УДК 536.24 DOI:10.18324/2077-5415-2022-4-53-56

К расчету нестационарного несимметричного температурного поля в плоском теле

Ю.В. Видин[1a], В.С. Злобин[1в], А.А. Федяев[2c], В.Н. Федяева[3d]

[1] Сибирский федеральный университет, пр. Свободный, 79, Красноярск, Россия
[2] Санкт-Петербургский государственный лесотехнический университет им. С.М. Кирова, пер. Институтский, 5, Санкт-Петербург, Россия
[3] Братский государственный университет, ул. Макаренко, 40, Братск, Россия
[a, b] zlobinsfu@mail.ru, [c, d] vends1@mail.ru
[a] https://orcid.org/0000-0002-3777-6676, [в] https://orcid.org/0000-0002-4281-3857,
[c] https://orcid.org/0000-0001-6233-3757, [d] https://orcid.org/0000-0001-7320-9727
Статья поступила 01.11.2022, принята 18.11.2022

В современных условиях уделяется большое внимание проблемам теплопередачи. Без фундаментальных тепловых расчетов сейчас не может обойтись почти ни одна область производства. Основным средством изучения динамики переноса тепла в твердых телах служит аналитическая теория теплопроводности. Главной целью при проведении такого исследования является нахождение температурного поля внутри объема при известных краевых условиях. Данные о температурном поле позволяют судить о стадии завершенности технологической операции и при помощи обратной связи направленно воздействовать на внешние условия для интенсификации протекания всего процесса. Кроме того, расчет температурного поля может служить предпосылкой для определения механических напряжений и деформаций в изделии, вызванных неравномерностью распределения температуры, т. е. является основой для прочностных расчетов. Несимметричные граничные условия теплообмена являются наиболее близкими в практических условиях нагрева или охлаждения. Различная интенсивность теплообмена на граничных поверхностях технических изделий одновременно приводит к усложнению решения задач подобного класса, а конкретно, к более сложным характеристическим уравнениям. Решение таких уравнений в настоящее время в теории теплообмена, как правило, получают исключительно численными методами. В статье предложен аналитический метод решения характеристического уравнения для случая несимметричных граничных условий 3-го рода. Предложена простая аналитическая формула, позволяющая получать требуемое по условиям задачи число корней этого уравнения с высокой точностью. Предложенная аналитическая методика решения характеристических уравнений в задачах теплообмена является эффективной для исследования и получения результатов для широкого класса характеристических уравнений, что позволяет использовать ее в рассмотрении весьма сложных многопараметрических задач теплообмена. Представленные аналитические решения дополняют полученные ранее и при проведении исследований, в частности, характеристических уравнений родственного типа, содержащих повышенное число параметров, что, например, свойственно многослойным системам различной геометрической конфигурации.

Ключевые слова: несимметричные граничные условия; характеристическое уравнение; аналитическое решение; собственные числа; приближенные методы; бесконечные ряды.

On the calculation of a nonstationary asymmetric temperature field in a flat body

Yu.V. Vidin[1a], V.S. Zlobin[1b], A.A. Fedyaev[2c], V.N. Fedyaeva[3d]

[1] Siberian Federal University; 79, Svobodny Pros., Krasnoyarsk, Russia
[2] St. Peterburg State Forest University under name of S.M. Kirov; 5, Institutsky Per., St. Petersburg, Russia
[3] Bratsk state University; 40, Makarenko st., Bratsk, Russia
[a, b] zlobinsfu@mail.ru, [c, d] vends1@mail.ru
[a] https://orcid.org/0000-0002-3777-6676, [в] https://orcid.org/0000-0002-4281-3857,
[c] https://orcid.org/0000-0001-6233-3757, [d] https://orcid.org/0000-0001-7320-9727
Received 01.11.2022, accepted 18.11.2022

In modern conditions, much attention is paid to the problems of heat transfer. Almost no area of production can do without fundamental thermal calculations now. The main tool for studying the dynamics of heat transfer in solids is the analytical theory of heat conduction. The main goal in carrying out such a study is to find the temperature field inside the volume under known boundary conditions. Data on the temperature field make it possible to judge the stage of completion of the technological operation and, with the help of feedback, to influence the external conditions in order to intensify the entire process. In addition, the calculation of the temperature field can serve as a prerequisite for determining the mechanical stresses and deformations in the product caused by the uneven distribution of temperature, i.e. is the basis for strength calculations. Asymmetric boundary conditions of heat transfer are the closest in practical conditions of heating or cooling. Different intensity of heat transfer on the boundary surfaces of technical products at the same time leads to the complication of solving problems of this class, and specifically to more complex characteristic equations. The solution of such equations at present in the theory of heat transfer, as a rule, is obtained exclusively by numerical methods. The article proposes an analytical method for solving the characteristic equation for the case of asymmetric boundary conditions of the third kind. A simple analytical formula is proposed that makes it possible to obtain the number of roots of this equation required by the conditions of the problem with high accuracy. The proposed analytical technique for solving characteristic equations in heat transfer problems is effective for studying and obtaining results for a wide class of characteristic equations, which makes it possible to use it in considering very complex multi-parameter heat transfer problems. The presented analytical solutions supplement those obtained earlier and during re-

search, in particular, characteristic equations of a related type containing an increased number of parameters, which, for example, is characteristic of multilayer systems of various geometric configurations.

Keywords: asymmetric boundary conditions; characteristic equation; analytical solution; eigenvalues; approximate methods; infinite series.

Введение. В современных условиях проблемам теплопередачи уделяется большое внимание. Без фундаментальных тепловых расчетов сейчас не может обойтись почти ни одна область производства. Вопросы теплопередачи важны практически для любых областей промышленности — металлургической, химической, энергетической атомной энергетики и др.

Постоянное стремление к улучшению экономической и качественной эффективности различных технологических процессов, а также повышение требований к надежности работы конструкций при одновременном снижении минимально допустимых запасов прочности вызывает дальнейшее совершенствование методов тепловых расчетов. Практика требует создания все более тонких и в то же время более удобных инженерных способов математического анализа большого круга прикладных задач.

Одной из проблем, представляющих значительный интерес, являются вопросы, связанные с распространением тепла в твердых телах. К подобному же классу явлений могут быть отнесены задачи диффузии, течения жидкости через пористую среду (фильтрация), замедление нейтронов и др.

При проведении такого исследования основной целью является нахождение температурного поля внутри объема при известных краевых условиях, которые дают информацию о стадии завершенности технологической операции и при помощи обратной связи направленно воздействовать на внешние условия для интенсификации протекания всего процесса. Также расчет температурного поля может служить предпосылкой для определения механических напряжений и деформаций в изделии, вызванных неравномерностью распределения температуры, т. е. является основой для прочностных расчетов.

Процесс нагрева (охлаждения) плоского тела, как правило, характеризуется несимметричными граничными условиями 3-го рода [1–4]. Методы решения теории весьма распространенных задач теплопроводности твердых тел достаточно подробно рассмотрены в известных монографиях [2; 6]. В литературе также подробно исследованы методы решения таких задач — и аналитические [7; 8], и численные [9–12]. В связи с этим аналитическое решение такой задачи существенно усложняется по сравнению с ее частным случаем, а именно когда теплообмен на внешних поверхностях пластины симметричен [2; 5].

В работе предлагаются аналитические решения, которые дополняют ранее опубликованные результаты в данной области и позволяют определять необходимые собственные значения чисел для конкретной задачи в определенном диапазоне безразмерных чисел Био на внешних сторонах плоского тела. Последнее характерно, в частности, для многослойных систем переменной геометрической конфигурации.

Постановка и исследование задачи конвективного теплообмена. Важной особенностью при неодинаковых условиях теплообмена на противоположных поверхностях тела является то, что тепловой центр в ходе процесса постоянно смещается. При ряде допущений математическое решение для определения искомого неустановившегося температурного поля может быть представлено в следующем безразмерном виде [3; 4]:

$$\vartheta(X,\mathrm{Fo})=\frac{1+\mathrm{Bi}_1 X}{1+\mathrm{Bi}_1+\dfrac{\mathrm{Bi}_1}{\mathrm{Bi}_2}}-$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}A_n\left[\cos(\mu_n X)+\frac{\mathrm{Bi}_1}{\mu_n}\sin(\mu_n X)\right]\exp\left(-\mu_n^2\mathrm{Fo}\right), \quad (1)$$

где Bi_1 и Bi_2 — безразмерные числа Био на внешних сторонах плоского тела; $\vartheta(X,\mathrm{Fo})$ — безразмерная температура; t_{c1} и t_{c2} — температуры внешних греющих сред, K; $0\le X\le 1$ — безразмерная пространственная координата; δ — толщина пластины, $м$; $\mathrm{Fo}=\dfrac{a\tau}{\delta^2}$ — число Фурье; a — коэффициент температуропроводности материала, $\dfrac{м^2}{c}$; τ — время, c; $\mathrm{Bi}_1=\dfrac{\alpha_1\delta}{\lambda}$, $\mathrm{Bi}_2=\dfrac{\alpha_1\delta}{\lambda}$ — числа Био; α_1 и α_2 — коэффициенты теплообмена на внешних поверхностях, $\dfrac{вт}{м^2K}$; λ — коэффициент теплопроводности, $\dfrac{вт}{м\cdot K}$; A_n — тепловые амплитуды, равные:

$$A_n=\frac{1}{\left(1+\dfrac{\mathrm{Bi}_1}{\mathrm{Bi}_2}\right)\dfrac{\sin\mu_n\cos\mu_n+\mu_n}{2\sin\mu_n}+\dfrac{\mathrm{Bi}_1}{\mu_n}\sin\mu_n}, \quad (2)$$

μ_n — собственные значения данной задачи, определяемые на основе характеристического уравнения:

$$ctg\,\mu=\frac{\mu^2-\mathrm{Bi}_1\mathrm{Bi}_2}{(\mathrm{Bi}_1+\mathrm{Bi}_2)\mu}, \quad (3)$$

в котором параметры Bi_1 и Bi_2 равнозначны. Естественно, что в частном случае, а именно когда $\mathrm{Bi}_1=0$, рассматриваемая задача превращается в симметричную, и зависимости (1)–(3) существенно упрощаются. Данные задачи подробно исследованы в [2; 3; 5].

Основная сложность расчета температурного поля по аналитическому выражению (1) заключается в предварительном определении корней μ_n характеристического уравнения (3), которому соответствует бесчисленное множество чисел μ_n, причем каждый последующий больше предыдущего, т. е.:

$$\mu_1<\mu_2<\mu_3...<\mu_n<...$$

Для расчета неустановившегося температурного поля в начальной стадии процесса приходится учитывать тем большее количество корней уравнения

(3), чем меньше продолжительность начальной стадии нагрева (или охлаждения). В пособиях [1] и [4] приведены сравнительно обширные таблицы числовых значений нескольких первых корней зависимости типа (3). Кроме этого, в работах [13–18] приведены эффективные аналитические методы определения корней μ_n зависимости (3) для широкого диапазона изменения параметров Bi_1 и Bi_2.

В данной статье продолжены, в дополнение к названным, теоретические способы решения уравнения (3). Из анализа формулы (3) следует, что числа μ_n удовлетворяют условию:

$$(n-1)\pi \le \mu_n \le n\pi, \tag{4}$$

где $n = 1,2,3,4,5,6$ и т. д. Очевидно, что интервал (4) является значительным. Его можно существенно уменьшить, разбивая на две части. Нетрудно показать, что целесообразно вместо (4) использовать границы:

$$(n-1)\pi \le \mu_n \le \frac{2n-1}{2}\pi \tag{5}$$

при $\mathrm{Bi}_1\mathrm{Bi}_2 \le \dfrac{(2n-1)^2}{4}\pi^2$,

$$\frac{2n-1}{2}\pi \le \mu_n \le n\pi \tag{6}$$

при $\mathrm{Bi}_1\mathrm{Bi}_2 \ge \dfrac{(2n-1)^2}{4}\pi^2$.

Из соотношений (5) и (6) видно, что, благодаря им, удается искомый интервал уменьшить в два раза. В стадии регулярного режима теплового процесса основное значение при расчетах по решению (1) играет первый корень μ_1 характеристического уравнения (3). Для его аналитического определения авторами получено относительно несложное математическое выражение:

$$\mu_1 = \frac{\mathrm{Bi}_1 + \mathrm{Bi}_2 + 3}{6A}\left[\sqrt{1 + \frac{36(\mathrm{Bi}_1 + \mathrm{Bi}_2 + \mathrm{Bi}_1\mathrm{Bi}_2)A}{(\mathrm{Bi}_1 + \mathrm{Bi}_2 + 3)^2}}\right], \tag{7}$$

где:

$$A = \frac{(\mathrm{Bi}_1 + \mathrm{Bi}_2)[27(\mathrm{Bi}_1 + \mathrm{Bi}_2) + 6\mathrm{Bi}_1\mathrm{Bi}_2 + 63]}{945(\mathrm{Bi}_1 + \mathrm{Bi}_2 + 3)}. \tag{8}$$

Рекомендуемые соотношения (7) и (8) обладают высокой точностью в широком диапазоне чисел Bi_1 и Bi_2. Для сравнения здесь же указаны известные табличные величины. Анализ данных таблицы показывает, что в большинстве случаев расчетные значения μ_1 весьма близки к табличным [1]. Некоторое расхождение наблюдается при достаточно высоких величинах Bi_1 и Bi_2. При этом следует отметить, что рассчитанные значения μ_1 в большинстве вариантов незначительно превышают фактические. Проверкой приемлемости полученных величин μ_1 можно считать определение их на основе нижней границы путем вычисления:

$$arctg\left(\frac{\mu_1(\mathrm{Bi}_1 + \mathrm{Bi}_2)}{\mu_1^2 - \mathrm{Bi}_1\mathrm{Bi}_2}\right) = \mu_{1\min}. \tag{9}$$

Так в качестве иллюстрации предлагаемого подхода рассмотрим конкретный пример очень больших, характерных для весьма динамичных процессов теплообмена $\mathrm{Bi}_1 = \mathrm{Bi}_2 = 100$. Согласно аналитическому расчету по формулам (6) и (7), получим $\mu_1 = 3{,}4263$. Однако, согласно условию (4), величина μ_1 не может быть больше π. Поэтому в формулу (9) подставляем $\mu_{1\max} = \pi$. Тогда получим:

$$arctg\left(\frac{\pi(100 + 100)}{\pi^2 - 100 \cdot 100}\right) =$$
$$= arctg(-0{,}06289) = \mu_{1\min} = 3{,}0788,$$

это значение практически полностью соответствует табличной величине.

Далее следует рассмотреть возможность аналитических способов определения собственных значений уравнения (3) μ_n более высокого порядка ($n > 1$). Для этого целесообразно использовать соотношения типа [13]:

$$ctg[(n-1)\pi + \alpha] = ctg\,\alpha, \tag{10}$$

$$ctg\left[\frac{(2n-1)}{2}\pi + \alpha\right] = -tg\,\alpha. \tag{11}$$

На основе выражения (10) исходное соотношение (3) принимает вид:

$$ctg\,\alpha = \frac{[(n-1)\pi + \alpha]^2 - \mathrm{Bi}_1\mathrm{Bi}_2}{(\mathrm{Bi}_1 + \mathrm{Bi}_2)[(n-1)\pi + \alpha]}. \tag{12}$$

Отсюда, используя разложение функции $ctg\,\alpha$ в ограниченный степенной ряд, удается вывести приближенное алгебраическое уравнение, решение которого запишется:

$$\mu_n = (n-1)\pi + \frac{3}{2}\frac{(n-1)^2\pi^2 - (\mathrm{Bi}_1 + \mathrm{Bi}_2 + \mathrm{Bi}_1\mathrm{Bi}_2)}{(n-1)\pi(6 + \mathrm{Bi}_1 + \mathrm{Bi}_2)} \times$$
$$\times\left(\sqrt{1 + \frac{4}{3}\frac{(n-1)^2\pi^2(\mathrm{Bi}_1 + \mathrm{Bi}_2)(6 + \mathrm{Bi}_1 + \mathrm{Bi}_2)}{[(n-1)^2\pi^2 - (\mathrm{Bi}_1 + \mathrm{Bi}_2 + \mathrm{Bi}_1\mathrm{Bi}_2)]}} - 1\right). \tag{13}$$

Данное соотношение обладает вполне приемлемой технической точностью при умеренных величинах Bi_1 и Bi_2, и особенно при высоких порядковых номерах n. Так, в частности, в случае $\mathrm{Bi}_1 = \mathrm{Bi}_2 = 1$ и $n = 2$ согласно (13) получим $\mu_2 = 3{,}6898$, табличное $\mu_2 = 3{,}6732$ и при $n = 6$ будет $\mu_6 = 15{,}8342$, табличное значение равно $\mu_6 = 15{,}8341$. Особенностью формулы (13) является то, что расчет по ней характеризуется несколько завышенной величиной. При необходимости можно, используя найденный по (13) корень μ_n, уточнить его с помощью выражения (9) для любого значения номера n. Например, проводя расчет по методике, заложенной в зависимость (9),, находим, используя $\mu_2 = 3{,}6898$, более точный корень:

$$\mu_2 = arctg\frac{3{,}6898 \cdot 2}{3{,}6898^2 - 1} = arctg(0{,}585) = 3{,}671.$$

Применяя аналогичный математический подход и учитывая условие (12), получим еще дополнительно следующее расчетное выражение:

$$\mu_n = \left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)\left[1+\frac{\mathrm{Bi}_1+\mathrm{Bi}_2+2}{2\left(\mathrm{Bi}_1+\mathrm{Bi}_2+1+\dfrac{\mathrm{Bi}_1\mathrm{Bi}_2}{3}-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2n-1}{2}\pi\right)^2\right)}\times\right.$$
$$\left.\times\left(\sqrt{1+\frac{16\left(\mathrm{Bi}_1\mathrm{Bi}_2-\left(\dfrac{2n-1}{2}\pi\right)^2\right)\left(\mathrm{Bi}_1+\mathrm{Bi}_2+1+\dfrac{\mathrm{Bi}_1\mathrm{Bi}_2}{3}-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2n-1}{2}\pi\right)^2\right)}{\left[(\mathrm{Bi}_1+\mathrm{Bi}_2+2)(2n-1)\pi\right]}}-1\right)\right] \quad (14)$$

Данная зависимость применима в случае, когда:

$$\mathrm{Bi}_1\mathrm{Bi}_2 \geq \left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)^2 .$$

Проиллюстрируем вычислительные возможности формулы (14) на некоторых частных примерах. Рассмотрим варианты $\mathrm{Bi}_1 = \mathrm{Bi}_2 = 10$ и порядковые номера $n = 2$ и 3. Тогда, согласно решению (14), соответственно получим:

$$\mu_2 = 5{,}304 ,$$
$$\mu_3 = 80669 .$$

Эти величины практически полностью совпадают с табличными [1].

Заключение. Очевидно, что, применяя предлагаемый математический прием, можно также получить сравнительно несложные зависимости, если использовать выражения вида:

$$ctg\left[\frac{(2n-1)}{2}\pi-\alpha\right] = tg\,\alpha , \quad (15)$$

$$ctg\left[(n-1)\pi-\alpha\right] = -ctg\,\alpha . \quad (16)$$

Таким образом, полученные аналитические решения дополняют ранее опубликованные результаты в данной области и позволяют определять необходимые собственные значения μ_n уравнения (3) во всем диапазоне чисел Bi_1 и Bi_2. Также следует сказать, что данный способ может быть эффективно применен при проведении исследований характеристических уравнений родственного типа, содержащих повышенное число параметров, что, например, свойственно многослойным системам различной геометрической конфигурации.

Необходимо отметить, что чем более широкий круг сложных линейных задач теплопереноса будет аналитически исследован, тем существеннее удастся увеличить возможности теоретического изучения современных нелинейных процессов, которые весьма часто встречаются в инженерной практике.

Литература

1. Михайлов М.Д. Нестационарные температурные поля в оболочках. М.: Энергия, 1967. 120 с.
2. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высш. школа, 1967. 600 с.
3. Шнейдер П. Инженерные проблемы теплопроводности. М.: Изд-во иностранной лит., 1960. 479 с.
4. Григорьев Л.Я., Маньковский О.Н. Инженерные задачи нестационарного теплообмена. Л.: Энергия, 1968. 83 с.
5. Беляев Н.М., Рядно А.А. Методы теории теплопроводности. М.: Высш. школа, 1982. Ч. 1. 327 с.
6. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 486 с.
7. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. 2-е изд., доп. М.: Высш. школа, 1985. 480 с.
8. Кудинов В.А., Карташов Э.М., Калашников В.В. Аналитические решения задач тепломассопереноса и термоупругости для многослойных конструкций. М.: Высш. школа, 2005. 430 с.
9. Самарский А.А., Вабишевич П.Н. Вычислительная теплопередача. М.: Едиториал УРСС, 2003. 784 с.
10. Видин Ю.В., Злобин В.С., Федяев А.А. Аналитический метод расчета нестационарного температурного поля при линейной зависимости коэффициента теплопроводности от пространственной координаты // Системы. Методы. Технологии. 2019. № 3 (43). С. 58-62.
11. Morton K.W., Mayers D.F. Numerical Solution of Partial Differential Equations. Cambridge University Press, 2005.
12. Brenner S., Scott L.R. The Mathematical Theory of Finite Element Methods, Second Edition. Springer, 2002.
13. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1962. 608 с.
14. Видин Ю.В., Злобин В.С., Федяев А.А. К расчету нестационарной теплопроводности двухслойной плоской системы // Системы. Методы. Технологии. 2021. № 3 (51). С. 53-58.
15. Федяев А.А., Видин Ю.В., Злобин В.С. Нелинейные процессы переноса тепла в многослойных конструкциях. Братск: Изд-во БрГУ, 2020. 217 с.
16. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы для инженеров. М.: Высш. школа, 1994. 544 с.
17. Цой П.В. Методы расчета задач тепломассопереноса. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Энергоатомиздат, 1984. 414 с.
18. Berlyand O.S., Gavrilovo R.I., Prudnikov A.P. Tables of integral error functions and Hermite polynomials. Oxford: Pergamon Press, 1962.

References

1. Mihajlov M.D. Unsteady temperature fields in shells. M.: Energiya, 1967. 120 p.
2. Lykov A.V. Theory of thermal conductivity. M.: Vyssh. shkola, 1967. 600 p.
3. SHnejder P. Engineering problems of thermal conductivity. M.: Izd-vo inostrannoj lit., 1960. 479 p.
4. Grigor'ev L.YA., Man'kovskij O.N. Engineering problems of non-stationary heat transfer. L.: Energiya, 1968. 83 p.
5. Belyaev N.M., Ryadno A.A. Methods of the theory of thermal conductivity. M.: Vyssh. shkola, 1982. CH. 1. 327 p.
6. Karslou G., Eger D. Thermal conductivity of solids. M.: Nauka, 1964. 486 p.
7. Kartashov E.M. Analytical methods in the theory of thermal conductivity of solids. 2-e izd., dop. M.: Vyssh. shkola, 1985. 480 p.
8. Kudinov V.A., Kartashov E.M., Kalashnikov V.V. Analytical solutions of heat and mass transfer and thermoelasticity problems for multilayer structures. M.: Vyssh. shkola, 2005. 430 p.
9. Samarskij A.A., Vabishevich P.N. Computational heat transfer. M.: Editorial URSS, 2003. 784 p.
10. Vidin YU.V., Zlobin V.S., Fedyaev A.A. Analytical method for calculating a nonstationary temperature field with a linear dependence of the thermal conductivity coefficient on the spatial coordinate // Systems. Methods. Technologies. 2019. № 3 (43). P. 58-62.
11. Morton K.W., Mayers D.F. Numerical Solution of Partial Differential Equations. Cambridge University Press, 2005.
12. Brenner S., Scott L.R. The Mathematical Theory of Finite Element Methods, Second Edition. Springer, 2002.
13. Bronshtejn I.N., Semendyaev K.A. Handbook of Mathematics. M.: Gos. izd-vo fiz.-mat. lit., 1962. 608 p.
14. Vidin YU.V. Zlobin V.S., Fedyaev A.A. On the calculation of the unsteady thermal conductivity of a two-layer flat system // Systems. Methods. Technologies. 2021. № 3 (51). P. 53-58.
15. Fedyaev A.A., Vidin YU.V., Zlobin V.S. Nonlinear heat transfer processes in multilayer structures. Bratsk: Izd-vo BrGU, 2020. 217 p.
16. Amosov A.A., Dubinskij YU.A., Kopchenova N.V. Computational methods for engineers.. M.: Vyssh. shkola, 1994. 544 p.
17. Coj P.V. Methods for calculating heat and mass transfer problems. 2-e izd., pererab. i dop. M.: Energoatomizdat, 1984. 414 p.
18. Berlyand O.S., Gavrilovo R.I., Prudnikov A.P. Tables of integral error functions and Hermite polynomials. Oxford: Pergamon Press, 1962.