

## ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ И МАШИНОСТРОЕНИЯ

УДК 519.71, 629.4.015, 62-752, 534.015

DOI:10.18324/2077-5415-2023-1-7-20

## Системный подход к оценке полной совокупности динамических состояний технических объектов в условиях связанных вибрационных нагрузений

А.В. Елисеев<sup>1а</sup>, И.С. Ситов<sup>2б</sup>, Н.К. Кузнецов<sup>3с</sup><sup>1</sup> Иркутский государственный университет путей сообщения, ул. Чернышевского, 15, Иркутск, Россия<sup>2</sup> Братский государственный университет, ул. Макаренко, 40, Братск, Россия<sup>1,3</sup> Иркутский национальный исследовательский технический университет, ул. Лермонтова, 83, Иркутск, Россия<sup>а</sup> eavsh@ya.ru, <sup>б</sup> sitov@yandex.ru, <sup>с</sup> knik@istu.edu<sup>а</sup> <https://orcid.org/0000-0003-0222-2507>, <sup>б</sup> <https://orcid.org/0000-0001-6785-632X>, <sup>с</sup> <https://orcid.org/0000-0002-3083-0182>

Статья поступила 23.01.2023, принята 15.02.2023

*Развивается научно-методологическая основа в направлении системного анализа, теории систем и структурного математического моделирования для решения задач оценки, контроля и формирования динамических состояний технических объектов транспортного и технологического назначения, находящихся в условиях вибрационного нагружения. Целью исследования является определение полной совокупности динамических состояний технических объектов, расчетные схемы которых являются механическими колебательными системами с конечным числом степеней свободы, совершающими в плоских движениях малые вынужденные колебания относительно положения статического равновесия под действием связанных возмущений силовой природы. Для поиска подходов к решению задач, связанных с оценкой, контролем и формированием динамических состояний, используется методология структурного математического моделирования, в рамках которой механическим колебательным системам, рассматриваемым в качестве расчетных схем технических объектов, сопоставляются структурные схемы эквивалентных в динамическом отношении систем автоматического управления. Оценка динамических состояний реализуется на основе передаточных соотношений, для которых входным сигналом служит внешнее силовое возмущение, а выходным — колебания координаты точки твердого тела, образующего механическую колебательную систему. Амплитудно-частотные характеристики передаточных соотношений в физическом смысле интерпретируются как динамические податливости. Предложена концепция обобщенных динамических состояний технических объектов. Для определения совокупности динамических состояний механических колебательных систем развивается понятие динамического инварианта, отображающего существенные особенности динамических состояний системы в виде числа резонансов, режимов обнуления амплитуд колебаний координат, форм динамических взаимодействий. Разработанный подход позволяет оценивать полную совокупность динамических состояний семейств механических колебательных систем, находящихся в условиях связанных силовых возмущений, на основе представлений о конечном наборе обобщенных динамических состояний.*

**Ключевые слова:** динамическое гашение колебаний; резонанс; динамическая податливость; формы динамических взаимодействий; структурное математическое моделирование; передаточная функция; частотная функция обнуления; карта динамических инвариантов; обобщенные динамические состояния; связанные внешние возмущения.

## Systematic approach to the assessment of the full set of dynamic states of technical objects under conditions of coherent vibration loads

A.V. Eliseev<sup>1а</sup>, I.S. Sitov<sup>2б</sup>, N.K. Kuznetsov<sup>3с</sup><sup>1</sup> Irkutsk State Transport University; 15, Chernyshevsky St., Irkutsk, Russia<sup>2</sup> Bratsk State University; 40, Makarenko St., Bratsk, Russia<sup>1,3</sup> Irkutsk National Research Technical University; 83, Lermontov St., Irkutsk, Russia<sup>а</sup> eavsh@ya.ru, <sup>б</sup> sitov@yandex.ru, <sup>с</sup> knik@istu.edu<sup>а</sup> <https://orcid.org/0000-0003-0222-2507>, <sup>б</sup> <https://orcid.org/0000-0001-6785-632X>, <sup>с</sup> <https://orcid.org/0000-0002-3083-0182>

Received 23.01.2023, accepted 15.02.2023

*The scientific and methodological basis is being developed in the direction of system analysis, systems theory and structural mathematical modeling for solving the problems of assessing, controlling and forming the dynamic states of technical objects of transport and technological purposes, which are under vibration loading conditions. The purpose of the study is to determine the full set of dynamic states of technical objects, the design schemes of which are mechanical oscillatory systems with a finite number of degrees of freedom, performing in plane movements small forced oscillations relative to the position of static equilibrium under the action of connected perturbations of a force nature.*

*To search for approaches to solving problems related to the assessment, control and formation of dynamic states, the methodology of structural mathematical modeling is used, within which mechanical oscillatory systems considered as design schemes of technical objects are compared with structural diagrams of dynamically equivalent automatic control systems. The evaluation of dynamic states is realized on the basis of gear ratios, for which the input signal is an external force perturbation, and the output signal is the fluctuations in the coordinate of a point of a rigid body forming a mechanical oscillatory system. The amplitude-frequency characteristics of gear ratios in the physical sense are interpreted as dynamic compliance. The concept of generalized dynamic states of technical objects is proposed. To determine the set of dynamic states of mechanical oscillatory systems, the concept of a dynamic invariant is developed, which reflects the essential features of the dynamic states of the system in the form of the number of resonances, modes of zeroing the amplitudes of coordinate oscillations, forms of dynamic interactions. The developed approach makes it possible to evaluate the full set of dynamic states of families of mechanical oscillatory systems under conditions of coupled force disturbances based on the concept of a finite set of generalized dynamic states*

**Keywords:** dynamic vibration damping; resonance; dynamic compliance; forms of dynamic interactions; structural mathematical modeling; transfer function; frequency reset function; map of dynamic invariants; generalized dynamic states; connected external disturbances.

**Введение.** Рассматриваются фундаментальные проблемы теории системных исследований, связанных с оценкой вынужденных движений технических объектов, расчетные схемы которых представляют собой механические колебательные системы с конечным числом степеней свободы [1]. Задачи динамики машин, теории колебаний, теории вибрационных процессов связаны с оценкой установившихся движений, рассматриваемых в качестве динамических состояний технических систем, находящихся под действием внешних силовых возмущений [2–10]. Достаточно широкий класс технических систем, работающих в условиях вибрационных нагрузений, имеет расчетные схемы, которые представляют собой механические колебательные структуры с конечным числом степеней свободы, совершающие вынужденные установившиеся движения [11–15]. Оценка динамических состояний технических объектов может быть произведена на основе замеров в отдельных точках [16–20]. Для оценки установившихся форм малых колебаний механических систем находят свои приложения структурные методы математического моделирования, в рамках которых расчетным схемам механических колебательных систем сопоставляются структурные схемы эквивалентных в динамическом отношении систем автоматического управления [21–26]. Структурные методы находят свои приложения в задачах вибрационной защиты и вибрационной изоляции. Развитие методологии структурного математического моделирования находит свое выражение в решении ряда задач оценки вибрационных полей рабочих органов технологических машин. В задачах управления характеристиками вибрационных полей рабочих органов технологических машин условия однородности интерпретируются как режимы вибрационного гашения колебания координаты в системе координат, подобранной специальным образом. К особенностям формирования вибрационных полей следует отнести возможность обеспечения вынужденных движений рабочего органа технологической машины посредством одновременного приложения к различным точкам связанных силовых возмущений, реализуемых синфазно работающими вибраторами [27–30].

Вибрационные состояния механических колебательных систем могут быть определены на основе динамических податливостей, представляющих собой отношения амплитуд смещений точек к амплитудам колебаний силовых возмущений.

В общем случае задачи оценки динамических состояний технических объектов достаточно сложны. На

начальных этапах определения существенных динамических свойств могут быть использованы расчетные схемы с одной степенью свободы.

В рамках структурных представлений динамические состояния системы с одной степенью свободы, оцениваемые с помощью динамической податливости, выражаются посредством амплитудно-частотной характеристики передаточных функций, для которых входным сигналом служит силовое возмущение, выходным — возмущение координаты. Для отображения существенных особенностей динамических состояний используется понятие динамического инварианта или обобщенного динамического состояния [31; 32]. Под существенными особенностями динамического состояния понимается набор количества частот режимов динамического обнуления координаты колебаний, количество частот резонансов и количество законоопределенных форм динамических взаимодействий элементов механических колебательных систем.

Система с двумя степенями свободы может быть приведена к системе с одной координатой, на основе которой передаточная функция, используемая для оценки динамического состояния объекта. Существенные динамические особенности системы, приведенной к одной координате, также могут быть отображены с помощью некоторого динамического инварианта. Если к системе с двумя степенями свободы приложено силовое возмущение, зависящее от параметра, к примеру, представляющего собой коэффициент связности функционально зависимых одновременно действующих внешних силовых факторов, то динамическая податливость системы также будет зависеть от параметра. Формально динамические состояния системы, зависящей от коэффициента связности, отображаются однопараметрическим семейством амплитудно-частотных характеристик, на основе которых может быть построен полный набор динамических инвариантов.

Для построения полной совокупности обобщенных динамических состояний используется частотная функция обнуления, аргументом которой является варьируемый параметр, а значением — частота динамического гашения или обнуления амплитуды колебания координаты, определяемая условием в виде равенства нулю числителя амплитудно-частотной характеристики. Количественные характеристики динамических особенностей, распределенных по множеству параметров, представляются с помощью кусочно-постоянных графиков интегральных или частичных характеристик, сопоставляющих параметру

системы сумму всех или части динамических особенностей системы.

Для разработки методологии оценки динамических состояний технических объектов с помощью точечных измерений возникает необходимость построения динамической податливости, зависящей от координаты произвольной точки объекта, динамическое состояние которого оценивается. С учетом коэффициента связности внешних возмущений динамическая податливость системы, рассчитанная во всевозможных точках объекта, будет зависеть от двух параметров и отображаться двухпараметрическим семейством амплитудно-частотных характеристик.

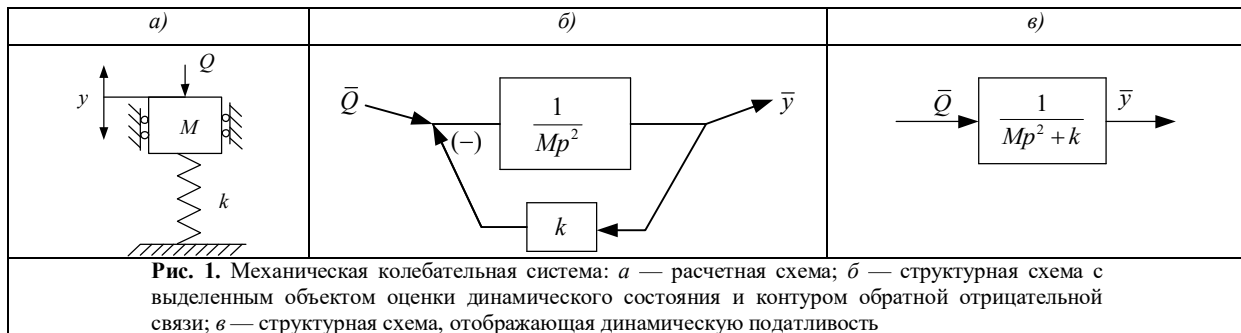
Формальная процедура построения совокупности динамических инвариантов на основе двухпараметрического семейства амплитудно-частотных характеристик может быть построена на основе семейства частотных функций обнуления. Совокупность обобщенных динамических состояний может быть представлена в виде так называемой карты динамических, представляющей собой конечное разбиение плоскости параметров на множества, в которых система сохраняет существенные динамические особенности неизменными. В ряде работ построены карты динамических инвариантов для областей плоскости в виде полос или прямоугольников и доказаны теоремы о свойствах

границ, формирующих разбиение множеств плоскости на области, границы и точки пересечения границ [33–34].

Вместе с тем, представленные карты динамических инвариантов не охватывают плоскость параметров в полной мере и требуют дальнейшей детализации с целью разработки метода построения полной карты динамических инвариантов.

Статья посвящена развитию системного подхода в оценке вынужденных колебаний технического объекта в условиях связанных силовых возмущений с помощью разработки методологии построения полной совокупности обобщенных динамических характеристик, отображающих существенные динамические особенности в виде количества резонансов, режимов обнуления колебаний и знакоопределенных форм динамических взаимодействий элементов механических колебательных систем, образованных твердым телом, совершающим малые установившиеся колебания в условиях связанных нагружений силовой природы, динамическое состояние которого оценивается путем точечных измерений.

**Основные положения. Постановка задачи.** Рассматривается механическая колебательная система, образованная одним массонерционным элементом и одним упругим элементом (рис. 1, а). Массонерционный элемент  $M$  совершает малые колебания  $y(t)$  под воздействием связанных внешних возмущений  $Q$  силовой природы.



В рамках формализма Лагранжа потенциальная и кинетическая энергии имеют выражения:

$$\Pi = \frac{1}{2}ky^2, \quad (1) \quad T = \frac{1}{2}My^2. \quad (2)$$

Система дифференциальных уравнений Лагранжа 2-го рода принимает вид:

$$M\ddot{y} + ky = Q. \quad (3)$$

В предположении нулевых начальных условий после интегральных преобразований может быть получено алгебраическое уравнение относительно изображения Лапласа функции оригинала у:

$$(Mp^2 + k)\bar{y} = \bar{Q}, \quad (4)$$

где символ « $\rightarrow$ » над переменной обозначает изображение Лапласа [35].

На основе операторного уравнения (4), с помощью известных методов [21–23] могут быть построены структурные схемы эквивалентных в динамическом отношении систем автоматического управления (рис. 1, б, в).

Передаточная функция, построенная на основе структурных схем (рис. 1, б, в), имеет вид:

$$W_1(p) = \left. \frac{\bar{y}}{\bar{Q}} \right|_{\bar{Q} \neq 0} = \frac{1}{Mp^2 + k}. \quad (5)$$

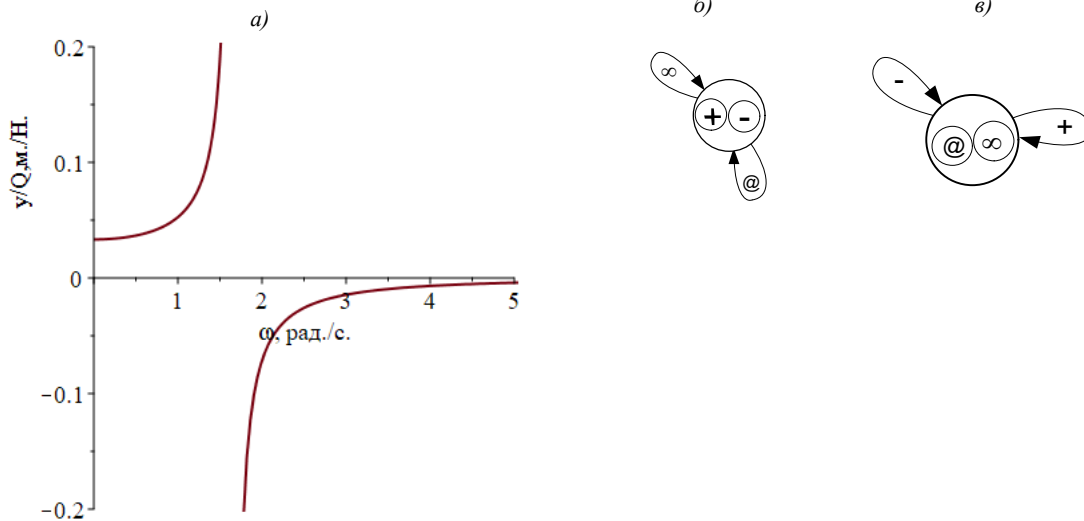
Соответствующая амплитудно-частотная характеристика передаточной функции (5) представляется выражением:

$$A_1(\omega) = \left. \frac{\bar{y}}{\bar{Q}} \right|_{p=j\omega} = \frac{1}{-M\omega^2 + k}. \quad (6)$$

Амплитудно-частотная характеристика может быть интерпретирована как динамическая податливость, равная отношению амплитуд смещения к амплитудам внешнего гармонического силового возмущения  $Q$ . Динамические особенности движения системы (рис. 1) могут быть представлены в детализированном виде с помощью амплитудно-частотной характеристики (рис. 2, а).

В качестве существенных динамических особенностей могут быть отмечены критические динамические состояния в виде резонансов, эффектов обнуления амплитуд колебания координат (рис. 2, б) и

знакоопределенных форм динамических взаимодействий (рис. 2, в).



**Рис. 2.** Динамические особенности движения системы с одной степенью свободы: *а* — амплитудно-частотная характеристика; *б* — динамический инвариант, отображающий знакоопределенные формы динамических взаимодействий; *в* — динамический инвариант, отображающий критические состояния взаимодействий элементов механической колебательной системы

В предположении, что  $k/M > 0$ , амплитудно-частотные характеристика (6) может быть представлена динамическим инвариантом с характеристикой  $+S_0^1 F_1^1$ , означающей, что режим динамического гашения колебаний отсутствует, система обладает одним резонансом и двумя знакоопределенными формами динамических взаимодействий; при этом для малых частот  $\omega \approx 0$  значение амплитудно-частотной характеристики принимает положительное значение [31; 32].

Наравне с системами с одной степенью свободы, образованными упругим элементом и массой, находящейся под внешним силовым воздействием (рис. 1, а), могут быть рассмотрены системы с двумя степенями свободы (рис. 2), образованные твердым телом с массой  $M$  и моментом инерции  $J$ , установленным на упругих опорах, находящимся в условиях связанных вибрационных нагрузений  $Q_1, Q_2$  силовой природы [36; 37]:

$$Q_2 = \gamma Q_1, \tag{7}$$

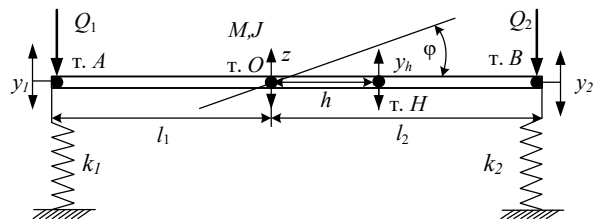
где  $\gamma$  — коэффициент связности возмущений  $Q_1, Q_2$ ,

Предполагается, что приложение к точкам  $A$  и  $B$  внешних гармонических синфазных возмущений  $Q_1, Q_2$  с частотой  $\omega$  приводит к малым установившимся колебаниям твердого тела относительно положения статического равновесия. Динамическое состояние твердого тела определяется на основе динамических податливостей совокупности точек  $H$ , распределенных по его поверхности (рис. 3).

Динамические особенности движения твердого тела (рис. 3) определяются частотой внешнего возмущения,

коэффициентом связности и координатой точки, в которой определяется динамическая податливость.

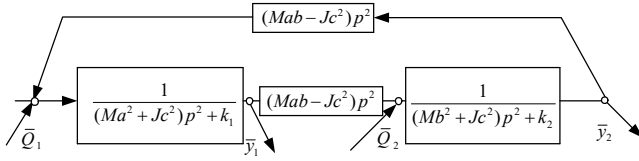
Представления о зависимости динамических состояний системы от коэффициента связности  $\gamma$  внешних возмущений с учетом координаты  $h$  объекта, на основе которого оценивается динамическое состояние твердого тела, могут быть детализированы в рамках концепции динамических инвариантов или обобщенных состояний механической колебательной системы [31; 32]. В работах построены совокупности обобщенных динамических состояний для областей в виде ограниченных множеств, представляющих собой окрестности нулевых значений коэффициента связности внешних возмущений и координаты точки, на основе измерений в которой оценивается динамическое состояние объекта [38; 39].



**Рис. 3.** Расчетная схема механической колебательной системы в виде твердого тела

Задача заключается в разработке метода оценки полной совокупности динамических состояний, отличающегося тем, что карта динамических инвариантов строится в качестве разбиения всей плоскости возможных параметров, представляющих собой пару значений —

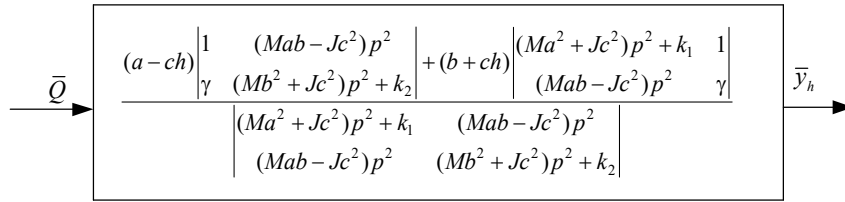
коэффициент связности внешних возмущений и координату точки, на основе которой оценивается динамическое состояние объекта с помощью использования динамической жесткости.



**Рис. 4.** Структурная схема механической колебательной системы (рис. 3):  $p = j\omega$  — комплексная переменная;  $j = \sqrt{-1}$ ;  $\omega$  — частота внешнего возмущения. Символ « $\leftarrow$ » над переменной обозначает изображение Лапласа [35]

По структурной схеме (рис. 3) с помощью известных методов [21–23] могут быть построены передаточные функции системы:

$$W_{11}(p, \gamma) = \frac{\bar{y}_1}{\bar{Q}_1} \Big|_{\bar{Q}_2=0} = \frac{((Mb^2 + Jc^2)p^2 + k_2) - \gamma(Mab - Jc^2)p^2}{A(p)}, \quad (8)$$



**Рис. 4.** Структурная схема, полученная путем приведения системы к координате  $y_h$

Параметрическое семейство передаточных функций структурной схемы (рис. 4), определяемое коэффициентом связности  $\gamma$  силовых возмущений и координатой  $h$  точки  $H$ , на основе которой оценивается динамическое состояние, определяет совокупность динамических состояний.

**Построение динамических инвариантов на основе частотной функции обнуления.** Предполагается, что коэффициент связности  $\gamma = 0$  фиксирован, а координата  $h$  точки  $H$ , на основе которой оценивается динамическое состояние твердого тела, варьируется в некотором диапазоне значений. Передаточная функция имеет вид:

$$W_{0,h}(p) = \frac{\left( \begin{array}{l} (a - ch)((Mb^2 + Jc^2)p^2 + k_2) - \\ -(b + ch)(Mab - Jc^2)p^2 \end{array} \right)}{A(p)}. \quad (11)$$

Если координата  $h$  точки  $H$  изменяется в пределах  $(-\infty, \infty)$ , то вместо одной амплитудно-частотной характеристики необходимо рассмотреть параметрическое семейство функций, особенности которых зависят от расположения частоты, обнуляющей числитель амплитудно-частотной характеристики, относительно собственных частот системы  $\sigma_1, \sigma_2$ .

**Математическая модель.** На основе известных методов [21–23] расчетной схеме (рис. 3) может быть сопоставлена структурная схема эквивалентной в динамическом отношении системы автоматического управления (рис. 4).

$$W_{21}(p, \gamma) = \frac{\bar{y}_2}{\bar{Q}_1} \Big|_{\bar{Q}_2 \neq 0} = \frac{((Ma^2 + Jc^2)p^2 + k_1)\gamma - (Mab - Jc^2)p^2}{A(p)}, \quad (9)$$

где  $A(p) = ((Ma^2 + Jc^2)p^2 + k_1)((Mb^2 + Jc^2)p^2 + k_2) - ((Mab - Jc^2)p^2)^2$  — является характеристическим многочленом с корнями  $j\sigma_1, j\sigma_2$ ;  $\sigma_1, \sigma_2$  — собственные частоты системы.

Для оценки динамических особенностей движений твердого тела в т.  $H$  (рис. 3) может быть использована передаточная функция [16; 18; 19]:

$$W_h(p) \Big|_{\bar{Q}_2=0} = \frac{\bar{y}_h}{\bar{Q}_1} = (a - ch) \frac{\bar{y}_1}{\bar{Q}_1} + (b + ch) \frac{\bar{y}_2}{\bar{Q}_1}. \quad (10)$$

Если в качестве входного сигнала рассматривать внешнее силовое возмущение  $Q_1$ , а в качестве выходного сигнала — установившиеся колебания  $y_h$ , то связь между входным и выходным сигналами может быть представлена в виде структурной схемы, отображающей динамическую податливость системы в точке  $H$  (рис. 4).

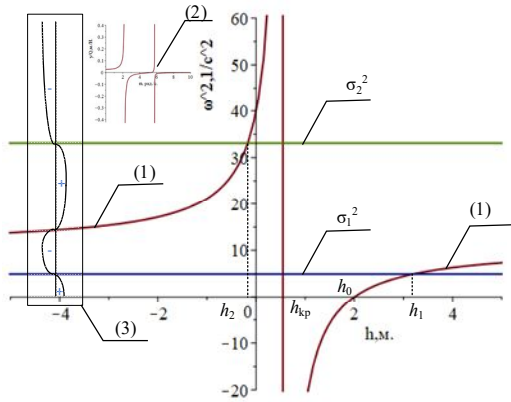
Амплитудно-частотная характеристика передаточной функции (11) имеет вид:

$$A_{0,h}(\omega) = W_{0,h} \Big|_{p=j\omega} = \frac{(Mbch - Jc^2)\omega^2 + k_2(a - ch)}{A(j\omega)}. \quad (12)$$

Для учета всех возможных вариантов расположения частот обнуления относительно собственных частот системы вводится частотная функция обнуления, которая определяется условием равенства нулю числителя амплитудно-частотной характеристики:

$$\omega^2 = \frac{k_2(a - ch)}{Mbch - Jc^2}. \quad (13)$$

Особенности амплитудно-частотных характеристик, связанные с числом нулей, отображающих эффект обнуления амплитуды колебания координаты, разрывов 2-го рода, отображающих эффект резонанса, и знакоопределенных ветвей, отображающих формы динамических взаимодействий системы, определяются из условий совпадения частотной функции обнуления с собственными частотами, нулем и «бесконечностью», отображаемой разрывом второго рода (рис. 5).



**Рис. 5.** Частотная функция обнуления: 1 — график частотной функции обнуления; 2 — амплитудно-частотная характеристика для  $h < h_2$ ; 3 — динамические особенности амплитудно-частотной характеристики с учетом частотной функции обнуления и собственных частот системы

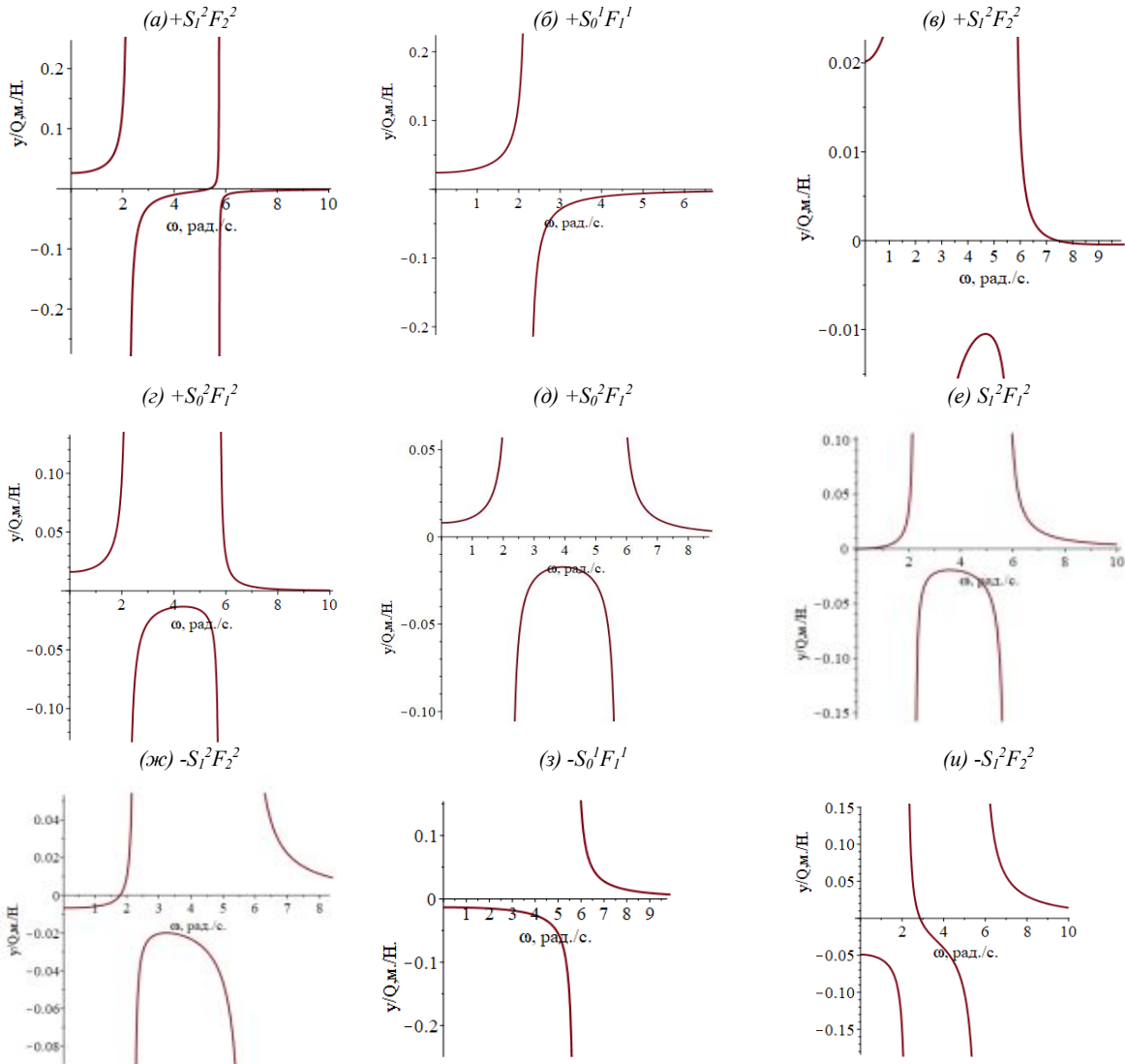
На основе совпадения частотной функции с собственными, нулевыми и «бесконечными» частотами определяются граничные значения координаты  $h$ :

$$h_0 = \frac{a}{c}, \quad (14) \quad h_{kp} = \frac{Jc}{Mb}, \quad (15)$$

$$h_1 = \frac{Jc^2\sigma_1^2 - k_2a}{Mbc\sigma_1^2 - k_2c}, \quad (16)$$

$$h_2 = \frac{Jc^2\sigma_2^2 - k_2a}{Mbc\sigma_2^2 - k_2c}. \quad (17)$$

На множествах  $(-\infty, h_2)$ ,  $\{h_2\}$ ,  $(h_2, h_{kp})$ ,  $\{h_{kp}\}$ ,  $(h_{kp}, h_0)$ ,  $\{h_0\}$ ,  $(h_0, h_1)$ ,  $\{h_1\}$ ,  $(h_1, \infty)$ , совокупность которых представляет разбиение бесконечно интервала  $(-\infty, \infty)$ , соответствующие амплитудно-частотные характеристики имеют графики с фиксированными динамическими инвариантами (рис. 6).



**Рис. 6.** Амплитудно-частотные характеристики с учетом параметра  $h$ . (а)  $h < h_2$ , (б)  $h = h_2$ , (в)  $h_2 < h < h_{kp}$ , (г)  $h = h_{kp}$ , (д)  $h_{kp} < h < h_0$ , (е)  $h = h_0$ , (ж)  $h_0 < h < h_1$ , (з)  $h = h_1$ , (и)  $h_1 < h$

Динамические инварианты отображают существенные динамические особенности в виде  $S_l^k F_n^m$ , где  $k$  — количество резонансов;  $l$  — количество режимов обнуления амплитуды колебания координаты объекта;  $m$  —

— количество положительных форм динамических взаимодействий;  $n$  — количество отрицательных форм

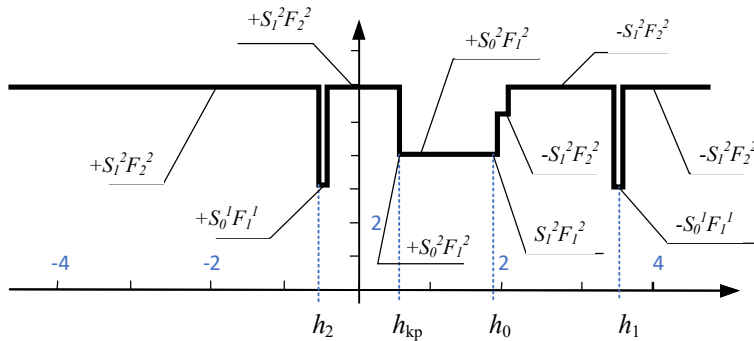
динамических взаимодействий;  $J_{k+l+m+n}$  — интегральная характеристика (табл. 1).

**Таблица 1.** Распределение динамических инвариантов

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
I	$h < h_2$	$h = h_2$	$h_2 < h < h_{кр}$	$h = h_{кр}$	$h_{кр} < h < h_0$	$\gamma = h_0$	$h_0 < h < h_1$	$h = h_1$	$h_1 < h$
II	$+S_i^2 F_2^2$	$+S_0^1 F_1^1$	$+S_i^2 F_2^2$	$+S_0^2 F_1^2$	$+S_0^2 F_1^2$	$S_i^2 F_1^2$	$-S_i^2 F_2^2$	$-S_0^1 F_1^1$	$-S_i^2 F_2^2$
III	$+J_7$	$+J_3$	$+J_7$	$+J_5$	$+J_5$	$J_6$	$-J_7$	$-J_3$	$-J_7$

Интегральные характеристики динамических инвариантов в виде суммы числа резонансов, обнулений и форм динамических взаимодействий представлены кусочно-постоянными графиками функций варьируемых

параметров системы. В частности, интегральная характеристика, сопоставляющая координате  $h$  число динамических особенностей, имеет кусочно-постоянный вид (рис. 7).



**Рис. 7.** Интегральная характеристика совокупности динамических состояний

График интегральной характеристики разделяет множество варьируемых параметров на множество точек непрерывности и точек разрыва. В точках разрыва система существенным образом изменяет динамические особенности. Так в точках  $h = h_1$  и  $h = h_2$  система обладает инвариантами  $-J_3$  и  $+J_3$ , а на интервале  $(h_{кр}, h_0)$  система обладает динамическим инвариантом  $+J_5$ , исключающим возможность реализации режима обнуления амплитуды колебания координаты точки системы.

Таким образом, показано, что для фиксированного коэффициента связности  $\gamma = 0$  на основе частотной функции обнуления, зависящей от  $h$ , может быть построена совокупность динамических инвариантов с учетом разбиения вещественной оси на множества с помощью граничных значений  $h_0, h_1, h_2, h_{кр}$ .

Вместе с тем, изменение коэффициента связности  $\gamma$  может привести к изменению частотной функции и, соответственно, к изменению граничных значений координаты  $h$ .

Рассмотрим параметрическое семейство частотных функций обнуления, зависящее от коэффициента связности силовых возмущений, что позволяет рассматривать семейство частотных функций как фактор, определяющий совокупность динамических инвариантов.

**Особенности частотных функций обнуления в зависимости от коэффициента связности внешних возмущений.** Рассмотрение множества значений коэффициента связности  $\gamma$  на интервале  $(-\infty, \infty)$  приводит к необходимости рассмотрения семейства частотных функций или частотной функции обнуления двух переменных:

$$\omega^2(\gamma, h) = \frac{c(k_1 \gamma - k_2)h + (bk_1 \gamma + ak_2)}{(Mac\gamma - Mbc)h + Jc^2(\gamma + 1)}. \quad (18)$$

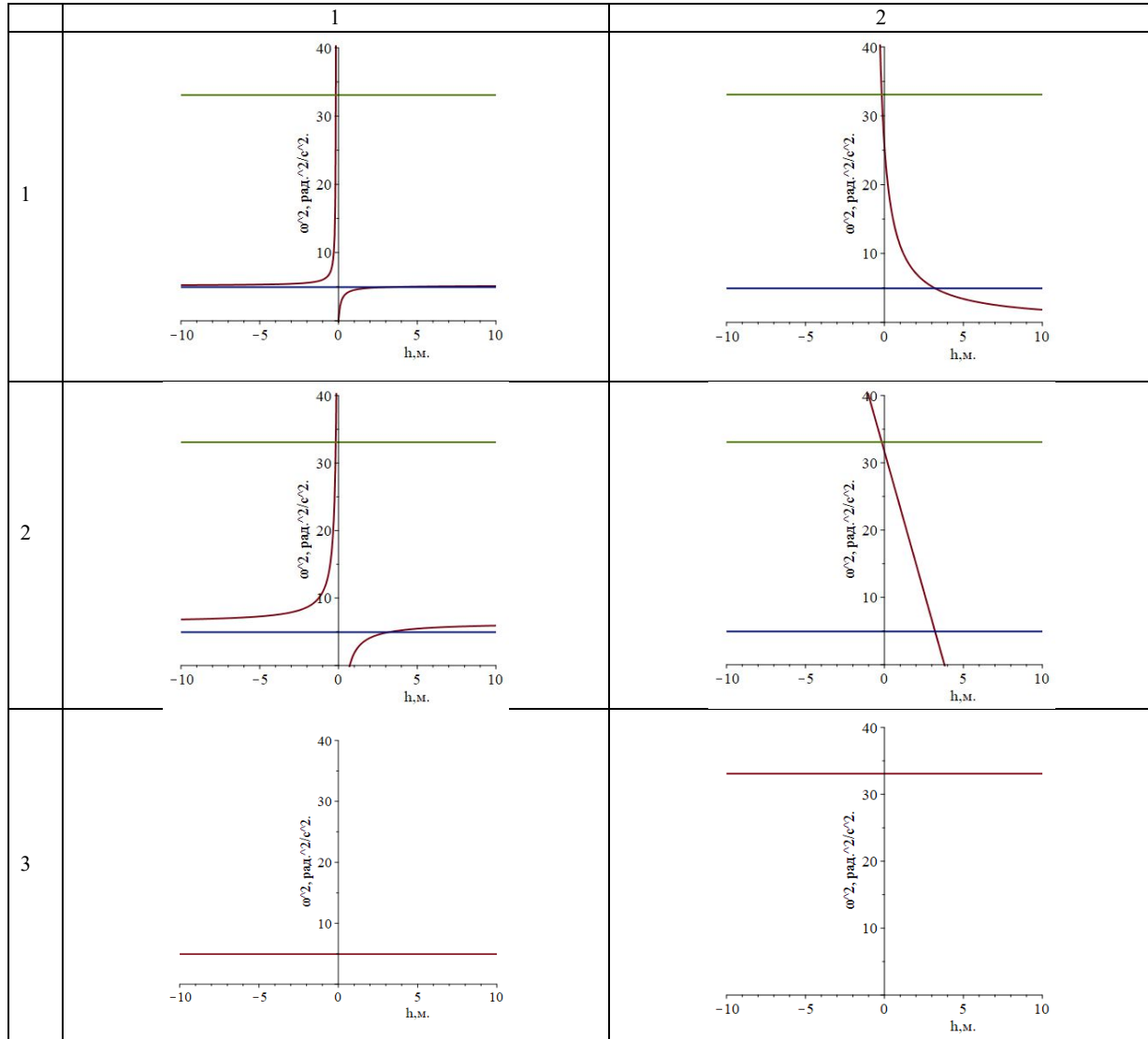
В зависимости от выбора значения коэффициента связности частотная функция обнуления определяет совокупность динамических инвариантов. В качестве критических могут быть выбраны значения коэффициентов связности, которые определяют различные формы частотной функции обнуления (табл. 2). Формально критические значения коэффициента связности определяются из условий равенства нулю определителя 2-го порядка и миноров 1-го порядка матрицы, составленной из коэффициентов частотной функции обнуления (18). Графики частотных функций обнуления (табл. 3), соответствующих критическим значениям коэффициентов связности, определяют совокупности динамических инвариантов.

В частности, значение коэффициента связности  $\gamma = \gamma_1$  (табл. 2, строка 3, столбец 1) определено из условий равенства определителя матрицы, полученной из коэффициентов частотной функции обнуления; соответствующая частотная функция обнуления представляет собой константу и не зависит от координаты точки, в которой реализуется измерение динамического состояния объекта. С другой стороны, критическое значение коэффициента связности  $\gamma = -1$  (табл. 2, строка 2, столбец 1) соответствует приложению к твердому телу механической колебательной системы пары сил. По каждой критической частотной функции обнуления (табл. 3) может быть построена совокупность динамических инвариантов, отображающих особенности динамических состояний в форме распределения динамических инвариантов по значениям координаты  $h$  в табличном виде (табл. 1) или в виде графика кусочно-постоянной интегральной характеристики (рис. 7).

**Таблица 2.** Критические коэффициенты связности и частотные функции

	1	2
1	$\gamma = -\frac{ak_1}{bk_2},$ $\omega^2(\gamma, h) = \frac{k_1 k_2 h}{Jc^2(ak_2 - bk_1) + M(a^2 k_2 + b^2 k_1)h}$	$\gamma = \frac{k_2}{k_1},$ $\omega^2(\gamma, h) = \frac{k_1 k_2}{Jc^2(k_1 + k_2) + M(ak_2 - bk_1)h}$
2	$\gamma = -1,$ $\omega^2(\gamma, h) = \frac{bk_1 - ak_2 + c(k_1 + k_2)h}{Mch}$	$\gamma = \frac{b}{a},$ $\omega^2(\gamma, h) = \frac{(a^2 k_1 + b^2 k_2) + (bk_1 - ak_2)ch}{Jc^2}$
3	$\gamma = \gamma_1,$ $\omega^2(\gamma, h) = \frac{(k_2 - \gamma_1 k_1)}{M(b - \alpha \gamma_1)}$	$\gamma = \gamma_2,$ $\omega^2(\gamma, h) = \frac{(k_2 - \gamma_2 k_1)}{M(b - \alpha \gamma_2)}$

**Таблица 3.** Критические формы частотных функций



Учет критических значений коэффициентов связности позволяет определить множество параметров, в которых

возможны изменения значений динамических инвариантов, что позволяет построить распределение обобщенных



динамических состояний для плоскости в виде так называемой карты динамических инвариантов.

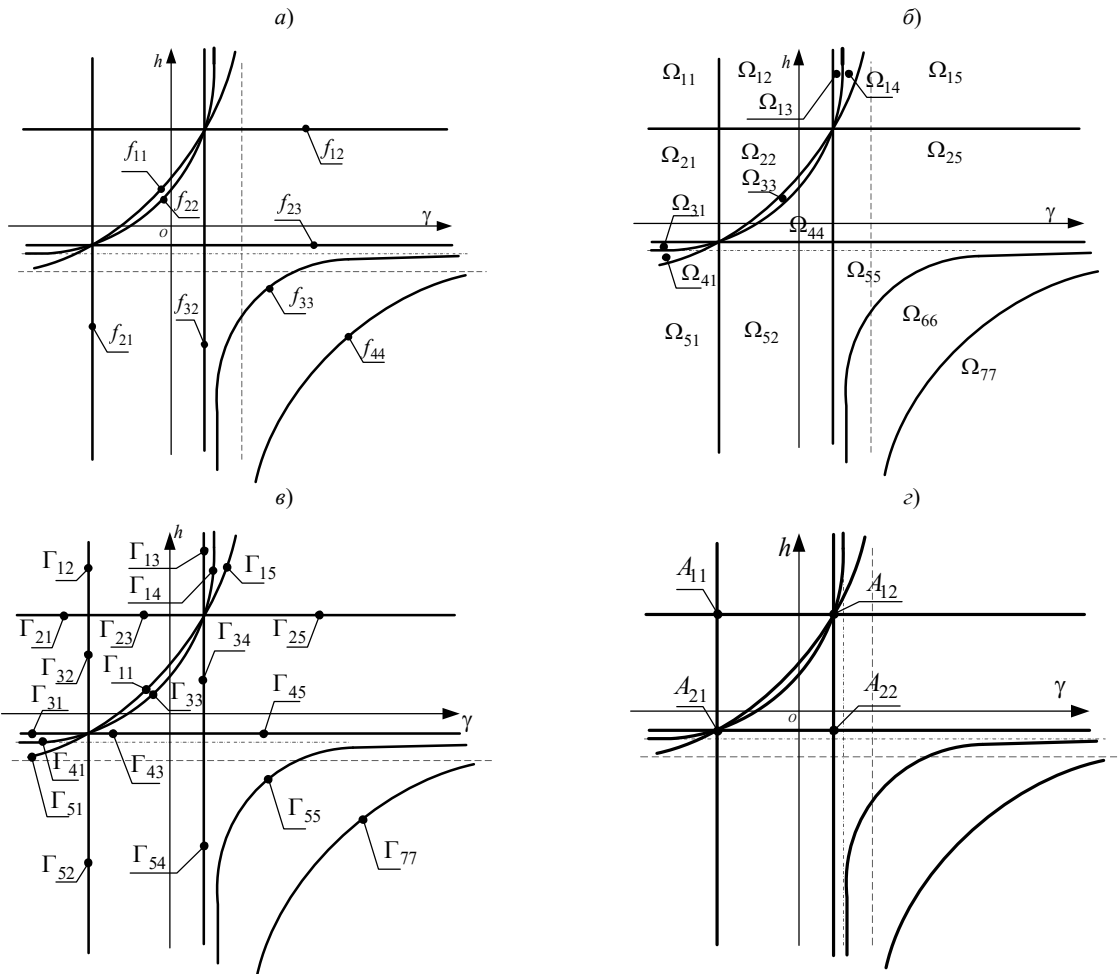
**Карта динамических инвариантов в отображении полной совокупности обобщенных динамических состояний.** Рассмотрение вместо дискретных значений коэффициента связности  $\gamma$  значений из интервала  $(-\infty, \infty)$  приводит к замене дискретных граничных значений  $h_0, h_1, h_2, h_{кр}$  (14) – (17) функциями  $h_0(\gamma), h_1(\gamma), h_2(\gamma), h_{кр}(\gamma)$  аргумента  $\gamma$ :

$$h_0(\gamma) = -\frac{bk_1\gamma + ak_2}{c(k_1\gamma - k_2)}, \quad (19) \quad h_{кр}(\gamma) = -\frac{Jc^2(\gamma+1)}{Mc(a\gamma - b)}, \quad (20)$$

$$h_1(\gamma) = \frac{a - \lambda_1 b}{c(1 + \lambda_1)}, \quad (21) \quad h_2(\gamma) = \frac{a - \lambda_2 b}{c(1 + \lambda_2)}, \quad (22)$$

и прямыми вида:

$$\gamma = \gamma_1, \quad (23) \quad \gamma = \gamma_2, \quad (24)$$



**Рис. 8.** Карта динамических инвариантов: *a* — графики функций, определяющие разбиение; *б* — области разбиения  $\Omega_{ij}$ ; *в* — границы разбиения  $\Gamma_{ij}$ ; *г* —  $A_{ij}$  точки пересечения граничных линий

Представленная совокупность множеств (рис. 8) для конкретных значений параметров механической колебательной системы (см. рис. 3) сопоставляет каждому элементу разбиения динамический инвариант, образуя так

где коэффициенты  $\lambda_1, \lambda_2$  определяются с учетом собственных частот  $\sigma_1, \sigma_2$  системы:

$$\lambda_1 = \frac{(Ma^2 + Jc^2)\sigma_1^2 - k_1}{(Mab - Jc^2)\sigma_1^2}, \quad (25)$$

$$\lambda_2 = \frac{(Ma^2 + Jc^2)\sigma_2^2 - k_1}{(Mab - Jc^2)\sigma_2^2}, \quad (26)$$

а коэффициенты  $\gamma_1, \gamma_2$  определяются из условия:

$$h_0(\gamma) = h_{кр}(\gamma). \quad (27)$$

Совокупность графиков функций (рис. 8, *a*) (19) – (27) разбивает плоскость на систему множеств, в точках которых обобщенные динамические состояния принимают постоянные значения. Система множеств, образующих разбиение плоскости, состоит из граничных кривых  $\Gamma_{ij}$  (рис. 8, *a*), областей  $\Omega_{ij}$  (рис. 8, *б*) и точек  $A_{ij}$  пересечения границ  $\Gamma_{ij}$  (рис. 8, *г*).

называемую карту динамических инвариантов, позволяющую отобразить полную совокупность динамических состояний механических колебательных систем.

**Численный эксперимент.** Рассматривается модельная механическая колебательная система:  $M = 11$  кг,  $l_1 = 1$  м,  $l_2 = 2$  м,  $k_1 = 30$  Н/м,  $k_2 = 40$  Н/м,  $J = 6$  кг·м<sup>2</sup>. Для рассматриваемых модельных данных собственные частоты составляют:  $\sigma_1 \approx 2.22$  рад/с,  $\sigma_2 \approx 5.75$  рад/с. Выполнение условий:

$$b/a < k_2/k_1 \quad (28)$$

влечет:

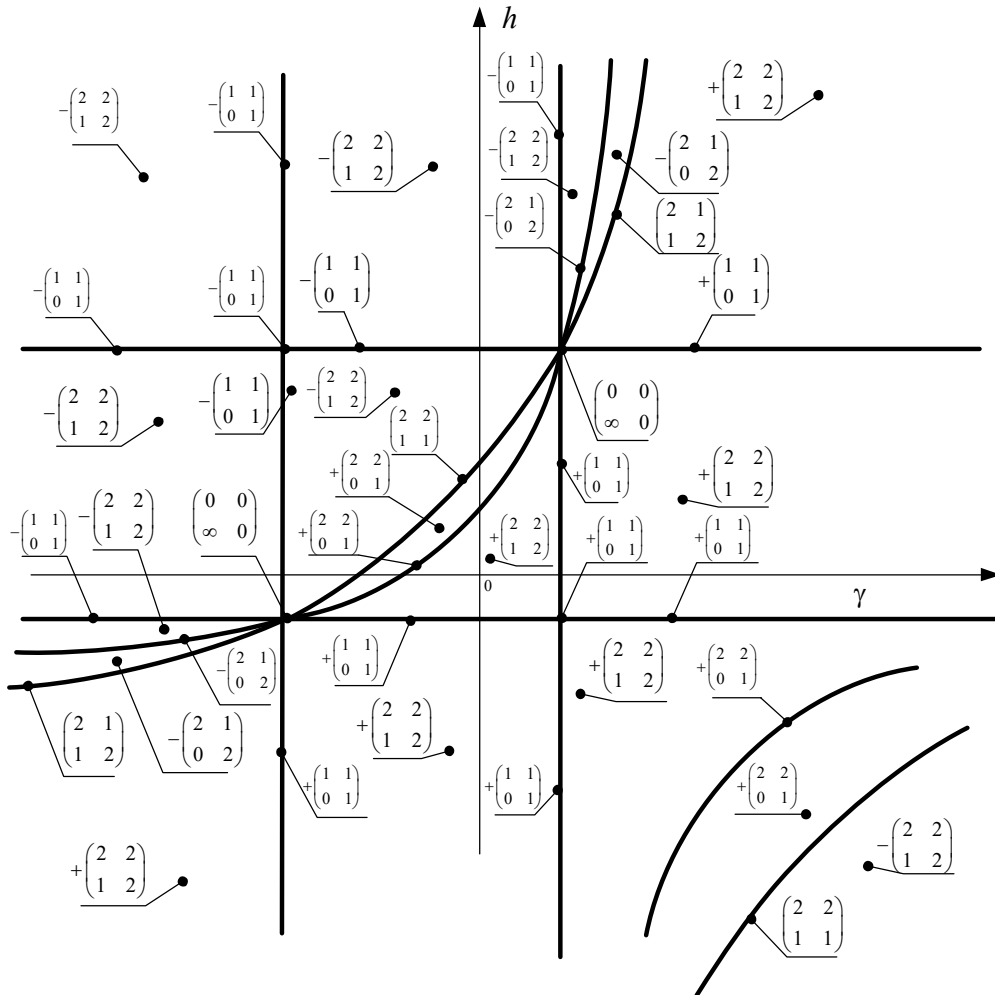
$$f_{11} = h_0(\gamma), f_{22} = h_{кр}(\gamma), f_{33} = h_0(\gamma), f_{44} = h_{кр}(\gamma), f_{12} = h_1(\gamma), f_{23} = h_2(\gamma), \quad (29)$$

$$\gamma = f_{21} = \min\{\gamma_1, \gamma_2\}, \gamma = f_{32} = \max\{\gamma_1, \gamma_2\}, \quad (30)$$

где  $\gamma_1, \gamma_2$  определяются из условий равенства определителя матрицы, составленной из коэффициентов частотной функции обнуления (18):

$$\begin{vmatrix} c(k_1\gamma - k_2) & bk_1\gamma + ak_2 \\ Mac\gamma - Mbc & Jc^2(\gamma + 1) \end{vmatrix} = 0. \quad (31)$$

На основе граничных функций (29) – (30) может быть построена конкретная карта динамических инвариантов (рис. 9).



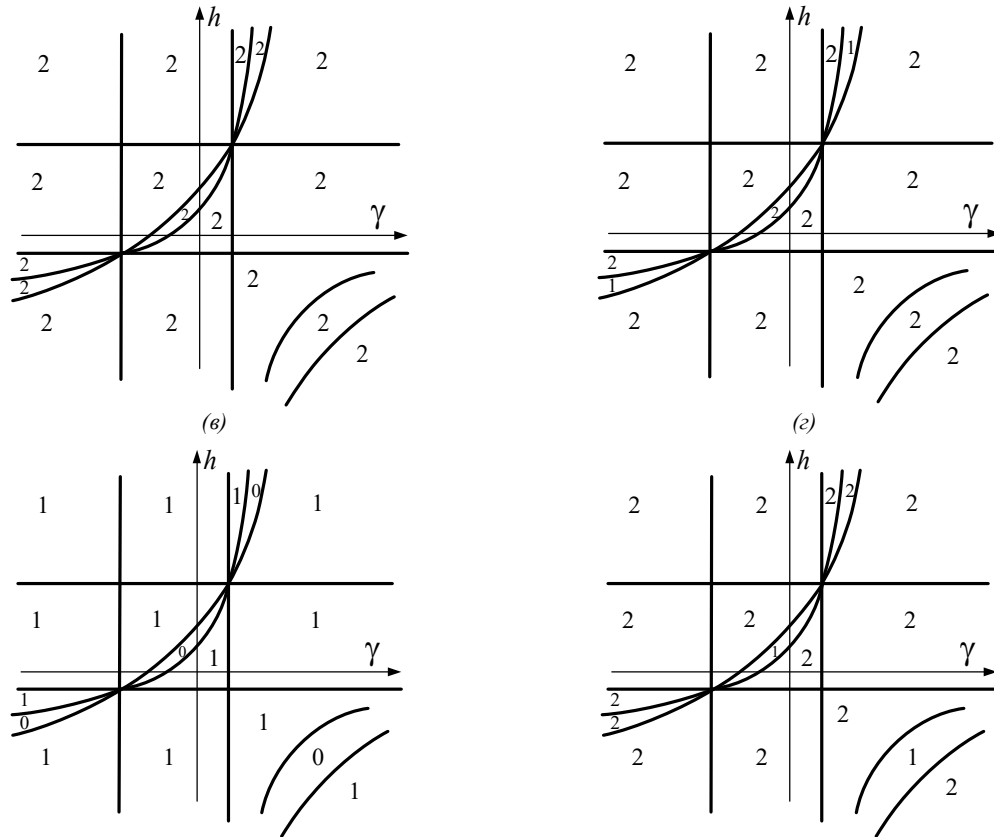
**Рис. 9.** Распределение состояний механической колебательной системы по карте динамических инвариантов

Представленная карта динамических инвариантов (рис. 9) отображает существенные особенности динамических состояний в виде числа резонансов (рис. 10, а), числа режимов обнуления колебаний (рис. 10, в), числа положительных форм динамических взаимодействий (рис. 10, б) и числа отрицательных форм динамических взаимодействий (рис. 10, г).

В качестве существенных особенностей карт динамических инвариантов следует отметить неравномерность распределения режимов обнуления колебаний (рис. 10, в), проявляющуюся в том, что в областях  $\Omega_{33}, \Omega_{66}, \Omega_{14}, \Omega_{41}$  отсутствует режим обнуления колебания координаты объекта. Аналогично можно отметить неравномерность знакоположительных форм динамических взаимодействий.

а)

б)



**Рис.10.** Интегральные характеристики: *a* — резонансы; *b* — положительные формы динамических взаимодействий; *c* — режимы обнуления; *d* — отрицательные формы динамических взаимодействий

**Заключение.** Линейная система с конечным числом степеней свободы может быть сведена к системе с одной координатой. Динамическое состояние системы, совершающей вынужденные движения под действием внешних возмущений силовой природы, полученное на основе измерений в фиксированной точке, может быть оценено на основе динамической податливости, представляющей собой отношение смещения координат к силовому возмущению. В рамках представлений о динамической податливости как амплитудно-частотной характеристике совокупность динамических состояний может быть представлена в виде динамического инварианта, отображающего существенные динамические особенности в виде количества резонансов, режимов обнуления и знакоположительных форм динамических взаимодействий.

Если система зависит от одного параметра, то динамические состояния системы могут быть отображены не одним, а совокупностью динамических инвариантов. Для построения совокупности динамических инвариантов используется частотная функция обнуления, которая определяется из условия равенства нулю числителя амплитудно-частотной характеристики. Зависимость интегральных или частичных характеристик динамических инвариантов от рассматриваемого параметра системы представляет собой кусочно-постоянный график.

Для оценки динамического состояния технического объекта на основе измерения в произвольной точке в качестве расчетной схемы рассматривается механическая колебательная система, в которой координата точки для оценки динамических свойств будет рассматриваться как второй вариационный параметр системы.

Добавление второго параметра приводит к необходимости рассмотрения семейства частотных функций обнуления, зависящего от вариационного параметра. В свою очередь, совокупность частотных функций содержит также критические элементы, в которых изменяются наборы динамических инвариантов. Учет особенностей частотных функций определяет функциональные зависимости в виде граничных кривых в плоскости двух параметров, позволяющих разбить плоскость на области, в которых сохраняются значения обобщенных динамических состояний системы. Распределение динамических инвариантов по всей плоскости параметров формирует своеобразную карту динамических инвариантов

Построение полного набора динамических инвариантов механической колебательной системы предполагает разбиение множества параметров на систему границ, областей и точек пересечения границ, в которых возможно существенное изменение динамических особенностей системы.

Часть изменений динамических состояний связана с «наложением» частоты обнуления на собственные

частоты системы, что приводит к своеобразной редукции динамических свойств системы с двумя степенями свободы к системе с одной степенью свободы. Можно предположить, что возможен и обратный к «наложению» эффект «расслоения» конечного динамического состояния системы с одной степенью свободы на режим обнуления и резонанс.

В плане особенностей оценки динамических свойств системы можно отметить, что результат оценки динамических свойств механической колебательной системы на основе точечной оценки существенным образом зависит и от особенностей внешнего возмущения и координаты точки.

Таким образом, разработан метод, позволяющий оценить полную совокупность обобщенных динамических состояний механической колебательной системы с двумя

степенями свободы, образованной твердым телом, совершающей упругие колебания в условиях внешних связей возмущений, динамическое состояние которой оценивается на основе точечных измерений.

Авторы полагают, что разработанный метод может быть развит в направлении оценки динамических свойств механических колебательных систем с помощью своеобразной метрики, заданной на карте динамических инвариантов.

Метод может быть использован для развития представлений о специфических динамических свойствах механических колебательных систем, используемых в качестве расчетных схем технических объектов транспортного и технологического назначения, находящихся в условиях связанных вибрационных нагружений.

### Литература

1. Калинин В.Н. Четыре фундаментальные проблемы теории системных исследований // Труды Военно-космической акад. им. А.Ф. Можайского. 2012. № 637-2. С. 62-73.
2. Harris S.M. Shock and Vibration Handbook. New York: McGraw - Hill Book So, 2009. 1168 p.
3. Inwnicki S. Handbook of railway vehicle dynamics. CRC Press Taylor & Francis Group, 2006. 527 p.
4. Clarence W. de Silva. Vibration: Fundamentals and Practice. Boca Raton, London, New York, Washington, D.C.: CRC Press, 2006. 1064 p.
5. Moheimani S.O. Reza, Halim D., Fleming A.J. Spatial control of vibration: Theory and experiments. World Scientific Publishing Co Ptc. Ltd. Singapore, 2003. 417 p.
6. Nessler P. Modelling and control of vibration in mechanical systems. Uppsala Univ. Sweden. URL: //www.it.uu.se 2005 (дата обращения: 13.01.2023).
7. Prenmont A. Vibration control of active structures: An introduction, Kluwer academic publisher. Dordrecht, 2002. 418 p.
8. Rocard Y. General Dynamics of Vibrations. Parsi: Masson, 1949. 458 p.
9. Антипов В.А. Подавление вибрации агрегатов и узлов транспортных систем: моногр. М.: Маршрут, 2006. 264 с.
10. Асташев В.К., Бабицкий В.И., Вульфсон И.И. Динамика машин и управление машинами. М.: Машиностроение, 1988. 240 с.
11. Karnovsky I.A., Lebed E. Theory of Vibration Protection, Springer International Publishing, Switzerland, 2016. 708 p.
12. Banakh L., Kempner M. Vibrations of Mechanical Systems with Regular Structure, Berlin; Heidelberg: Springer, 2010. 262 p.
13. Доронин С.В., Шокин Ю.И., Лепихин А.М., Москвичев В.В. Моделирование прочности и разрушения несущих конструкций технических систем. Новосибирск: Наука, 2005. 249 с.
14. Хохлов А.А. Динамика сложных механических систем. М.: МИИТ, 2002. 172 с.
15. Bobrovnikskii Y. Equations for energy characteristics of oscillatory systems with internal (hidden) degrees of freedom and application to acoustic metamaterials // Proceedings of Meetings on Acoustics. Ser. Proceedings of Meetings on Acoustics - ICA 2013. P. 065048.
16. Bobrovnikskii Yu.I. New method for estimating the energy characteristics of a vibrating elastic structure // Acoustical Physics. 1999. V. 45. № 3. P. 260-271.
17. Bobrovnikskii Yu.I., Korotkov M.P. Development and experimental testing of the technique for estimating the energy characteristics of a vibrating elastic structure by its input impedance // Acoustical Physics. 2000. V. 46. № 6. P. 655-662.
18. Белокобыльский С.В., Елисеев С.В., Кашуба В.Б. Импедансные подходы как одна из форм оценки динамических свойств механических колебательных систем в структурном математическом моделировании // Системы. Методы. Технологии. 2015. № 4 (28). С. 7-15.
19. Коловский М.З. Автоматическое управление виброзащитными системами. М.: Наука, 1976. 320 с.
20. Нехаев В.А., Николаев В.А., Смалев А.Н. Новый метод определения передаточных функций рельсового подвижного состава // Транспорт Урала. 2011. № 2 (29). С. 75-81.
21. Eliseev S.V., Eliseev A.V. Theory of Oscillations. Structural Mathematical Modeling in Problems of Dynamics of Technical Objects. Ser. Studies in Systems, Decision and Control. V. 252. Springer International Publishing, Cham, 2020. 521 p.
22. Елисеев С.В. Прикладной системный анализ и структурное математическое моделирование (динамика транспортных и технологических машин: связность движений, вибрационные взаимодействия, рычажные связи): моногр. Иркутск: ИрГУПС, 2018. 692 с.
23. Елисеев С.В., Елисеев А.В., Большаков Р.С., Хоменко А.П. Методология системного анализа в задачах оценки, формирования и управления динамическим состоянием технологических и транспортных машин: моногр. Новосибирск: Наука, 2021. 679 с.
24. Большаков Р.С. Особенности вибрационных состояний транспортных и технологических машин. Динамические реакции и формы взаимодействия элементов: моногр. Новосибирск: Наука, 2020. 411 с.
25. Елисеев А.В., Ситов И.С., Кузнецов Н.К. Системные подходы к оценке динамических состояний технических объектов при вибрационных нагружениях: частотные функции, динамические инварианты, методы регуляризации // Системы. Методы. Технологии. 2022. № 4 (56). С. 7-15.
26. Белокобыльский С.В., Елисеев С.В., Кашуба В.Б. Прикладные задачи структурной теории виброзащитных систем: моногр. СПб.: Политехника, 2013. 363 с.
27. Потураев В.Н., Надутый В.П., Юрченко А.В., Блюсс Б.А. Механика вибрационных машин с эластичными рабочими органами. Киев: Наукова думка, 1991. 152 с.
28. Блехман И.И., Джанелидзе Г.Ю. Вибрационное перемещение. М.: Наука, 1964. 410 с.
29. Быховский И.И. Основы теории вибрационной техники. М.: Машиностроение, 1968. 362 с.
30. Вайсберг Л.А. Проектирование и расчет вибрационных грохотов. М.: Наука, 1986. 144 с.
31. Елисеев А.В., Кузнецов Н.К., Николаев А.В. Концепция динамических инвариантов в оценке структурных особенностей механических колебательных систем // Транспортное, горное и строительное машиностроение: наука и производство. 2022. № 15. С. 18-30.

32. Eliseev A.V., Mironov A.S. Evaluation of the set of dynamic features of mechanical oscillatory systems based on the map of dynamic invariants // Journal of Advanced Research in Technical Science. 2022. № 32. P. 62-69.
33. Елисеев А.В., Кузнецов Н.К. Технология структурного математического моделирования технических объектов в условиях вибрационного нагружения: формы взаимодействий и динамические инварианты // iPolytech Journal. 2022. V. 26. № 3. P. 368-385.
34. Елисеев А.В., Кузнецов Н.К., Миронов А.С. Системный подход в оценке динамических состояний технических объектов: элементы концепции динамических инвариантов // Вестн. Астраханского гос. технического ун-та. Сер. Управление, вычислительная техника и информатика. 2023. № 1. С. 16-24.
35. Лурье А.И. Операционное исчисление и применение в технических приложениях. М.: Наука. 1959. 368 с.
36. Елисеев А.В., Выонг К.Ч. Некоторые возможности управления одномерным вибрационным полем технологической машины // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2016. № 1 (49). С. 33-41.
37. Елисеев А.В., Мамаев Л.А., Ситов И.С. Некоторые подходы к обоснованию схемы инерционного возбуждения в технологических вибрационных машинах // Системы. Методы. Технологии. 2015. № 4 (28). С. 15-24.
38. Елисеев А.В., Миронов А.С. Оценка динамических особенностей технических объектов в условиях связанных вибрационных нагружений на основе карты динамических инвариантов // Автоматизированное проектирование в машиностроении. 2022. № 13. С. 96-105.
39. Елисеев А.В., Миронов А.С. Оценка совокупности динамических особенностей механических колебательных систем на основе карты динамических инвариантов // Journal of Advanced Research in Technical Science. 2022. № 32. P. 62-69.
14. Hohlov A.A. Dynamics of complex mechanical systems. M.: MIIT, 2002. 172 p.
15. Bobrovnikskii Y. Equations for energy characteristics of oscillatory systems with internal (hidden) degrees of freedom and application to acoustic metamaterials // Proceedings of Meetings on Acoustics. Ser. Proceedings of Meetings on Acoustics - ICA 2013. P. 065048.
16. Bobrovnikskii Yu.I. New method for estimating the energy characteristics of a vibrating elastic structure // Acoustical Physics. 1999. V. 45. № 3. P. 260-271.
17. Bobrovnikskii Yu.I., Korotkov M.P. Development and experimental testing of the technique for estimating the energy characteristics of a vibrating elastic structure by its input impedance // Acoustical Physics. 2000. V. 46. № 6. P. 655-662.
18. Belokobyl'skij S.V., Eliseev S.V., Kashuba V.B. Impedance approaches as one of the forms of evaluation of dynamic properties of mechanical oscillatory systems in structural mathematical modeling // Systems. Methods. Technologies. 2015. № 4 (28). P. 7-15.
19. Kolovskij M.Z. Automatic control of vibration protection systems. M.: Nauka, 1976. 320 p.
20. Nekhaev V.A., Nikolaev V.A., Smalev A.N. A new method for determining the transfer functions of rail rolling stock // Transport of the Urals. 2011. № 2 (29). P. 75-81.
21. Eliseev S.V., Eliseev A.V. Theory of Oscillations. Structural Mathematical Modeling in Problems of Dynamics of Technical Objects. Ser. Studies in Systems, Decision and Control. V. 252. Springer International Publishing, Cham, 2020. 521 p.
22. Eliseev S.V. Applied system analysis and structural mathematical modeling (dynamics of transport and technological machines: connectivity of movements, vibration interactions, lever connections): monogr. Irkutsk: IrGUPS, 2018. 692 p.
23. Eliseev S.V., Eliseev A.V., Bol'shakov R.S., Homenko A.P. Methodology of system analysis in the tasks of assessment, formation and management of the dynamic state of technological and transport machines: monogr. Novosibirsk: Nauka, 2021. 679 p.
24. Bol'shakov R.S. Features of vibration states of transport and technological machines. Dynamic reactions and forms of interaction of elements: monogr. Novosibirsk: Nauka, 2020. 411 p.
25. Eliseev A.V., Sotov I.S., Kuznecov N.K. System approaches to the assessment of dynamic states of technical objects under vibration loads: frequency functions, dynamic invariants, regularization methods // Systems. Methods. Technologies. 2022. № 4 (56). P. 7-15.
26. Belokobyl'skij S.V., Eliseev S.V., Kashuba V.B. Applied problems of the structural theory of vibration protection systems: monogr. SPb.: Politehnika, 2013. 363 p.
27. Poturaev V.N., Nadutyj V.P., YUrchenko A.V., Blyuss B.A. Mechanics of vibrating machines with elastic working bodies. Kiev: Naukova dumka, 1991. 152 p.
28. Blekhnman I.I., Dzhanelidze G.YU. Vibrational displacement. M.: Nauka, 1964. 410 p.
29. Byhovskij I.I. Fundamentals of the theory of vibration technology. M.: Mashinostroenie, 1968. 362 p.
30. Vajsberg L.A. Design and calculation of vibrating screens. M.: Nauka, 1986. 144 p.
31. Eliseev A.V., Kuznecov N.K., Nikolaev A.V. The concept of dynamic invariants in the assessment of structural features of mechanical oscillatory systems // Transport, mining and construction engineering: science and production. 2022. № 15. P. 18-30.

#### Reference

1. Kalinin V.N. Four fundamental problems of the theory of system research // Trudy Voenno-kosmicheskoy akad. im. A.F. Mozhajskogo. 2012. № 637-2. P. 62-73.
2. Harris S.M. Shock and Vibration Handbook. New York: McGraw - Hill Book So, 2009. 1168 p.
3. Iwnicki S. Handbook of railway vehicle dynamics. CRC Press Taylor & Francis Group, 2006. 527 p.
4. Clarence W. de Silva. Vibration: Fundamentals and Practice. Boca Raton, London, New York, Washington, D.C.: CRC Press, 2006. 1064 p.
5. Moheimani S.O. Reza, Halim D., Fleming A.J. Spatial control of vibration: Theory and experiments. World Scientific Publishing Co Ptc. Ltd. Singapore, 2003. 417 p.
6. Nessler P. Modelling and control of vibration in mechanical systems. Uppsala Univ. Sweden. URL: //www.it.uu.se 2005 (data obrashcheniya: 13.01.2023).
7. Prenmont A. Vibration control of active structures: An introduction, Kluwer academic publisher. Dordrecht, 2002. 418 p.
8. Rocard Y. General Dynamics of Vibrations. Parsi: Masson, 1949. 458 p.
9. Antipov V.A. Vibration suppression of aggregates and nodes of transport systems: monogr. M.: Marshrut, 2006. 264 p.
10. Astashev V.K., Babickij V.I., Vul'fson I.I. Dynamics of machines and control of machines. M.: Mashinostroenie, 1988. 240 p.
11. Karnovsky I.A., Lebed E. Theory of Vibration Protection, Springer International Publishing, Switzerland, 2016. 708 p.
12. Banakh L., Kempner M. Vibrations of Mechanical Systems with Regular Structure, Berlin; Heidelberg: Springer, 2010. 262 p.
13. Doronin S.V., SHokin YU.I., Lepihin A.M., Moskvichev V.V. Modeling of strength and destruction of bearing structures of technical systems. Novosibirsk: Nauka, 2005. 249 p.

- loading: forms of interactions and dynamic invariants // iPolytech Journal. 2022. V. 26. № 3. P. 368-385.
34. Eliseev A.V., Kuznecov N.K., Mironov A.S. A systematic approach in assessing the dynamic states of technical objects: elements of the concept of dynamic invariants // Vestnik of Astrakhan State Technical University. Series: Management, Computer Science and Informatics. 2023. № 1. P. 16-24.
  35. Lur'e A.I. Operational calculus and application in technical application. M.: Nauka. 1959. 368 p.
  36. Eliseev A.V., Vyong K.C.H. Some possibilities of controlling a one-dimensional vibration field of a technological machine // Modern technologies. System analysis. Modeling. 2016. № 1 (49). P. 33-41.
  37. Eliseev A.V., Mamaev L.A., Sitov I.S. Some approaches to substantiating the scheme of inertial excitation in technological vibration machines // Systems. Methods. Technologies. 2015. № 4 (28). P. 15-24.
  38. Eliseev A.V., Mironov A.S. Evaluation of dynamic features of technical objects under conditions of connected vibration loads based on the map of dynamic invariants // Avtomatizirovanoe proektirovanie v mashinostroenii. 2022. № 13. P. 96-105.
  39. Eliseev A.V., Mironov A.S. Evaluation of the totality of dynamic features of mechanical oscillatory systems based on the map of dynamic invariants // Journal of Advanced Research in Technical Science. 2022. № 32. P. 62-69.