциальное уравнение динамики, а когда — условие статического равновесия [3; 4; 10–20];

- в предположении о возможности только мягкой остановки ударника при завершении погружения [3; 4; 10–20] — такого в грунтах наблюдаться не может, возможна наоборот только жесткая остановка, что может заметно влиять на нахождение глубины проникания.

На все перечисленное здесь обращалось внимание автором раньше, в созданной элементарной теории проникания ударника в грунт, которая была опубликована около двух лет назад. В элементарной теории проникания дано более ясное осмысление физики происходящих процессов, что в результате позволило добиться понимания в следующем:

- основной причиной погружения тела в грунт является появление трещин достаточной величины [5; 6], приводящих к необходимому снижению прочности грунта — такой причиной не может быть просто сам факт нанесения удара, что фактически раньше подразумевалось [3; 4; 10–20], ведь удар по силе может быть и слабым;

- фаза удара по времени должна предшествовать началу проникания [5; 6], создавая необходимую потерю прочности среды в виде возникающих трещин — нужную для погружения;

- влияние текущего удара на прочность среды можно учитывать не непосредственно через его силу — что не позволяет делать стереомеханическая теория Ньютона [1; 2], а через сравнение с вводимым эталонным ударом [5; 6] по их начальным скоростям;

- по значению начальной скорости текущего удара можно заранее предопределять какой удар будет эффективным, при котором погружение начнется, а какой — холостым, когда погружение будет невозможно [5; 6];

- начальную скорость проникания ударника в грунт следует определять как разницу между начальными скоростями текущего эффективного удара и эталонного — в элементарной теории проникания это вводится аксиоматически [5; 6], но может быть и обосновано с помощью теории Герца [5];

- остановку ударника в конце погружения следует ожидать только в жестком режиме, а не в привычном мягком — как это считалось раньше;

- к публикациям об экспериментальных данных (например [14–16]), где подтверждаются результаты МЛВ, следует относиться критически — основанием для этого являются большие расхождения в сравнении принимаемых допущений прежних моделей с реальными свойствами грунтов.

Дождаться какой-либо реакции специалистов в данной области, к примеру тех же нижегородцев, кото-

рым для ознакомления направлялись полученные результаты исследований, так и не получилось. Получен был лишь ответ, что присылаемый материал им не интересен. И это несмотря на то, что в статьях автора содержалась прямая критика их подхода [5; 6]. А ведь, казалось бы, для разработчиков традиционных методов трудно себе представить более интересную тему, как возможность создания принципиально новых подходов для решения указанных задач. Тем более, когда указываются многочисленные изъяны прежних методов и пути их исправления [5; 6]. Создалось впечатление, что специалисты, до которых автор пытался достучаться, заняли позицию непререкаемых гуру, мнение которых абсолютно и не подлежит обсуждению. Но это уже будет не Наука...

**Уточнение аналитического вида для силы лобового сопротивления.** Для силы лобового сопротивления ударника ранее была введена формула [5]:

$$F_c = F_0 [2 - \exp(-\alpha x)] \frac{\dot{x} + \Delta}{\dot{x} + bV_- + \Delta}. \quad (1)$$

Здесь  $F_0$  — наибольшая сила лобового сопротивления, подлежащая определению;  $b, \Delta$  — коэффициенты аппроксимации, определяемые экспериментально;  $V_-$  — скорость тела в начале прямого удара, которая считается прямо пропорциональной силе удара;  $x$  — координата проникания (погружения) ударника, отсчитываемая от поверхности грунта вглубь; точкой  $\langle \cdot \rangle$  обозначается дифференцирование по времени  $t$ . Используется гипотеза о возникновении трещин в результате произведенного удара, приводящего к изменению прочности грунта в близлежащей области. Величина таких трещин, а значит, и уменьшение прочности грунта характеризуется силой удара. Аналитическое выражение  $2 - e^{-\alpha x}$  — один из возможных вариантов задания переменного коэффициента пропорциональности, ранее принимаемая в элементарной теории проникания для задания обратно экспоненциального закона затухания потери прочности грунта при удалении от места удара; здесь  $\alpha$  — параметр затухания, определяемый экспериментально. Вместо формулы (1) для силы лобового сопротивления позднее была введена качественно эквивалентная нелинейная зависимость от скорости проникания  $\dot{x}$  и начальной скорости удара  $V_-$  в виде аппроксимации Паде 1-й степени [21]:

$$F_c = F_0 \frac{\dot{x} + \Delta}{\dot{x} + bV_- \exp(-\alpha x) + \Delta}, \quad (2)$$

которая также учитывает обратно экспоненциальный закон затухания прочности грунта, но уже в другом, более удобном для применения виде. Что недавно было предложено автором при моделировании похожего процесса [21] — возможности погружения буровой колонны в грунт при завершении возможного кратковременного отрыва от забоя скважины, завершающегося ударом.

**Определение глубины проникания ударника в грунт при жесткой остановке.** Согласно элементар-

ной теории проникания ударника в грунт [5; 6], под эффективным ударом следует понимать такой удар, после которого начинается погружение тела. А под холостым ударом — удар, не способный привести к началу погружения. Такие удары разделяются эталонным ударом — наибольшим по силе из возможных холостых ударов. Сила ударов считается прямо пропорциональной начальной скорости  $V_-$  удара. Как оказалось, этого будет вполне достаточно для определения силового влияния ударника на грунт, если предварительно ввести эталонный удар и сравнивать его с текущим ударом по их начальным скоростям [5; 6].

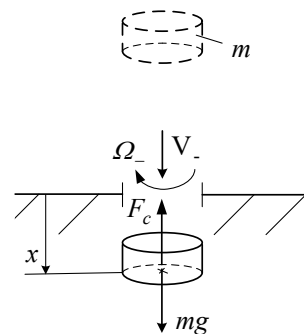
**I. Определение глубины проникания ударника в грунт в результате прямого удара.** Будем полагать, что ударник движется поступательно перпендикулярно к поверхности грунта. Дифференциальное уравнение погружения ударника массы  $m$  без учета бокового трения после нанесения эффективного удара (см. рис.) с начальной скоростью  $V_-$  имеет вид:

$$\ddot{x} = g \left( 1 - n_1 \frac{\dot{x} + \Delta}{\dot{x} + bV_- \exp(-\alpha x) + \Delta} \right) \quad (3)$$

с начальными условиями:

$$x_0 = 0; \quad \dot{x}_0 = V_- - V_{*}, \quad (4)$$

где  $V_{*} = \frac{\Delta}{b}(n_1 - 1)$  — начальная скорость эталонного удара, нахождение которой показано в [5];  $n_1 = \sigma_1 / \sigma$  — запас прочности грунта от действия силы тяжести данного ударника;  $\sigma = mg/S$  — обычное статическое нормальное напряжение грунта, возникающее под действием силы тяжести ударника;  $\sigma_1$  — предельно допустимое статическое нормальное напряжение для данного грунта, определяемое экспериментально;  $S$  — площадь торцевого сечения ударника. Силами бокового трения для простоты здесь пренебрегаем, считая, что боковая поверхность ударника имеет площадь много меньше единицы.



**Рис.** Проникание ударника в грунт при ударах — прямом ( $V_- > 0; \Omega_- \equiv 0$ ) и комбинированном ( $V_- > 0; \Omega_- \neq 0$ )

Учет прочности грунта должен говорить о том, что остановка погружения ударника в грунтовых средах может происходить только в жестком режиме. Это проявляется в том, что, в отличие от движения в воздушных средах, в момент остановки текущая скорость проникания, достигнув некоторого конечного значе-

ния, уменьшится до нуля, изменяясь не непрерывно, а скачком, как при ударе. Объясняется это тем, что перед движущимся по инерции телом перед окончанием погружения возникает препятствие в виде той части грунта, где прочность не смогла уменьшиться до нужной величины из-за затухания трещин, приводящего к восстановлению прочности. В грунтовых средах такое будет наблюдаться всегда, отличаться может лишь сила удара, которая будет прямо пропорциональна конечной скорости проникания перед остановкой ударника — она будет являться начальной скоростью такого микроудара. Микроудар остановки будет тем сильнее, чем больше будет конечная скорость проникания перед остановкой при неизменном законе затухания трещин. Учет такого микроудара может заметно влиять на нахождение глубины проникания. Отсутствие микроудара остановки может наблюдаться лишь в случае полного разрушения грунтовой среды, что здесь не рассматривается. А мягкая остановка произойти не может из-за проявления прочностных свойств грунта. Затухания трещин рано или поздно приводят к тому, что грунт с восстановленной прочностью, пусть даже и не полностью, не сможет быть преодолен телом в результате микроудара остановки. Для наглядности такое можно сравнить со скольжением тела по инерции вдоль шероховатой плоской поверхности, когда размеры шероховатостей увеличиваются перед движущимся телом — здесь также будет невозможна мягкая остановка. Заметим, что жесткую остановку следовало бы предусматривать и при скольжении с сухим трением, что не делается. Для этого необходимо дополнить применение закона Амонтона – Кулона наличием микроудара остановки.

Для возможности жесткой остановки будем полагать, что перед окончанием погружения текущая скорость  $\dot{x}$  достигнет некоторого конечного значения  $\dot{x}_* > 0$  на заранее не известной глубине  $x_* = x$ . Их предполагаемые значения надо определять в процессе численного интегрирования уравнения (3), а для ответа на вопрос о том, какая из текущих скоростей  $\dot{x} > 0$  будет соответствовать начальной скорости микроудара остановки, нужно ввести дополнительное условие. Для этого примем во внимание, что такой микроудар по силе должен быть равным эталонному удару для грунта на текущей глубине  $x_* = x$ . И в результате действия микроудара остановки с начальной скоростью  $\dot{x}_*$ , и с учетом исходного удара с начальной скоростью  $V_-$ , должно выполняться:

$$mg - F_0 \frac{\Delta}{b[V_- \exp(-\alpha x_*) + \dot{x}_*] + \Delta} = 0; \Rightarrow$$

$$mg - F_0 \frac{\Delta}{k_*} = 0; \Rightarrow F_0 = k_* mg.$$

Здесь  $k_* = 1 + \frac{b}{\Delta} [V_- \exp(-\alpha x_*) + \dot{x}_*]$  — коэффициент динамичности, определяющий влияние микроудара остановки на прочность грунта на глубине  $x_* = x$ , с учетом действия исходного удара. Откуда следует, что:

$$\sigma - k_* \frac{\sigma}{k_*} = 0 \Rightarrow \sigma_\partial = \frac{\sigma}{k_*} \Rightarrow \sigma_{\partial 1} = \frac{\sigma_1}{k_*}.$$

Здесь  $k_* = 1 + \frac{b}{\Delta} [V_- \exp(-\alpha x_*) + \dot{x}_*]$  — критическое значение коэффициента динамичности, превышение которого позволит ударнику продолжить проникание в данный грунт под действием микроудара остановки с учетом затухающего действия исходного удара. Для остановки должно выполняться:  $\sigma_{\partial 1} \geq \sigma$ . Откуда следует, что:

$$\dot{x}_* = \frac{\Delta}{b} (n_1 - 1) - V_- \exp(-\alpha x_*) > 0 \quad (5)$$

Равенство (5) связывает между собой текущую скорость  $\dot{x}_*$  и координату  $x_*$  погружения в момент жесткой остановки ударом;  $x_*, \dot{x}_*$  — должны определяться из дифференциального уравнения (3) с начальными условиями (4), а равенство (5) является дополнительным условием для их нахождения. Заметим, что до момента микроудара остановки будет всегда выполняться  $\dot{x} > \dot{x}_*$ . Условие (5) можно использовать в качестве события для нахождения величин  $x_*, \dot{x}_*$  с заданной точностью при численном интегрировании дифференциального уравнения проникания (3) в системе *MatLab* с помощью решателей.

**II. Определение глубины проникания ударника в грунт при наличии вращения.** Здесь будем рассматривать более общий случай проникания — в результате комбинированного удара [6]. Считается, что, как и ранее, движение тела будет направлено по нормали к поверхности грунта. Тогда, согласно [6], с учетом обратно экспоненциального закона затухания прочности грунта в той форме, как это было сделано в (2), сила лобового сопротивления запишется так:

$$F_c = F_0 \frac{\dot{x} + \Delta}{\dot{x} + b(V_- + aR\Omega_-) \exp(-\alpha x) + \Delta}. \quad (6)$$

Здесь, помимо ранее введенных обозначений:  $\Omega_-$  — начальная угловая скорость вращательной составляющей удара;  $V_- + aR\Omega_-$  — обобщенная начальная скорость комбинированного удара, состоящего из прямого и вращательного составляющих этого удара [6], где коэффициент  $a$  определяет, какая часть от силы вращательной составляющей удара затрачивается на образование продольных трещин, что позволит учитывать его влияние на изменение прочности среды в продольном направлении. Такой вид начальной обобщенной скорости берется из предположения, что комбинированный удар приводит к потере прочности грунта в результате суммарного действия составляющих удара — прямого и вращательного. Предполагается также, что у ударника отсутствуют острые части, действие которых могли бы приводить к уменьшению прочности грунта при наличии вращательной составляющей движения. Дифференциальные уравнения погружения и вращательной составляющей движения для ударника будут иметь вид:

$$\begin{cases} \ddot{x} = g[1 - n_1 G(t)], \text{ if } \dot{x} > 0; \\ I\ddot{\phi} = -\rho_0 m g n_1 G(t) \text{ sign } \dot{\phi}, \text{ if } \dot{\phi} \neq 0; \\ \dot{\phi} \equiv 0, \text{ if } \dot{\phi} = 0, \end{cases} \quad (7)$$

с начальными условиями:  $x_0 = 0; \varphi_0 = 0$ , а  $\dot{x}_0, \dot{\phi}_0$  — начальные скорости соответственно для поступательной и вращательной составляющих движения ударника подлежат определению в зависимости от силы исходного комбинированного удара.

Здесь  $G(t) = \frac{\dot{x} + \Delta}{\dot{x} + b(V_- + aR\Omega_-) \exp(-\alpha x) + \Delta}$ ;  $I$  —

осевой момент инерции;  $\rho$  — удельный коэффициент момента вращения на единицу давления:

$$\rho = \begin{cases} \rho_0 \text{ sign } \dot{\phi}, \text{ if } \dot{\phi} \neq 0; \\ [-\rho_1, \rho_1], \text{ if } \dot{\phi} \equiv 0. \end{cases} \quad (8)$$

Пользуясь методикой, приведенной в работах [6; 21], начальная скорость для эталонного комбинированного удара определяется так:

$$(V_- + aR\Omega_-)_* = \frac{\Delta}{b}(n_1 - 1), \quad (9)$$

а начальная обобщенная скорость комбинированного удара как:

$$\dot{x}_0 + aR\dot{\phi}_0 = V_- + aR\Omega_- - (V_- + aR\Omega_-)_*. \quad (10)$$

Заметим, что для начала проникания ударника в грунт необходимо, чтобы  $V_- + aR\Omega_- > (V_- + aR\Omega_-)_*$ .

Для определения начальных скоростей  $\dot{x}_0, \dot{\phi}_0$  по отдельности, что необходимо для интегрирования системы (7), воспользуемся теоремой импульсов для составляющих комбинированного удара в момент соприкосновения ударника с грунтом, когда  $x = 0$ , а также связью между нормальным  $S_n$  и касательным  $S_\tau$  ударными импульсами в соответствии с гипотезой Рауса, что приводит к системе уравнений:

$$\begin{cases} m\dot{x}_0 - mV_- = S_n; \\ I\dot{\phi}_0 - I\Omega_- = S_\tau; \\ S_\tau = \rho S_n. \end{cases} \quad (11)$$

решая которую, с учетом равенства (10) и введя обозначение  $q = m/I$ , получим, в зависимости от силы комбинированного удара (начальных скоростей для составляющих удара), такие результаты:

а) Начало погружения ударника с вращением, что может произойти, когда:

$$V_- > \frac{1}{1 + \rho_0 R a q} \frac{\Delta}{b} (n_1 - 1); \quad \Omega_- > \frac{\rho_0 q}{1 + \rho_0 R a q} \frac{\Delta}{b} (n_1 - 1).$$

Тогда начальные скорости погружения и вращения ударника будут равны:

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= V_- - \frac{1}{1 + \rho_0 R a q} \frac{\Delta}{b} (n_1 - 1); \\ \dot{\phi}_0 &= \dot{\phi}_- - \frac{\rho_0 q}{1 + \rho_0 R a q} \frac{\Delta}{b} (n_1 - 1). \end{aligned}$$

б) Вращение ударника без погружения, что может произойти, когда:

$$V_- \leq \frac{1}{1 + \rho_0 R a q} \frac{\Delta}{b} (n_1 - 1); \quad \Omega_- > \frac{\rho_0 q}{1 + \rho_0 R a q} \frac{\Delta}{b} (n_1 - 1).$$

Тогда начальные скорости равны:

$$\dot{x}_0 = 0; \quad \dot{\phi}_0 = \Omega_- - \rho_0 q V_-.$$

с) Погружение ударника без вращения, что может произойти, когда:

$$V_- > \frac{1}{1 + \rho_1 R a q} \frac{\Delta}{b} (n_1 - 1); \quad \Omega_- \leq \frac{\rho_1 q}{1 + \rho_1 R a q} \frac{\Delta}{b} (n_1 - 1).$$

Тогда начальные скорости равны:

$$\dot{x}_0 = V_- + aR\Omega_- - \frac{\Delta}{b} (n_1 - 1); \quad \dot{\phi}_0 = 0.$$

д) Остановка вращения ударника без погружения, что может произойти, когда:

$$V_- \leq \frac{1}{1 + \rho_1 R a q} \frac{\Delta}{b} (n_1 - 1); \quad \Omega_- \leq \frac{\rho_1 q}{1 + \rho_1 R a q} \frac{\Delta}{b} (n_1 - 1).$$

Тогда начальные скорости равны:  $\dot{x}_0 = 0; \dot{\phi}_0 = 0$ .

Для рассматриваемой здесь задачи выделяем полученные начальные скорости в случаях а) и с); другие значения здесь не будут представлять интереса, так как для них исключается возможность проникания тела в грунт. Выделенные значения следует брать за основу при записи начальных условий для системы уравнений (7) в окончательном виде.

Далее, аналогично тому, как это было сделано в пункте I, для комбинированного микроудара остановки запишем условие:

$$m g - F_0 \frac{\Delta}{b[(V_- + aR\Omega_-) \exp(-\alpha x_*) + (\dot{x}_* + aR\dot{\phi}_*)] + \Delta} = 0,$$

откуда следует, что:

$$\sigma - k_* \frac{\sigma}{k_*} = 0 \Rightarrow \sigma_\partial = \frac{\sigma}{k_*} \Rightarrow \sigma_{\partial 1} = \frac{\sigma_1}{k_*},$$

где  $k_* = 1 + \frac{b}{\Delta} [(V_- + aR\Omega_-) \exp(-\alpha x_*) + (\dot{x}_* + aR\dot{\phi}_*)]$

$x_*, \dot{x}_*, \dot{\phi}_*$  — предполагаемые глубина, скорость проникания и угловая скорость, через которые будет определяться начальная обобщенная скорость  $\dot{x}_* + aR\dot{\phi}_*$  для комбинированного микроудара остановки; их предполагаемые значения должны вычисляться в процессе численного интегрирования. Для нахождения дополнительного условия их нахождения примем во внимание, что в момент остановки должно выполняться:  $\sigma_{\partial 1} \geq \sigma$ .

Откуда находим искомое дополнительное условие для их нахождения:

$$(\dot{x}_* + aR\dot{\phi}_*) = \frac{b}{\Delta} (n_1 - 1) - (V_- + aR\Omega_-) \exp(-\alpha x_*). \quad (12)$$

Полученное равенство (12) связывает между собой текущие скорости  $\dot{x}_*, \dot{\phi}_*$  и координату  $x_*$  погружения в момент жесткой остановки ударом;  $x_*, \dot{x}_*, \dot{\phi}_*$  — должны определяться из дифференциального уравнения (7) с соответствующими начальными условиями в процессе численного счета. Численный счет следует прекратить, как только будет достигнуто выполнение равенства (12) с заданной точностью.

Следует заметить, что, согласно записанным уравнениям (7), угловая скорость  $\dot{\phi}$  вращения напрямую не влияет на поступательную составляющую движения ударника. Тем не менее, ее возрастание будет способствовать увеличению глубины погружения, если учитывать микроудар остановки. Действительно, для микроударов одинаковой силы, величина которой пропорциональна обобщенной скорости  $\dot{x}_* + aR\dot{\phi}_*$ , увеличение  $\dot{\phi}_*$  подразумевает уменьшение  $\dot{x}_*$  - чего можно добиться изменяя соответствующим образом  $\Omega_-$  и  $V_-$  для составляющих исходного удара. Согласно первому уравнению системы (7), такое уменьшение  $\dot{x}_*$  приводит к возрастанию глубины погружения  $x_*$ , предполагая неизменность  $V_- + aR\Omega_-$ . Наблюдения это подтверждают: вращающийся ударник проникает в грунт на большую глубину, чем не вращающийся или вращающийся с меньшей угловой скоростью. Прежние предположения о мягкой остановке погружения указанное объяснить не позволяет.

Заметим, что условие (12) можно будет использовать в качестве события для определения искомых величин в процессе численного интегрирования системы дифференциальных уравнений (7) в системе *MatLab*. Здесь возможны варианты, когда вращение ударника заканчивается, а погружение еще нет, или наоборот —

#### Литература

1. Гольдсмит В. Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел. М.: Изд-во лит. по строительству, 1985. 448 с.
2. Пановко Я.Г. Основы прикладной теории колебаний и удара. Л.: Машиностроение (Ленингр. отделение), 1976. 320 с.
3. Сагомоян А.Я. Проникание. М.: Изд-во МГУ, 1974. 299 с.
4. Баженов В.Г., Котов В.Л. Математическое моделирование нестационарных процессов удара и проникания осесимметричных тел и идентификация свойств грунтовых сред. М.: Физматлит, 2011. 208 с.
5. Коронатов В.А. Элементарная теория проникания ударника в твердые грунтовые среды при однократном ударе, с учетом возникающих трещин // Системы. Методы. Технологии. 2021. № 1 (49). С. 25-33.
6. Коронатов В.А. Обобщение элементарной теории проникания в грунтовые среды при однократном ударе на случай вращающегося ударника // Системы. Методы. Технологии. 2022. № 1 (53). С. 21-29.
7. Resal H.A. Sur la penetration dun projectile dans les semi-fluides et les solides, C.R. Acad. Sci. Paris, 120, 1895, 397.
8. Poncelet J.V. Traite de mecanique industrielle. 2nd Edition. Bruges, J. Schiwell, 1844.
9. Euler L. Neue Grundsätze der Artillerie. Reprinted as Eulers Opera Omnia, Berlin, V.G. Teubner, 1922.
10. Велданов В.А., Федоров С.В. Особенности поведения грунта на границе контакта с недеформируемым ударником при проникании // Прикладная механика и техническая физика. 2005. Т. 46. № 6 (274). С. 116-127.
11. Allen W.A., Mayfield E.B. Morrison H.L. Dynamics of a projectile penetrating sand // J. Appl. Phys. 1957. V. 28. № 3. P. 370-376.
12. Тарасов В.Н., Бояркина И.В., Коваленко М.В. Теория удара в строительстве и машиностроении. М.: Изд-во АСВ, 2006. 336 с.
13. Аптуков В.Н., Фонарев А.В. Приближенная оценка глубины проникания сваи в грунт при многократном ударе // Вестн. Пермского ун-та. Математика. Механика. Информатика. 2010. Вып. 2 (2). С. 41-45.
14. Котов В.Л., Баландин В.В., Брагов А.М., Линник Е.Ю., Баландин В.В. Применение модели локального взаимодействия для определения силы сопротивления внедрению ударников в песчаный грунт // Прикладная механика и техническая физика. 2013. Т. 54. № 4 (320). С. 114-125.
15. Баженов В.Г., Брагов А.М., Константинов А.Ю., Котов В.Л. Сравнительный анализ методов моделирования проникания и плоскопараллельного движения конических ударников в грунтовой среде // Прикладная механика и техническая физика. 2015. Т. 56. № 3 (331). С. 44-54.
16. Котов В.Л., Брагов А.М., Баландин В.В., Константинов А.Ю., Баландин В.В. Двусторонние оценки силы сопротивления прониканию конуса в мерзлый грунт // Прикладная механика и техническая физика. 2021. Т. 62. № 1 (365). С. 125-133.
17. Велданов В.А., Марков В.А., Пусев В.И., Ручко А.М., Сотский М.Ю., Федоров С.В. Расчет проникания недеформируемых ударников в малопрочные преграды с использованием данных пьезоакселерометрии // Журнал технической физики. 2011. Т. 81. № 7. С. 94-104.
18. Дубинский А.В. Формулы для расчета глубины проникания ударников различной формы в анизотропные преграды // Вестн. Пермского ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2020. № 3 (50). С. 34-40.
19. Dubinsky A.V. Explicit formula for depth of penetration of cone-nosed impactor into anisotropic shields // Проблемы прочности и пластичности. 2020. Т. 82. № 1. С. 100-106.
20. Бивин Ю.К., Симонов И.В. Механика динамического проникания в грунтовую среду // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2010. № 6. С. 157-191.
21. Коронатов В.А. Крутильно-продольные автоколебания бурильной колонны с долотом дробяще-скальвающего действия при постоянном натяжении каната подвеса //

Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. 2023. № 1. С. 45-60.

### References

- Gol'dsmit V. Udar. Theory and physical properties of colliding bodies. M.: Izd-vo lit. po stroitel'stvu, 1985. 448 p.
- Panovko YA.G. Fundamentals of the applied theory of vibrations and impact. L.: Mashinostroenie (Leningr. otdelenie), 1976. 320 p.
- Sagomonyan A.YA. Penetration. M.: Izd-vo MGU, 1974. 299 p.
- Bazhenov V.G., Kotov V.L. Mathematical modeling of unsteady processes of impact and penetration of axisymmetric bodies and identification of properties of soil media. M.: Fizmatlit, 2011. 208 p.
- Koronatov V.A. Elementary theory of penetration of a striker into solid ground media with a single impact, taking into account the cracks that arise // Systems. Methods. Technologies. 2021. № 1 (49). P. 25-33.
- Koronatov V.A. Generalization of the elementary theory of penetration into ground media with a single impact in the case of a rotating impactor // Systems. Methods. Technologies. 2022. № 1 (53). P. 21-29.
- Resal H.A. Sur la penetration dun projectile dans les semi-fluides et les solides, C.R. Acad. Sci. Paris, 120, 1895, 397.
- Poncelet J.V. Traite de mecanique industrielle. 2nd Edition. Bruges, J. Schiwell, 1844.
- Euler L. Neue Grundsätze der Artillerie. Reprinted as Eulers Opera Omnia, Berlin, B.G. Teubner, 1922.
- Veldanov V.A., Fedorov S.V. Features of soil behavior at the boundary of contact with a non-deformable impactor during penetration // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2005. V. 46. № 6 (274). P. 116-127.
- Allen W.A., Mayfield E.B. Morrison H.L. Dynamics of a projectile penetrating sand // J. Appl. Phys. 1957. V. 28. № 3. P. 370-376.
- Tarasov V.N., Boyarkina I.V., Kovalenko M.V. The theory of impact in construction and mechanical engineering. M.: Izd-vo ASV, 2006. 336 p.
- Aptukov V.N., Fonarev A.V. Approximate estimation of the depth of penetration of the pile into the ground with repeated impact // Bulletin of Perm state university. Mathematics. Mechanics. Information science. 2010. Vyp. 2 (2). P. 41-45.
- Kotov V.L., Balandin V.V., Bragov A.M., Linnik E.YU., Balandin V.V. Application of the local interaction model to determine the resistance force to the introduction of strikers into sandy soil // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2013. V. 54. № 4 (320). P. 114-125.
- Bazhenov V.G., Bragov A.M., Konstantinov A.YU., Kotov V.L. Comparative analysis of methods for modeling penetration and plane-parallel motion of conical impactors in a ground environment // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2015. V. 56. № 3 (331). P. 44-54.
- Kotov V.L., Bragov A.M., Balandin V.V., Konstantinov A.YU., Balandin V.V. Two-sided estimates of the resistance force to the penetration of a cone into frozen soil // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2021. V. 62. № 1 (365). P. 125-133.
- Veldanov V.A., Markov V.A., Pusev V.I., Ruchko A.M., Sotskij M.YU., Fedorov S.V. Calculation of penetration of non-deformable strikers into low-strength obstacles using piezoaccelerometry data // Technical Physics. 2011. V. 81. № 7. P. 94-104.
- Dubinskij A.V. Formulas for calculating the penetration depth of various-shaped strikers into anisotropic barriers // Bulletin of Perm state university. Mathematics. Mechanics. Information science. 2020. № 3 (50). P. 34-40.
- Dubinsky A.V. Explicit formula for depth of penetration of cone-nosed impactor into anisotropic shields // Problems of Strength and Plasticity. 2020. V. 82. № 1. P. 100-106.
- Bivin YU.K., Simonov I.V. Mechanics of dynamic penetration into the ground environment // Mechanics of Solids. 2010. № 6. P. 157-191.
- Koronatov V.A. Torsional-longitudinal self-oscillations of a drill string with a crushing-chipping action bit under constant tension of the suspension rope // Journal of Mining Sciences. 2023. № 1. P. 45-60.