

## ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ И МАШИНОСТРОЕНИЯ

УДК 519.71, 62.752, 621.534, 629.4.015, 517.71-74

DOI:10.18324/2077-5415-2022-2-7-19

## Системный подход к оценке динамических состояний технических объектов транспортного и технологического назначения: структурные схемы, передаточные функции, динамические инварианты

А.В. Елисеев<sup>1а</sup>, И.С. Ситов<sup>2б</sup>, Н.К. Кузнецов<sup>1,3с</sup><sup>1</sup> Иркутский государственный университет путей сообщения, ул. Чернышевского, 15, Иркутск, Россия<sup>2</sup> Братский государственный университет, ул. Макаренко, 40, Братск, Россия<sup>3</sup> Иркутский национальный исследовательский технический университет, ул. Лермонтова, 83, Иркутск, Россия<sup>а</sup> eavsh@ya.ru, <sup>б</sup> sitov@yandex.ru, <sup>с</sup> knik@istu.edu<sup>а</sup> <https://orcid.org/0000-0003-0222-2507>; <sup>б</sup> <https://orcid.org/0000-0001-6785-632X>; <sup>с</sup> <https://orcid.org/0000-0002-3083-0182>

Статья поступила 01.04.2022, принята 18.04.2022

*Развивается системный подход к оценке динамических особенностей элементов механических колебательных систем, находящихся в условиях связанных внешних вибрационных нагрузений силовой или кинематической природы. Основой развиваемого подхода служит метод структурного математического моделирования, в рамках которого механическим колебательным системам, используемым в качестве расчетных схем технических объектов, сопоставляются схемы эквивалентных в динамическом отношении систем автоматического управления. Объектами, динамические состояния которых оцениваются в рамках методологического подхода, служат массоинерционные элементы механических колебаний систем. Предполагается, что система совершает малые вынужденные установившиеся колебания. Предметом исследования служат состояния и формы динамических взаимодействий элементов. Предложено развитие методологии структурного-математического моделирования в оценке динамических особенностей технических объектов на основе представлений о состояниях и формах взаимодействий элементов механических колебательных систем с несколькими степенями свободы с учетом зависимых внешних силовых нагрузений. В рамках единого методологического подхода разработан метод интерпретации динамических состояний элементов механических колебательных систем, находящихся под воздействием связанных возмущений силовой природы, с помощью ориентированных графов динамических состояний. Графы динамических состояний образованы вершинами и дугами, интерпретирующими динамические состояния и формы динамических взаимодействий элементов системы. Разработан подход, в котором совокупности динамических состояний взаимодействующих элементов механической колебательной системы с двумя степенями свободы рассмотрены в зависимости от характера связности внешних силовых возмущений. Предложен способ построения графов динамических состояний с учетом выбора специальных состояний. Показано, что построенные графы представляют собой конечный набор динамических инвариантов, отображающих особенности приложения внешних воздействий.*

**Ключевые слова:** механические колебательные системы; структурное математическое моделирование; динамическая подавленность; формы динамических взаимодействий; динамические инварианты.

## System approach to assessing the dynamic states of technical objects of transport and technological purpose: structural schemes, transfer functions, dynamic invariants

A.V. Eliseev<sup>1а</sup>, I.S. Sitov<sup>2б</sup>, N.K. Kuznetsov<sup>1,3с</sup><sup>1</sup> Irkutsk State Transport University; 15, Chernyshevsky St., Irkutsk, Russia<sup>2</sup> Bratsk State University; 40, Makarenko St., Bratsk, Russia<sup>3</sup> Irkutsk National Research Technical University; 83, Lermontov St., Irkutsk, Russia<sup>а</sup> eavsh@ya.ru, <sup>б</sup> sitov@yandex.ru, <sup>с</sup> knik@istu.edu<sup>а</sup> <https://orcid.org/0000-0003-0222-2507>; <sup>б</sup> <https://orcid.org/0000-0001-6785-632X>; <sup>с</sup> <https://orcid.org/0000-0002-3083-0182>

Received 01.04.2022, accepted 18.04.2022

*Systematic approach is being developed to evaluate the dynamic features of elements of mechanical oscillatory systems. The systems under consideration are under conditions of external vibration loads of a power or kinematic nature. It is assumed that the system makes small forced steady oscillations. A methodology of structural mathematical modeling for assessing the dynamic characteristics of*

technical objects is proposed. The approach is based on the method of structural mathematical modeling, in which a mechanical oscillatory system used as a design scheme of a technical object is compared with the scheme of a dynamically equivalent automatic control system. The objects whose dynamic states are evaluated are mass-inertial elements of mechanical oscillatory systems. The subject of the evaluation is the dynamic states and forms of interactions of elements of mechanical oscillatory systems with several degrees of freedom, taking into account dependent external force loads. Within the framework of a unified methodological approach, a method for interpreting dynamic states using oriented graphs has been developed. Graphs of dynamic states are formed by vertices and arcs interpreting dynamic states and forms of dynamic interactions of elements. The developed approach makes it possible to display the totality of the dynamic states of the system depending on the coefficient of connectivity of external force disturbances. It is shown that the constructed graphs can be considered as invariants reflecting the features of the dynamics of mechanical oscillatory systems under the influence of dependent external force disturbances.

**Keywords:** mechanical oscillatory systems; structural mathematical modeling; dynamic compliance; forms of dynamic interactions; dynamic invariants.

**Введение.** В рамках задач обеспечения безопасности транспортных и технологических комплексов особое значение приобретают системные разработки в направлении фундаментальных научных исследований [1; 2]. Методологические подходы к решению задач безопасного функционирования транспортного комплекса предполагают внимание к возможностям управления динамическими характеристиками технических объектов с учетом растущих требований к пропускной способности элементов транспортной инфраструктуры [3]. Особое место в задачах динамики занимают практические и теоретические вопросы, связанные с вибрационным воздействием на технические объекты [4–11]. Значительное развитие в этом направлении получили теория вибрационной защиты, вопросы управления колебаниями системы твердых тел и др. [12–16].

Разработка методологических основ управления динамическими характеристиками технических объектов предполагает развитие методов и средств оценки, контроля и формирования особенностей взаимодействия элементов технических объектов, находящихся под периодическим воздействием внешних силовых или кинематических факторов. В свою очередь, проблемы управления динамическими режимами технических объектов инициируют поиск методов математического моделирования существенных особенностей систем, находящихся в условиях вибрационных воздействий [19; 20].

Для оценки динамических состояний широкого класса технических объектов в инженерной практике часто на начальных этапах исследования в качестве расчетных схем используются механические колебательные системы с сосредоточенными параметрами. Широкое распространение в оценке динамических состояний получили методы структурного математического моделирования, в рамках которых механическим колебательным системам с несколькими степенями свободы, используемым в качестве расчетных схем технических объектов, сопоставляются структурные схемы эквивалентных в динамическом отношении систем автоматического управления [21–25].

Существенные динамические особенности, которые могут быть оценены на основе методов структурного математического моделирования, связаны с режимами динамического гашения колебаний, приведенными динамическими характеристиками, особенностями рычажных или дополнительных связей с учетом включения в систему устройств преобразований движений,

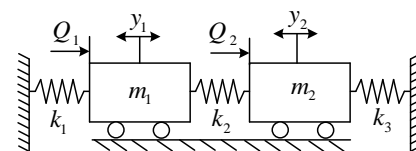
формами связности внешних возмущений, преобразованиями структурных схем и др. [26].

Некоторое развитие методы структурного математического моделирования получили в направлении оценки динамических характеристик механических колебательных систем на основе так называемых энергетических частотных функций и функций демпфирования [27–30]. В свою очередь, фундаментальными характеристиками механических колебательных систем, совершающих вынужденные установившиеся движения, являются динамические состояния и формы динамических взаимодействий элементов.

Вместе с тем, вопросы влияния характеристик элементов механических колебательных систем, параметров приложения внешних возмущений, особенностей включения устройств преобразования движения на многообразии возможных динамических состояний и форм динамических взаимодействий элементов требуют разработки новых методов на основе обобщенных представлений.

Статья посвящена разработке методологических основ оценки и классификации динамических состояний и форм динамических взаимодействий элементов механических колебательных систем, находящихся под воздействием зависимых внешних возмущений кинематической или силовой природы.

**I. Основные положения. Постановка задачи.** Рассматривается механическая колебательная система с двумя степенями свободы, образованная массоинерционными элементами  $m_1$ ,  $m_2$ , которые связаны между собой и с опорными поверхностями с помощью упругих элементов с жесткостями  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  (рис. 1).



**Рис. 1.** Расчетная схема технического объекта:  $m_1$ ,  $m_2$  —массоинерционные элементы;  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  — жесткости упругих элементов;  $y_1$ ,  $y_2$  — обобщенные координаты;  $Q_1$ ,  $Q_2$  — внешние силы

Под воздействием внешних гармонических синфазных силовых возмущений  $Q_1$  и  $Q_2$  элементы  $m_1$ ,  $m_2$  совершают малые установившиеся колебания относительно положения статического равновесия. В качестве обобщенных координат рассматриваются смещения  $y_1$ ,  $y_2$  массоинерционных элементов  $m_1$ ,  $m_2$  относительно положения статического равновесия.

На основе формализма Лагранжа с использованием функций потенциальной и кинетической энергии вида:

$$\Pi = \frac{1}{2}k_1y_1^2 + \frac{1}{2}k_2(y_2 - y_1)^2 + \frac{1}{2}k_3y_3^2, \quad (1)$$

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{y}_2^2. \quad (2)$$

строится система дифференциальных уравнений с учетом нулевых начальных условий:

$$m_1\ddot{y}_1 + (k_1 + k_2)y_1 - k_2y_2 = Q_1, \quad (3)$$

$$-k_2y_1 + m_2\ddot{y}_2 + (k_2 + k_3)y_2 = Q_2. \quad (4)$$

Построенная система (3)–(4) дифференциальных уравнений по действием преобразований Лапласа [31] с учетом нулевых начальных условий преобразуется к системе алгебраических уравнений относительно изображений  $\bar{y}_1, \bar{y}_2$ , рассматриваемых как функции комплексной переменной  $p = j\omega, j = \sqrt{-1}$ :

$$(m_1p^2 + k_1 + k_2)\bar{y}_1 - k_2\bar{y}_2 = \bar{Q}_1, \quad (5)$$

$$-k_2\bar{y}_1 + (m_2p^2 + k_2 + k_3)\bar{y}_2 = \bar{Q}_2. \quad (6)$$

На основе известных методов [26] алгебраическая система (5)–(6) может быть представлена структурной схемой эквивалентной в динамическом отношении системы автоматического управления (рис. 2).

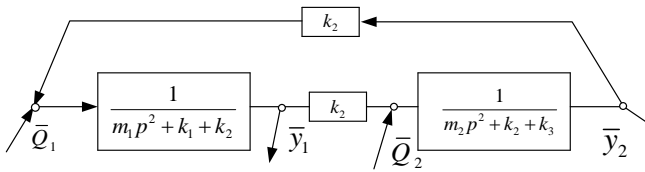


Рис. 2. Структурная схема механической колебательной системы на рис. 1

2. В предположении, что внешнее силовое воздействие приложено к массоинерционному элементу  $m_1$  ( $Q_1 \neq 0, Q_2 = 0$ ), особенности динамических взаимодействий элемента  $m_1$  определяются передаточной функцией системы в виде:

$$W_{11}(p) = \frac{\bar{y}_1}{\bar{Q}_1} = \frac{m_2p^2 + k_2 + k_3}{A(p)}, \quad (7)$$

где:

$$A(p) = (m_1p^2 + k_1 + k_2)(m_2p^2 + k_2 + k_3) - k_2^2 \quad (8)$$

— характеристический многочлен.

После подстановки  $p = j\omega$  передаточная функция (7) системы (рис. 2) принимает вид амплитудно-частотной характеристики:

$$A_{11}(\omega) = \frac{-m_1\omega^2 + k_1 + k_2}{(-m_1\omega^2 + k_1 + k_2)(-m_2\omega^2 + k_2 + k_3) - k_2^2}. \quad (9)$$

График амплитудно-частотной характеристики отображает совокупность динамических особенностей, связанных с динамическим гашением колебаний и резонансом (рис. 3).

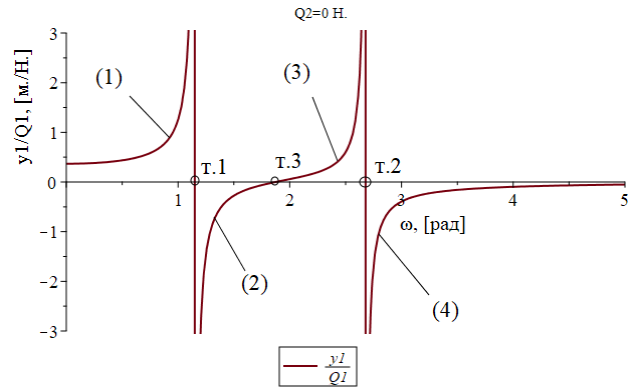


Рис. 3. Амплитудно-частотная характеристика передаточного отношения  $\bar{y}_1/\bar{Q}_1$ : 1, 3 — положительные ветви графика; 2, 4 — отрицательные ветви графика; т. 1. и т. 2 — отображают собственные частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$ ; т. 3 отображает частоту динамического гашения

3. Амплитудно-частотная характеристика определена выбором объекта, динамическое состояние которого оценивается. В рамках исследования объектом оценки служит массоинерционный элемент  $m_1$ . Для рассматриваемой системы совокупность динамических особенностей, представленных амплитудно-частотной характеристикой, может быть отображена в виде ориентированных графов, построение которых определяется выбором предмета исследования и системой обобщений. Если предметом исследования служит конкретное динамическое состояние механической колебательной системы, то системе сопоставляется ориентированный граф динамических состояний, в котором вершины отображают динамические состояния, связанные с характерными частотами (собственные частоты системы, частоты динамического гашения колебаний, частоты обнуления амплитуды колебания и др.), а дуги отображают формы динамических взаимодействий, которые определяются направленностями движений элемента механической колебательной системы относительно рассматриваемого в качестве базового возмущения силовой или кинематическая природы.

Форма динамического взаимодействия считается положительной, если направленности движения элемента в виде синусоиды совпадает с направленностью, взятой за базовую, изменения внешнего возмущающего фактора силовой природы (рис. 4, а). Форма динамического взаимодействия элемента системы с координатой  $y_1$ , совершающего малые установившиеся колебания под воздействием внешнего силового возмущения  $Q_1$ , считается отрицательной, если направленность движения элемента противоположна направленности изменений внешнего возмущения (колебания находятся в противофазе)  $Q_1$  (рис. 4, б).

4. В рамках представлений о синфазных установившихся колебаниях с амплитудами, которые могут принимать положительные и отрицательные значения, «положительность» и «отрицательность» форм динамических взаимодействий элемента эквивалентны «положительности» и «отрицательности» передаточного отношения  $\bar{y}_1/\bar{Q}_1(\omega)$  на определенной частоте  $\omega$ .

В частности, совокупность динамических состояний и форм динамических взаимодействий элемента системы  $y_1$  на частотном интервале  $(0, \omega_1)$ , представленная  $\bar{y}_1/\bar{Q}_1(\omega)$  амплитудно-частотной характеристикой (рис. 3), может быть представлена в виде графа  $G_0 = \{V_0, E_0\}$  (рис. 5), образованного вершинами  $V_0 = \{v^0_1, v^0_2\}$ , где вершина  $v^0_1 = \{0_<\}$  отображает состояние покоя системы при отсутствии внешнего возмущения  $\omega = 0$ , вершина  $v^0_2 = \{\infty\}$  отображает состояние резонанса на первой собственной частоте  $\omega = \omega_1$ , и дуга  $E_0 = \{e^0_1\}$ , где  $e^0_1 = \langle (v^0_1, v^0_2), +\rangle$  отображает положительную форму взаимодействия и соответствует положительной ветви графика амплитудно-частотной характеристики (рис. 3, линия 3).

Таким образом, особенности динамических взаимодействий элементов системы, находящейся под воздействием внешнего силового возмущения, на фиксированном частотном интервале могут быть представлены ориентированным графом. Число вершин графа определяется с учетом существенных признаков, зависящих от специфики анализируемых характеристик объекта, динамические состояния которого оцениваются.

5. Совокупность динамических состояний на интервале  $(0, \omega_1)$  в виде графа  $G_0$  (рис. 5) может быть расширена до совокупности динамических состояний. Для оценки динамических особенностей элемента  $y_1$  на я оценки динамических особенностей элемента  $G' = \{V', E'\}$  (рис. 6, а) на основе амплитудно-частотной характеристики, рассматриваемой в области  $(0, \infty)$  (рис. 3).

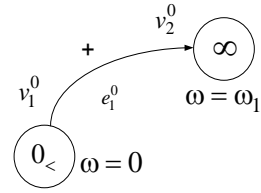


Рис. 5. Ориентированный граф  $G_0 = \{V_0, E_0\}$  динамических взаимодействий элемента  $y_1$  на частотном интервале  $(0, \omega_1)$ ,  $\omega_1$  — первая собственная частота;  $V_0 = \{v^0_1, v^0_2\}$ , где  $v^0_1, v^0_2$  — вершины графа;  $E_0 = \{e^0_1\}$ ,  $e^0_1 = \langle (v^0_1, v^0_2), +\rangle$  — ориентированная дуга отражает положительную форму динамических взаимодействий элемента  $m_1$  с координатой  $y_1$

Совокупность динамических состояний элемента  $y_1$  может быть представлена вершинами  $V' = \{v'_1, v'_2, v'_3, v'_4, v'_5\}$ , где вершина  $v'_1 = \{0_<\}$  отображает состояние «покоя», когда к системе не приложено внешнее возмущение ( $\omega = 0$ ),  $v'_2 = \{\infty\}$  отображает состояние резонанса на первой собственной частоте  $\omega = \omega_1$  (рис. 3, т. 1),  $v'_3 = \{0\}$  отображает состояние «обнуления» амплитуды колебания координаты  $y_1$  на частоте  $\omega = \omega_0$  (рис. 3, т. 3), вершина  $v'_4 = \{\infty\}$  отображает состояние резонанса на второй собственной частоте  $\omega = \omega_2$  (рис. 3, т. 2),  $v'_5 = \{0_\infty\}$  отображает предельное состояние, соответствующее возрастанию частоты внешнего возмущения  $\omega \rightarrow \infty$ , для которого можно полагать, что амплитуда колебания обнуляется (система «запирается»).

Формы динамических взаимодействий элемента  $y_1$ , определяемые знакопостоянными ветвями амплитудно-частотной характеристики на частотных интервалах (рис. 3, линии 1–4), могут быть отображены множеством дуг  $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ , где  $e_1 = \langle (v_1, v_2), +\rangle$  отображает положительные формы взаимодействий элемента  $y_1$  на частотном интервале  $(0, \omega_1)$ , что соответствует положительной ветви (рис. 3, линия 1) амплитудно-частотной характеристики  $\bar{y}_1/\bar{Q}_1(\omega)$ ,  $e_2 = \langle (v_2, v_3), -\rangle$  отображает отрицательные формы взаимодействий элемента  $y_1$  на частотном интервале  $(\omega_1, \omega_0)$ , где  $\omega_0$  — частота обнуления координаты  $y_1$ , что соответствует отрицательной ветви (рис. 3, линия 2) амплитудно-частотной характеристики  $\bar{y}_1/\bar{Q}_1(\omega)$ ,  $e_3 = \langle (v_3, v_4), +\rangle$  отображает положительные формы взаимодействий элемента  $y_1$  на частотном интервале  $(\omega_0, \omega_2)$ , что соответствует положительной ветви (рис. 3, линия 3) амплитудно-частотной характеристики  $\bar{y}_1/\bar{Q}_1(\omega)$ ,  $e_4 = \langle (v_4, v_5), -\rangle$  отображает отрицательные формы взаимодействий элемента  $y_1$  на частотном интервале  $(\omega_2, \infty)$ , что соответствует отрицательной ветви (рис. 3, линия 4) амплитудно-частотной характеристики  $\bar{y}_1/\bar{Q}_1(\omega)$ .

6. Наравне с графом  $G$  (рис. 6, а) может быть рассмотрен граф  $G' = \{V', E'\}$  (рис. 6, б) с множеством вершин  $V' = \{v'_1, v'_2, v'_3, v'_4\}$ , где  $v'_2, v'_4$  отображают те же динамические состояния (резонанса), что и вершины  $v_2, v_4$  графа  $G$ .

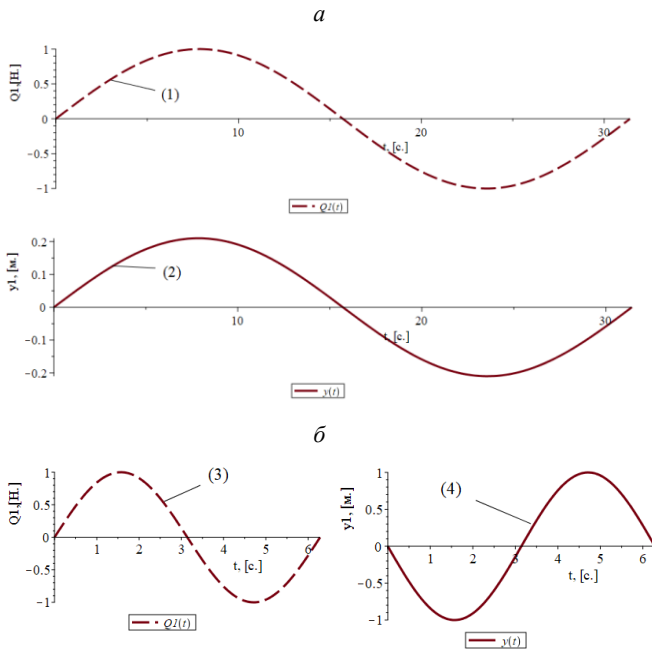
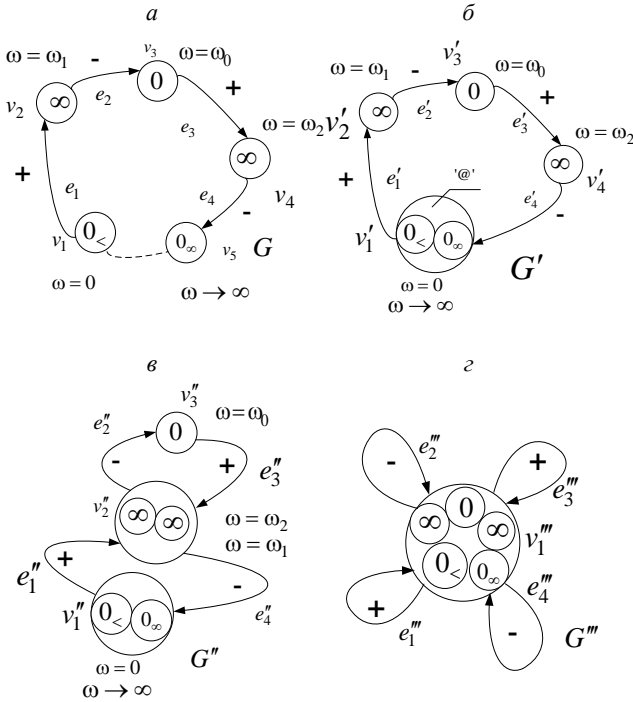


Рис. 4. Формы динамических взаимодействий элемента механической колебательной системы для различных частот внешнего возмущения: а — положительная форма взаимодействия (1 — график внешнего возмущения  $Q_1$  на частоте  $\omega = 1$  рад./с, 2 — график координаты  $y_1$ ); б — отрицательная форма взаимодействия (3 — график внешнего возмущения  $Q_1$  на частоте  $\omega = 0.2$  рад./с, 4 — график смещения координаты  $y_1$ )



**Рис. 6.** Граф динамических состояний: *a* — граф  $G = \{V, E\}$  динамических состояний для элемента  $y_1$ ; *б* — граф  $G' = \{V', E'\}$  динамических состояний с отождествленными вершинами  $v_1$  и  $v_5$  графа  $G$ ; *в* — граф  $G'' = \{V'', E''\}$  динамических состояний с отождествленными вершинами  $v'_2$  и  $v'_4$  графа  $G'$ ; *г* — граф  $G''' = \{V''', E'''\}$  динамических состояний с отождествленными вершинами  $v''_1, v''_2$  и  $v'_4$  графа  $G''$

В свою очередь, «крайние» вершины  $v_1, v_5$  могут быть условно отождествлены между собой и представлены одной обобщенной вершиной  $v'_1 = '@'$ , так как, с определенной степенью допущения, можно полагать, что реализуются колебания с нулевой амплитудой для двух вариантов частот, а именно, для частоты, близкой к нулю  $\omega = 0$ , и для предельно больших частот  $\omega \rightarrow \infty$ .

В результате отождествления двух специфических состояний системы совокупность динамических состояний и форм динамических взаимодействий элемента системы может быть представлена «замкнутым» графом  $G' = \{V', E'\}$ , где множество состояний представлено вершинами  $V' = \{v'_1, v'_2, v'_3, v'_4\}$ , а множество форм динамических взаимодействий представлено множеством дуг  $E' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ , где дуги  $e'_1 = \langle (v'_1, v'_2), + \rangle$  и  $e'_3 = \langle (v'_3, v'_1), + \rangle$  отображают положительные формы взаимодействий элемента  $y_1$ , а дуги  $e'_2 = \langle (v'_2, v'_3), - \rangle$ ,  $e'_4 = \langle (v'_4, v'_1), - \rangle$  отображают отрицательные формы взаимодействий элемента  $y_1$  механической колебательной системы, находящейся под воздействием внешнего силового возмущения  $Q_1$ .

**7. Отождествление «крайних» динамических состояний** может быть обобщено на состояния резонанса механической колебательной системы. В частности, могут быть отождествлены состояния резонанса системы. Соответствующий граф  $G''$  (рис. 6, в) образован двумя вершинами на основе графа  $G'$  путем отождествления вершин резонансов  $v'_2$  и  $v'_4$  между собой и

отображения совокупности резонансов с помощью вершины  $v''_2$  графа  $G''$ .

Вместе с тем, для определения обобщенных динамических особенностей механической колебательной системы между собой могут быть отождествлены состояния резонансов, режимов «обнуления» координат и «крайних» режимов «покоя-запирания» (рис. 6, г). Совокупность динамических состояний с учетом отождествления динамических состояний  $V''$  определяется графом  $G''' = \{V''', E'''\}$ , образованным одной вершиной  $V''' = \{v'''_1\}$  и набором петель  $E''' = \{e'''_1, e'''_2, e'''_3, e'''_4\}$ , где петли  $e'''_1, e'''_3$  отображают положительные формы, а  $e'''_2, e'''_4$  — отрицательные формы взаимодействия элементов механической колебательной системы.

Таким образом, совокупность динамических состояний и форм динамических взаимодействий элемента механической колебательной системы, находящейся под воздействием силового возмущения, приложенного к массоинерционному элементу  $m_1$ , могут быть отображены в виде графов динамических состояний с учетом особенностей отождествления динамических состояний.

**8.** Вместе с тем, перераспределение между двумя массоинерционными элементами  $m_1$  и  $m_2$  механической колебательной системы двух зависимых силовых возмущений  $Q_1$  и  $Q_2$ , приложенных к соответствующим элементам, в виде:

$$Q_2 = \gamma Q_1, \tag{10}$$

где  $\gamma \in (-\infty, \infty)$  коэффициент связности определяет характер зависимости между амплитудами синфазных гармонических одновременно приложенных к элементам  $m_1$  и  $m_2$  возмущений силовой природы, существенным образом может изменить структуру совокупности динамических состояний и форм динамических взаимодействий элементов механической колебательной системы.

Задача заключается в разработке методологического подхода к оценке динамических особенностей в виде совокупности состояний и форм взаимодействий, выбранного в качестве объекта, массоинерционного элемента механической колебательной системы, находящейся под воздействием двух зависимых внешних гармонических синфазных возмущений силовой природы с учетом коэффициента связности возмущающих факторов.

**II. Математическая модель.** Рассматривается механическая колебательная система (см. рис. 1), находящаяся под воздействием зависимых силовых факторов (10). С учетом коэффициента связности (10) внешних возмущений система уравнений (5) и (6) принимает вид:

$$(m_1 p^2 + k_1 + k_2) \bar{y}_1 - k_2 \bar{y}_2 = \bar{Q}_1, \tag{11}$$

$$-k_2 \bar{y}_1 + (m_2 p^2 + k_2 + k_3) \bar{y}_2 = \gamma \bar{Q}_1. \tag{12}$$

Структурная схема (см. рис. 2) с учетом зависимости (10) внешних возмущений может быть преобразована к виду, явно содержащему коэффициент связности  $\gamma$  (рис. 7).

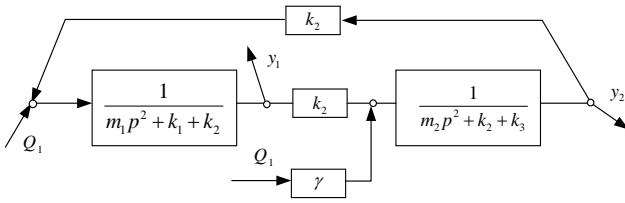


Рис. 7. Структурная схема (рис. 2) механической колебательной системы (рис. 1) с учетом коэффициента связности внешних воздействий  $\gamma$ .

Выбор объекта, динамическое состояние которого оценивается, определяет вид, приведенной к координате объекта, структурной схемы. В частности, структурная схема (рис. 7) приводится к координате  $y_1$  объекта  $m_1$  путем исключения координаты  $y_2$ . В качестве входного сигнала рассматривается  $Q_1$ , а в качестве выходного сигнала  $y_1$  (рис. 8).

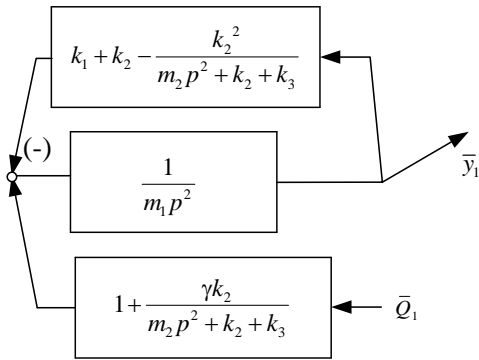


Рис. 8. Приведенная к объекту  $m_1$  структурная схема

Структурная схема (рис. 8) позволяет сформулировать некоторые положения о роли коэффициента связности  $\gamma$  внешних силовых возмущений. На основе структурных представлений (рис. 8) можно полагать, что роль коэффициента связности заключается в «блокировании» или «обнулении» внешнего возмущения  $Q_1$ , становится возможной интерпретация частоты «обнуления» фиксированной координаты как «блокировщика» внешнего воздействия на систему.

Вместе с тем, в качестве «альтернативной» причины обнуления координаты рассматривается достижение обратной отрицательной связью бесконечного значения на частоте «обнуления».

На основе структурной схемы (рис. 8) для оценки динамических особенностей элемента системы с учетом связности внешних возмущений может быть определено семейство передаточных функций:

$$W_{11}(\gamma, p) = \frac{\bar{y}_1}{Q_1} = \frac{m_2 p^2 + k_2 + k_3 + \gamma k_2}{A(p)}. \quad (13)$$

Для фиксированного коэффициента связности  $\gamma$ , отображающего характер зависимости внешних возмущений, передаточное отношение (13) представляет собой динамическую податливость приведенной системы (рис. 8).

Подстановка  $p = j\omega$  позволяет определить на основе передаточного отношения (13) амплитудно-частотную характеристику:

$$W_{11}(\gamma, p) \Big|_{p=j\omega} = \frac{\bar{y}_1}{Q_1}(\omega) = \frac{-m_2 \omega^2 + k_2 + k_3 + \gamma k_2}{(-m_1 \omega^2 + k_1 + k_2)(-m_2 \omega^2 + k_2 + k_3) - k_2^2}, \quad (14)$$

которая отображает совокупность динамических состояний и форм динамических взаимодействий элемента механической колебательной системы, находящейся под воздействием силовых факторов, связанных с помощью коэффициента  $\gamma$ .

**III. Влияние коэффициента связности на совокупности динамических состояний и форм динамических взаимодействий элемента системы.** Для установления зависимости динамических состояний и форм динамических взаимодействий от коэффициента связности внешних возмущений преобразуем характеристический многочлен (8) к виду, учитывающему явный вид парциальных частот  $n_1, n_2$ , и частот  $\Delta_1, \Delta_2$  отдельных фрагментов системы:

$$A(p) \Big|_{p=j\omega} = m_1 m_2 (\omega^4 - (n_1^2 + n_2^2) \omega^2 + n_1^2 n_2^2 - \Delta_1^2 \Delta_2^2), \quad (15)$$

где:

$$n_1^2 = \frac{k_1 + k_2}{m_1}, \quad (16) \quad n_2^2 = \frac{k_2 + k_3}{m_2}, \quad (17)$$

$$\Delta_1^2 = \frac{k_2}{m_1}, \quad (18) \quad \Delta_2^2 = \frac{k_2}{m_2} \quad (19)$$

— характерные частоты системы.

В новых обозначениях (16)–(19) собственные частоты системы  $\omega_1, \omega_2$  (см. рис. 1) принимают вид:

$$\omega_1^2 = \frac{n_1^2 + n_2^2}{2} - \sqrt{\left(\frac{n_1^2 - n_2^2}{2}\right)^2 + \Delta_1^2 \Delta_2^2}, \quad (20)$$

$$\omega_2^2 = \frac{n_1^2 + n_2^2}{2} - \sqrt{\left(\frac{n_1^2 - n_2^2}{2}\right)^2 + \Delta_1^2 \Delta_2^2}. \quad (21)$$

Амплитудно-частотная характеристика (14) с учетом обозначений (16)–(21) может быть представлена в виде:

$$W_{11}(\gamma, p) \Big|_{p=j\omega} = \frac{\bar{y}_1}{Q_1} = \frac{-m_2 (\omega^2 - (n_2^2 + \gamma \Delta_2^2))}{m_1 m_2 (\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)}, \quad (22)$$

где  $\gamma$  — коэффициент связности внешних возмущений рассматривается как параметр, который принимает все возможные действительные значения: отрицательные, нулевые и положительные. В свою очередь, значение выражения  $n_2^2 + \gamma \Delta_2^2$  для фиксированного параметра  $\gamma$  определяет функциональные особенности отношения (22), зависящего от частоты внешнего возмущения  $\omega$ . Функциональные особенности дроби (22), выражающиеся в расположении полюсов, нулей и интервалов знакопостоянства, определяются значением  $n_2^2 + \gamma \Delta_2^2$  в сравнении с собственными частотами  $\omega_1, \omega_2$  в зависимости от коэффициента связности  $\gamma$ .

1. Рассматриваются коэффициенты связности  $\gamma$ , для которых выполнено строгое условие:

$$\gamma < \gamma_0, \quad (23)$$

где  $\gamma_0 = -n_2^2 / \Delta_2^2$  — критическое значение коэффициента связности внешних воздействий.

При условии (23) передаточное отношение (22) не имеет нулей, что означает отсутствие частот «обнуления» амплитуд колебания координаты  $y_1$ .

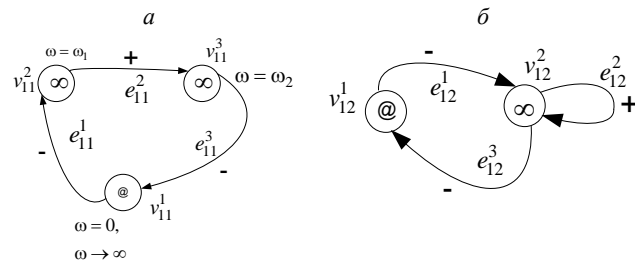
Аналитические характеристики динамических особенностей взаимодействий элемента  $m_1$  в виде полюсов, нулей и интервалов знакопостоянства амплитудно-частотной характеристики (22) определяются собственными частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$  системы (табл. 1).

Динамические состояния, определяемые частотами собственных колебаний, и формы динамических взаимодействий, отображающие положительную и отрицательные направленности движений на частотных интервалах  $(0, \omega_1)$ ,  $(\omega_1, \omega_2)$  и  $(\omega_2, \infty)$ , могут быть представлены графами динамических состояний (рис. 10, а, б).

**Таблица 1.** Особенности отношения  $W_{11}(\gamma, p)|_{p=j\omega}$

для  $\gamma < \gamma_0$

Частоты $\omega$	Особенность $W_{11}(\gamma, p) _{p=j\omega}$
[0]	$W_{11}(\gamma, 0)$
$(0, \omega_1)$	-
$[\omega_1]$	$\infty$
$(\omega_1, \omega_2)$	+
$[\omega_2]$	$\infty$
$(\omega_2, \infty)$	-



**Рис. 10.** Совокупности динамических состояний: а — граф  $G_{11} = \{V_{11}, E_{11}\}$  динамических состояний; б — граф  $G_{12} = \{V_{12}, E_{12}\}$  динамических состояний с учетом отождествления состояний с нулевой амплитудой и резонансов

Граф динамических состояний  $G_{11} = \{V_{11}, E_{11}\}$  с разделенными резонансами, образован множеством из трех вершин  $V_{11} = \{v_{11}^1, v_{11}^2, v_{11}^3\}$ , отображающих совокупность динамических состояний, где вершина  $v_{11}^1 = '@'$  отображает состояния «покоя-запирания», вершины  $v_{11}^2 = '\infty'$ ,  $v_{11}^3 = '\infty'$  отображают состояние резонанса на первой  $\omega_1$  и второй  $\omega_2$  собственных частотах соответственно (рис. 10, а).

Формы динамических взаимодействий интерпретируются множеством дуг  $E_{11} = \{e_{11}^1, e_{11}^2, e_{11}^3\}$ , где отрицательная форма взаимодействия элемента  $y_1$  на частотном интервале  $(0, \omega_1)$  отображается «отрицательной» дугой  $e_{11}^1 = \langle (v_{11}^1, v_{11}^2), - \rangle$ , выходящей из вершины  $v_{11}^1$  состояния «покоя» на нулевой частоте и направленной в вершину  $v_{11}^2$  резонанса на частоте  $\omega_1$ ; «положительная» дуга  $e_{11}^2 = \langle (v_{11}^2, v_{11}^3), + \rangle$ , направленная из вершины  $v_{11}^2$  в вершину  $v_{11}^3$ , отображающей состояние резонанса на частоте  $\omega_2$ , передает представление о «положительной» форме динамических взаимодействий элементов системы на частотном интервале

$(\omega_1, \omega_2)$ ; «отрицательная» дуга  $e_{11}^3 = \langle (v_{11}^3, v_{11}^1), - \rangle$  из вершины  $v_{11}^3$  в вершину  $v_{11}^1$  отображает «отрицательную» форму динамических взаимодействий элемента системы на частотном интервале  $(\omega_2, \infty)$ . В данном случае состояния «покоя» системы отождествляется с состоянием «запирания» системы, реализующимся по мере неограниченного возрастания частоты внешнего возмущения ( $\omega \rightarrow \infty$ ).

Наравне с графом  $G_{11}$  динамических состояний может быть построен граф  $G_{12}$  динамических состояний с объединенными резонансами, в котором динамические состояния резонансов на разных частотах отождествляются между собой (рис. 10, б). Граф  $G_{12} = \{V_{12}, E_{12}\}$  образован двумя вершинами  $V_{12} = \{v_{12}^1, v_{12}^2\}$ , где  $v_{12}^1 = '@'$  отображает состояние покоя, вершина  $v_{12}^2 = '\infty'$  отображает совокупность состояний резонанса. Формы динамических взаимодействий представлены множеством дуг  $E_{12} = \{e_{12}^1, e_{12}^2, e_{12}^3\}$ , где «отрицательные» дуги  $e_{12}^1 = \langle (v_{12}^1, v_{12}^2), - \rangle$  и  $e_{12}^3 = \langle (v_{12}^2, v_{12}^1), - \rangle$  отображают отрицательные формы взаимодействий элементов системы, а «положительная» петля  $e_{12}^2 = \langle (v_{12}^2, v_{12}^2), + \rangle$  отображает положительную форму взаимодействия элементов на интервале  $(\omega_1, \omega_2)$ .

2. Рассматривается критическое значение коэффициента связности:

$$\gamma = \gamma_0. \tag{24}$$

Амплитудно-частотная характеристика (22) при условии (24) принимает вид:

$$W_{11}(\gamma, p)|_{p=j\omega} = \frac{\bar{y}_1}{Q_1} = \frac{-m_2 \omega^2}{m_1 m_2 (\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)}. \tag{25}$$

Особенности динамических состояний и форм взаимодействий элемента  $m_1$  с учетом условия (24) определяются собственными частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$  системы (табл. 2).

Характерной особенностью отношения (25), отображающего совокупность динамических особенностей взаимодействий, является его «обнуление» на нулевой частоте  $\omega = 0$ , что может быть рассмотрено как реализация режима «обнуления» амплитуды  $y_1$  на бесконечно малой частоте  $\omega$ .

Совокупность динамических состояний и форм динамических взаимодействий для критического значения (24) коэффициента связности (табл. 2) может быть представлена графами  $G_{21}$ ,  $G_{22}$  динамических состояний (рис. 11, а, б).

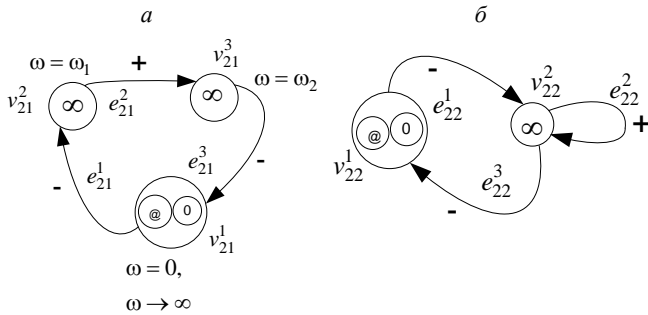
**Таблица 2.** Особенности отношения  $W_{11}(\gamma, p)|_{p=j\omega}$

для  $\gamma = \gamma_0$

Частоты $\omega$	Особенность $W_{11}(\gamma, p) _{p=j\omega}$
[0]	0
$(0, \omega_1)$	-
$[\omega_1]$	$\infty$
$(\omega_1, \omega_2)$	+
$[\omega_2]$	$\infty$
$(\omega_2, \infty)$	-

В отличие от вершин  $v_{11}^1$  и  $v_{12}^1$  графов  $G_{11}$  и  $G_{12}$  (рис. 10), вершины  $v_{21}^1 = \langle 0, '@ \rangle$  и  $v_{22}^1 = \langle 0, '@ \rangle$  графов

$G_{21}$  и  $G_{22}$ , в дополнение к состоянию «покоя» на нулевой частоте и состоянию «запираия» на предельно больших частотах, отображают динамические состояния «обнуления» амплитуд колебаний координаты  $y_1$  на предельно малых частотах внешних возмущений.



**Рис. 11.** Совокупность динамических состояний: *a* — граф  $G_{21} = \{V_{21}, E_{21}\}$  динамических состояний; *b* — граф  $G_{22} = \{V_{22}, E_{22}\}$  динамических состояний с учетом отождествления состояний с нулевой амплитудой и резонансов

3. Рассматривается коэффициент связности  $\gamma$ , удовлетворяющий условиям:

$$\gamma_0 < \gamma < \gamma_1, \tag{26}$$

где  $\gamma_1$  является решением уравнения:

$$n_2^2 + \gamma_1 \Delta_2^2 = \omega_1^2. \tag{27}$$

При условии (26) отношение (22) принимает вид:

$$W_{11}(\gamma, p) \Big|_{p=j\omega} = \frac{\bar{y}_1}{Q_1} = \frac{-m_2(\omega^2 - \omega_0^2)}{m_1 m_2 (\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)}, \tag{28}$$

где выражение:

$$\omega_0^2 = n_2^2 + \gamma \Delta_2^2 \tag{29}$$

определяет, обнуляющую амплитуду колебания координаты  $y_1$ , частоту  $\omega_0$ , которая находится на интервале  $(0, \omega_1)$  между нулевой частотой и первой собственной частотой  $\omega_1$ .

Особенности динамических состояний и форм взаимодействий элемента  $m_1$  определяются расположением частоты  $\omega_0$  «обнуления» амплитуды координаты  $y_1$  и собственными частотами  $\omega_1, \omega_2$  системы (табл. 3).

Динамические особенности взаимодействий элемента механической колебательной системы могут быть представлены (рис. 12, *a, б*) соответствующими графами динамических состояний элемента механической колебательной системы.

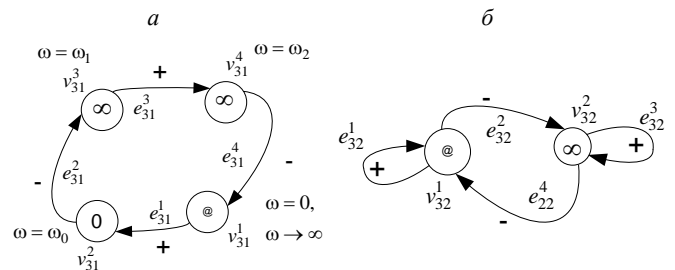
**Таблица 3.** Особенности отношения  $W_{11}(\gamma, p) \Big|_{p=j\omega}$

для  $\gamma_0 < \gamma < \gamma_1$

Частоты $\omega$	Особенность $W_{11}(\gamma, p) \Big _{p=j\omega}$
[0]	$W_{11}(\gamma, 0)$

$(0, \omega_0)$	+
[ $\omega_0$ ]	0
$(\omega_0, \omega_1)$	-
[ $\omega_1$ ]	$\infty$
$(\omega_1, \omega_2)$	+
[ $\omega_2$ ]	$\infty$
$(\omega_2, \infty)$	-

Граф динамических состояний  $G_{31} = \{V_{31}, E_{31}\}$  без учета отождествления состояний резонанса на собственных частотах образован совокупностью вершин  $V_{31} = \{v_{31}^1, v_{31}^2, v_{31}^3, v_{31}^4\}$ , где  $v_{31}^1 = \text{«@»}$  отображает обобщенное состояние «покоя-запираия»,  $v_{31}^2 = \text{«0»}$  отображает состояние «обнуления» координаты  $y_1$  на частоте  $\omega_0$  (29), вершины  $v_{31}^3 = \text{«}\infty\text{»}$  и  $v_{31}^4 = \text{«}\infty\text{»}$  отображают состояния резонанса на собственных частотах  $\omega_1$  и  $\omega_2$  соответственно. Формы динамических взаимодействий элемента системы представлены множеством дуг  $E_{31} = \{e_{31}^1, e_{31}^2, e_{31}^3, e_{31}^4\}$ , где дуга  $e_{31}^1 = \langle (v_{31}^1, v_{31}^2), '+' \rangle$  отображает положительную форму взаимодействия элемента системы на частотном интервале  $(0, \omega_0)$ , дуга  $e_{31}^2 = \langle (v_{31}^2, v_{31}^3), '-' \rangle$  отображает отрицательную форму взаимодействия на частотном интервале  $(\omega_0, \omega_1)$ , дуга  $e_{31}^3 = \langle (v_{31}^3, v_{31}^4), '+' \rangle$  отображает положительную форму взаимодействий на частотном интервале  $(\omega_1, \omega_2)$  и дуга  $e_{31}^4 = \langle (v_{31}^4, v_{31}^1), '-' \rangle$  отображает отрицательную форму взаимодействия элемента системы на частотном интервале  $(\omega_2, \infty)$  а е



**Рис. 12.** Совокупности динамических состояний: *a* — граф  $G_{31} = \{V_{31}, E_{31}\}$  динамических состояний; *b* — граф  $G_{32} = \{V_{32}, E_{32}\}$  динамических состояний с учетом отождествления состояний с нулевой амплитудой и резонансов

На основе представленного графа  $G_{31} = \{V_{31}, E_{31}\}$  динамических состояний может быть построен граф  $G_{32} = \{V_{32}, E_{32}\}$  с учетом отождествления между собой определенных динамических состояний, обладающих специфическими признаками. В частности, динамические состояния  $v_{31}^1$  и  $v_{31}^2$ , характеризуемые нулевой амплитудой колебания могут быть отождествлены между собой и представлены одной вершиной  $v_{32}^1 = \text{«0»}$ . Дополнительно между собой могут быть отождествлены состояния резонанса на различных частотах, что выражается «склежкой» вершин  $v_{31}^3$  и  $v_{31}^4$  в вершину  $v_{32}^2 = \text{«}\infty\text{»}$  состояния резонанса на различных  $G_{32}$  будет иметь множество вершин



$V_{32} = \{v^1_{32}, v^2_{32}\}$  и множество дуг  $E_{32} = \{e^1_{32}, e^2_{32}, e^3_{32}, e^4_{32}\}$ , где петли  $e^1_{32} = \langle (v^1_{32}, v^1_{32}), + \rangle$  и  $e^3_{32} = \langle (v^2_{32}, v^2_{32}), + \rangle$  отображают положительные формы динамических взаимодействий, а дуги  $e^2_{32} = \langle (v^1_{32}, v^2_{32}), - \rangle$  и  $e^4_{32} = \langle (v^2_{32}, v^1_{32}), - \rangle$  — отрицательные.

4. Рассматривается критическое значение коэффициента связности  $\gamma = \gamma_1$  (27). Передаточное (22) для  $\gamma = \gamma_1$  принимает вид:

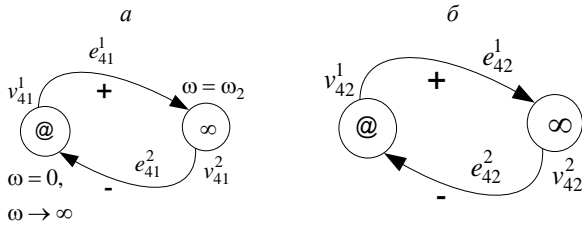
$$W_{11}(\gamma, p) \Big|_{p=j\omega} = \frac{\bar{y}_1}{Q_1} = \frac{-m_2}{m_1 m_2 (\omega^2 - \omega_2^2)}. \quad (30)$$

Динамические особенности взаимодействий элемента  $m_1$  определяются (табл. 4) совпадением частоты  $\omega_0$  «обнуления» амплитуды колебания координаты  $y_1$  с первой собственной частотой колебания  $\omega_1$  системы.

**Таблица 4.** Особенности отношения  $W_{11}(\gamma, p) \Big|_{p=j\omega}$  для  $\gamma = \gamma_1$

Частоты $\omega$	Особенность $W_{11}(\gamma, p) \Big _{p=j\omega}$
[0]	$W_{11}(\gamma, 0)$
$(0, \omega_2)$	+
$[\omega_2]$	$\infty$
$(\omega_2, \infty)$	-

Совокупность динамических состояний элемента  $m_1$  с координатой  $y_1$  системы может быть представлена в виде графа  $G_{41} = \{V_{41}, E_{41}\}$ , образованного вершинами  $V_{41} = \{v^1_{41}, v^2_{41}\}$ , где состояние «покоя-запираия» отображено вершиной  $v^1_{41} = '@'$ , а состояние резонанса на частоте  $\omega_2$  — вершиной  $v^2_{41} = '\infty'$  (рис. 13, а).



**Рис. 13.** Совокупности динамических состояний: а — граф  $G_{41} = \{V_{41}, E_{41}\}$  динамических состояний; б — граф  $G_{42} = \{V_{42}, E_{42}\}$  динамических состояний с учетом отождествления состояний с нулевой амплитудой и резонансов

Выбор специфического значения коэффициента связности внешних воздействий  $\gamma = \gamma_1$  определяет особенную совокупность динамических состояний, которая может быть представлена графом  $G_{41}$  динамических состояний, отличия которого от графа  $G_{31}$ , заключающаяся во взаимном «устранении» вершин  $v^2_{31}$  и  $v^3_{31}$ , отображающих состояния обнуления координаты  $y_1$  и резонанса соответственно. Граф динамических состояний  $G_{41}$  образован множеством дуг  $E_{41} = \{e^1_{41}, e^2_{41}\}$ , отображающих формы взаимодействий, где дуга  $e^1_{41} = \langle (v^1_{41}, v^2_{41}), + \rangle$  отображает положительную, а дуга  $e^2_{41} = \langle (v^2_{41}, v^1_{41}), - \rangle$  отрицательную формы взаимодействий.

Так как граф  $G_{41}$  содержит только две вершины, то граф  $G_{42}$  (рис. 13, б), образованный отождествлением

состояний резонанса на различных частотах, не изменится и будет совпадать с графом  $G_{41}$ .

5. Рассматривается значения коэффициента связности  $\gamma$ , удовлетворяющие условию:

$$\gamma_1 < \gamma < \gamma_2, \quad (31)$$

где величины  $\gamma_1 < 0$  и  $\gamma_2 > 0$  определяются на основе равенств между частотой «обнуления»  $\omega_0$  и соответствующей собственной частотой  $\omega_1$  или  $\omega_2$ :

$$n_2^2 + \gamma_1 \Delta_2^2 = \omega_1^2, \quad (32)$$

$$n_2^2 + \gamma_2 \Delta_2^2 = \omega_2^2. \quad (33)$$

С учетом условия (31) отношение (22) принимает вид:

$$W_{11}(\gamma, p) \Big|_{p=j\omega} = \frac{\bar{y}_1}{Q_1} = \frac{-m_2(\omega^2 - \omega_0^2)}{m_1 m_2 (\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)} \quad (34)$$

где  $\omega_0^2 = n_2^2 + \gamma \Delta_2^2$ , зависящая от коэффициента связности, характеристика, интерпретируемая как частота «обнуления» координаты  $y_1$ .

Особенности динамических состояний и форм взаимодействий элемента  $m_1$  определяются (табл. 5) тем, что частота  $\omega_0$  обнуления амплитуды координаты  $y_1$  находится между собственными частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$  системы.

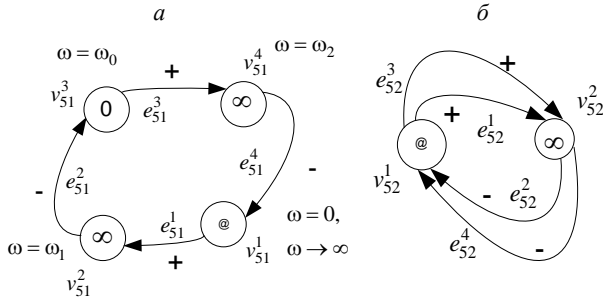
Соответствующие передаточному отношению (34) совокупности динамических состояний и форм динамических взаимодействий элементов системы могут быть отображены посредством графов (рис. 14, а, б). Граф динамических состояний  $G_{51} = \{V_{51}, E_{51}\}$  образован вершинами  $V_{51} = \{v^1_{51}, v^2_{51}, v^3_{51}, v^4_{51}\}$ , где  $v^1_{51} = '@'$  отображает состояние «покоя-запираия» на частотах  $\omega = 0$  и  $'$  отображает  $v^2_{51} = '\infty'$  отображает резонанс на частоте  $\omega = \omega_1$ , вершина  $v^3_{51} = '0'$  отображает состояние обнуления амплитуды колебания элемента на частоте  $\omega = \omega_0$ , вершина  $v^4_{51} = '\infty'$  отображает состояние резонанса на частоте  $\omega = \omega_2$  (рис. 14, а).

**Таблица 5.** Особенности передаточного отношения  $W_{11}(\gamma, p) \Big|_{p=j\omega}$  для  $\gamma_1 < \gamma < \gamma_2$

Частоты $\omega$	Особенность $W_{11}(\gamma, p) \Big _{p=j\omega}$
[0]	$W_{11}(\gamma, 0)$
$(0, \omega_1)$	+
$[\omega_1]$	$\infty$
$(\omega_1, \omega_0)$	-
$[\omega_0]$	0
$(\omega_0, \omega_2)$	+
$[\omega_2]$	$\infty$
$(\omega_1, \infty)$	-

С учетом отождествления между собой состояний  $v^1_{51}, v^3_{51}$  с нулевыми амплитудами и состояниями  $v^2_{51}, v^4_{51}$  резонанса совокупность динамических состояний может быть представлена графом  $G_{52} = \{V_{52}, E_{52}\}$ , образованным двумя вершинами  $V_{52} = \{v^1_{52}, v^2_{52}\}$ , где  $v^1_{52} = '0'$  отображает совокупность динамических со-

стояний с нулевой амплитудой колебаний, а вершина  $v_{52}^2 = ' \infty '$  – совокупность динамических состояний резонансов (рис. 14, б).



**Рис. 14.** Совокупности динамических состояний: а — граф  $G_{51} = \{V_{51}, E_{51}\}$  динамических состояний; б — граф  $G_{52} = \{V_{52}, E_{52}\}$  динамических состояний с учетом отождествления состояний с нулевой амплитудой и резонансов

В свою очередь, совокупность форм динамических взаимодействий элемента может быть представлена множеством дуг  $E_{52} = \{e_{52}^1, e_{52}^2, e_{52}^3, e_{52}^4\}$ , где  $e_{52}^1 = \langle (v_{52}^1, v_{52}^2), '+ \rangle$  отображает положительную форму динамических взаимодействий на интервале  $(0, \omega_1)$ ;  $e_{52}^2 = \langle (v_{52}^2, v_{52}^1), '- \rangle$  — отрицательную на интервале  $(\omega_1, \omega_0)$ ,  $e_{52}^3 = \langle (v_{52}^1, v_{52}^2), '+ \rangle$  — положительную на интервале  $(\omega_0, \omega_2)$ ,  $e_{52}^4 = \langle (v_{52}^2, v_{52}^1), '- \rangle$  отображает отрицательную форму динамического взаимодействия на интервале  $(\omega_2, \infty)$ .

**6.** Рассматривается критическое значение  $\gamma = \gamma_2$  коэффициента связности внешних возмущений, определенного из условий совпадения частоты  $\omega_0$  «обнуления» и собственной частоты  $\omega_2$ :

$$n_2^2 + \gamma_2 \Delta_2^2 = \omega_2^2. \tag{35}$$

Для коэффициента связности  $\gamma = \gamma_2$  соотношение (22) принимает вид:

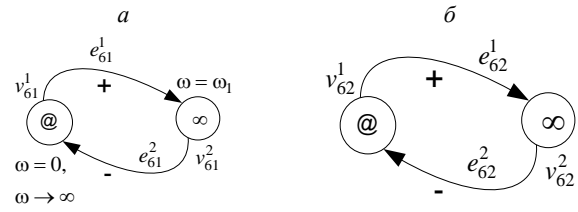
$$W_{11}(\gamma, p) \Big|_{p=j\omega} = \frac{\bar{y}_1}{Q_1} = \frac{-m_2}{m_1 m_2 (\omega^2 - \omega_1^2)}. \tag{36}$$

Соответствующие отношению (36) динамические особенности (табл. 6) взаимодействий элемента  $m_1$  определяются совпадением частоты  $\omega_0$  «обнуления» амплитуды колебания координаты  $y_1$  со второй собственной частотой колебания системы  $\omega_2$ .

**Таблица 6.** Особенности отношения  $W_{11}(\gamma, p) \Big|_{p=j\omega}$  для  $\gamma = \gamma_2$

Частоты $\omega$	Особенность $W_{11}(\gamma, p) \Big _{p=j\omega}$
[0]	$W_{11}(\gamma, 0)$
$(0, \omega_1)$	+
$[\omega_1]$	$\infty$
$(\omega_1, \infty)$	-

Совокупность динамических особенностей взаимодействий может быть отображена ориентированными графами с учетом характера отождествления динамических состояний (рис. 15, а, б).



**Рис. 15.** Совокупности динамических особенностей: а — граф  $G_{61} = \{V_{61}, E_{61}\}$  динамических состояний; б — граф  $G_{62} = \{V_{62}, E_{62}\}$  динамических состояний с учетом отождествления состояний с нулевой амплитудой и резонансов

Граф  $G_{61} = \{V_{61}, E_{61}\}$  динамических состояний образован множеством вершин  $V_{61} = \{v_{61}^1, v_{61}^2\}$ , где вершина  $v_{61}^1 = '@'$  отображает состояние «покоя-запирания», вершина  $v_{61}^2 = ' \infty '$  отражает состояние резонанса на частоте  $\omega = \omega_1$  (рис. 15, а). Соответствующие формы динамических взаимодействий представляются множеством дуг  $E_{61} = \{e_{61}^1, e_{61}^2\}$ , где положительная форма взаимодействия на частотном интервале  $(0, \omega_1)$  представляется дугой  $e_{61}^1 = \langle (v_{61}^1, v_{61}^2), '+ \rangle$ , а отрицательная форма взаимодействия на интервале  $(\omega_1, \infty)$  представляется дугой  $e_{61}^2 = \langle (v_{61}^2, v_{61}^1), '- \rangle$ .

Граф  $G_{62}$  обобщенных динамических состояний (рис. 15, б) остается без изменений и совпадает с графом  $G_{61}$ .

**7.** Рассматривается значение  $\gamma$  коэффициента связности, удовлетворяющее условию:

$$\gamma_2 < \gamma. \tag{37}$$

При выполнении условия (37) отношение (22) принимает вид:

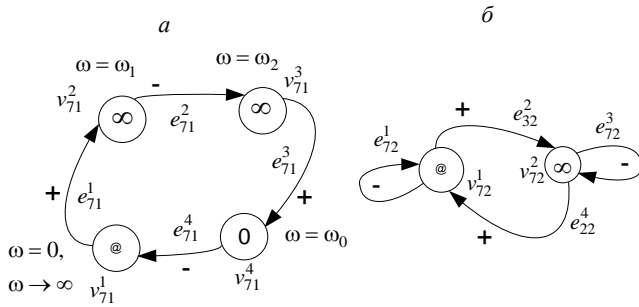
$$W_{11}(\gamma, p) \Big|_{p=j\omega} = \frac{\bar{y}_1}{Q_1} = \frac{-m_2(\omega^2 - \omega_0^2)}{m_1 m_2 (\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)}. \tag{38}$$

**Таблица 7.** Особенности отношения  $W_{11}(\gamma, p) \Big|_{p=j\omega}$  для  $\gamma_2 < \gamma$

Частоты $\omega$	Особенность $W_{11}(\gamma, p) \Big _{p=j\omega}$
[0]	$W_{11}(\gamma, 0)$
$(0, \omega_1)$	+
$[\omega_1]$	$\infty$
$(\omega_1, \omega_2)$	-
$[\omega_2]$	$\infty$
$(\omega_2, \omega_0)$	+
$[\omega_0]$	0
$(\omega_0, \infty)$	-

Соответствующие динамические особенности взаимодействий элемента  $m_1$  определяются тем, что частота  $\omega_0$  «обнуления» амплитуды колебания координаты  $y_1$  превышает собственные частоты колебаний системы  $\omega_1$  и  $\omega_2$ .

Соответствующая совокупность динамических особенностей может быть охарактеризована с помощью графов динамических состояний (рис. 16).



**Рис. 16.** Совокупности динамических особенностей: *a* — граф  $G_{71} = \{V_{71}, E_{71}\}$  динамических состояний; *б* — граф  $G_{72} = \{V_{72}, E_{72}\}$  динамических состояний с учетом отождествления состояний с нулевой амплитудой и резонансов

Ориентированный граф  $G_{71} = \{V_{71}, E_{71}\}$  отображает совокупность динамических состояний с помощью множества вершин  $V_{71} = \{v_{71}^1, v_{71}^2, v_{71}^3, v_{71}^4\}$ , где  $v_{71}^1 = '@'$  представляет состояние «покоя-запирания»,  $v_{71}^2 = '\infty'$  представляет резонанс на частоте  $\omega = \omega_1$ ,  $v_{71}^3 = '\infty'$  отображает резонанс на частоте  $\omega = \omega_2$ ,  $v_{71}^4 = '0'$  представляет состояние «обнуления» амплитуды колебания координаты  $y_1$  на частоте  $\omega = \omega_0$  (рис. 16, *a*).

В свою очередь, формы динамических взаимодействий отображены совокупностью дуг  $E_{71} = \{e_{71}^1, e_{71}^2, e_{71}^3, e_{71}^4\}$ , где  $e_{71}^1 = \langle (v_{71}^1, v_{71}^2), + \rangle$  отображает положительную форму взаимодействий элемента на частотном интервале  $(0, \omega_1)$ ,  $e_{71}^2 = \langle (v_{71}^2, v_{71}^3), - \rangle$  отображает отрицательную форму на частотном интервале  $(\omega_1, \omega_2)$ ,  $e_{71}^3 = \langle (v_{71}^3, v_{71}^4), + \rangle$  отображает положительную форму на частотном интервале  $(\omega_1, \omega_0)$  и  $e_{71}^4 = \langle (v_{71}^4, v_{71}^1), - \rangle$  отображает отрицательную форму на частотном интервале  $(\omega_0, \infty)$ .

Для отображения представлений об обобщенных состояниях обнуления амплитуды колебаний и состояний резонанса координаты  $y_1$  может быть использован граф (рис. 16, *б*)  $G_{72} = \{V_{72}, E_{72}\}$ , образованный вершинами  $V_{72} = \{v_{72}^1, v_{72}^2\}$ , где  $v_{72}^1 = '0'$  отображает совокупность состояний, реализуемых с нулевой амплитудой колебаний,  $v_{72}^2 = '\infty'$  отображает состояния резонанса (рис. 16, *б*). Особенности учета форм динамических взаимодействий представлены совокупностью дуг  $E_{72} = \{e_{72}^1, e_{72}^2, e_{72}^3, e_{72}^4\}$ , где  $e_{72}^1 = \langle (v_{72}^1, v_{72}^2), + \rangle$  отображает положительную форму взаимодействия элемента на интервале  $(0, \omega_1)$ , петля  $e_{72}^2 = \langle (v_{72}^2, v_{72}^2), - \rangle$  отображает отрицательные формы взаимодействий элемента на интервале  $(\omega_1, \omega_2)$ , дуга  $e_{72}^3 = \langle (v_{72}^2, v_{72}^1), + \rangle$  отображает положительные формы взаимодействий элемента на интервале  $(\omega_2, \omega_0)$ , петля  $e_{72}^4 = \langle (v_{72}^1, v_{72}^1), - \rangle$  отображает отрицательные формы взаимодействий элемента на интервале  $(\omega_0, \infty)$ .

**IV. Совокупность динамических особенностей как инвариант механической колебательной системы.** Совокупность динамических состояний и форм динамических взаимодействий для фиксированного силового воздействия может быть представлена в виде графов с учетом специфики отождествления динамических состояний, определенных фиксированными частотами или их предельными значениями, и форм ди-

намических взаимодействий, определяемых частотными интервалами.

Выбор специфики отождествления динамических состояний и форм динамических взаимодействий определен требуемым уровнем детализации решения задачи.

Для получения обобщенных представлений о динамических состояниях и формах динамических взаимодействий могут быть отождествлены между собой характерные динамические состояния или формы динамических взаимодействий. Результат отождествления характерных динамических состояний может быть представлен в виде графа с одной вершиной, отображающей совокупность состояний, рассматриваемых как тождественные, и некоторым набором петель, отображающих формы динамических взаимодействий на фиксированных частотных интервалах (табл. 8, строка II, столбцы 1–7).

Представленные графы (табл. 8) динамических состояний могут рассматриваться в качестве системы динамических инвариантов для детализации представлений о возможных типах динамических особенностей, определяемых условиями отождествления между собой динамических состояний элементов механической колебательной системы.

**Таблица 8.** Совокупность динамических инвариантов

№	Частотные интервалы	Совокупность динамических состояний и форм динамических взаимодействий
I	$\gamma < \gamma_0$	
II	$\gamma = \gamma_0$	
III	$\gamma_0 < \gamma < \gamma_1$	
IV	$\gamma = \gamma_1$	
V	$\gamma_1 < \gamma < \gamma_2$	
VII	$\gamma = \gamma_2$	
VIII	$\gamma_2 < \gamma$	

Графы динамических состояний являются аппаратом исследования в дополнение к амплитудно-частотным характеристикам передаточных отношений для отображения динамических особенностей механических колебательных система в обобщенном виде. Для механиче-

ских колебательных систем с двумя степенями свободы цепного типа или включающих в свой состав твердое тело реализованы программные разработки построения графа динамических особенностей [32; 33]. В общем случае вычислительная трудоемкость построения графа динамических сопоставима с задачей определения собственных частот.

#### Заключение

1. В рамках методов структурного математического моделирования развивается системный подход к оценке динамических состояний элементов механических колебательных систем, находящихся под воздействием внешних зависимых между собой силовых возмущений.

2. Предложен метод оценки динамических особенностей элементов механической колебательной системы с двумя степенями свободы, находящейся под воздействием двух силовых возмущений, зависимость которых определяется коэффициентом связанности.

3. Разработан метод оценки и форм динамических состояний системы на основе интерпретации совокупности динамических состояний в виде ориентированного графа динамических состояний элемента механической колебательной системы.

4. Разработана концепция динамических инвариантов в виде ориентированных графов, отображающих совокупности динамических состояний и форм дина-

мических взаимодействий элементов механических колебательных систем с учетом критериев отождествления динамических состояний между собой.

5. На основе разработанного метода предложен подход для оценки совокупности динамических состояний и формы динамических взаимодействий в зависимости от коэффициента связанности внешних силовых возмущений. Показано что коэффициент связанности определяет совокупности динамических состояний и форм динамических взаимодействий, которые могут быть рассмотрены в качестве инвариантов механической колебательной системы, находящейся под воздействием связанных сил.

6. На основе разработанной концепции показано, что совокупность динамических состояний механических колебательных систем, находящихся в условиях связанных внешних возмущений силовой природы, может быть охарактеризована конечной системой динамических инвариантов.

7. Предложенный подход может быть обобщен на механические колебательные системы с многими степенями свободы. В качестве области применения разработанной методологии могут служить задачи управления динамическим качеством работы вибрационных технических машин транспортного и технологического назначения.

#### Литература

- Махутов Н.А. Безопасность и риски: системные исследования и разработки. Новосибирск: Наука, 2017. 724 с.
- Лапидус Б.М. О формировании актуальных направлений фундаментальных научных исследований в интересах опережающего развития ОАО «РЖД» // Железнодорожный транспорт. 2019. № 6. С. 26-30.
- Стиславский А.Б., Цыгичко В.Н. Формальная постановка задачи обеспечения безопасности транспортного комплекса // Труды ИСА РАН. 2009. Т. 41. С. 26-42.
- Clarence W. de Silva. Vibration. Fundamentals and Practice. Boca Raton, London, New York, Washington, D.C.: CRC Press, 2000. 957 p.
- Harris C.M., Crede C.E. Shock and Vibration Handbook. New York: McGraw - Hill Book Co, 2002. 1457 p.
- Вибрации в технике: справ. в 6-ти т. Вибрационные процессы и машины / под ред. Э.Э. Лавенделла. М.: Машиностроение, 1981. Т. 4. 504 с.
- Rocard Y. General Dynamics of Vibrations. Paris: Masson, 1949. 458 p.
- Banakh L., Kempner M. Vibrations of Mechanical Systems with Regular Structure, Berlin; Heidelberg: Springer, 2010. 262 p.
- Пановко Г.Я. Динамика вибрационных технологических процессов. М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ин-т компьютерных технологий, 2006. 176 с.
- Копылов Ю.Р. Динамика процессов виброударного упрочнения. Воронеж: ИПЦ «Науч. книга», 2011. 568 с.
- Елисеев А.В., Сельвинский В.В., Елисеев С.В. Динамика вибрационных взаимодействий элементов технологических систем с учетом неустойчивающих связей. Новосибирск: Наука, 2015. 332 с.
- Коловский М.З. Автоматическое управление виброзащитными системами. М.: Наука, 1976. 320 с.
- Kolovsky M.Z. Nonlinear Dynamics of Active and Passive Systems of Vibration Protection-Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1999. 429 p.
- Елисеев С.В., Нерубенко Г.П. Динамические гасители колебаний. Новосибирск: Наука, 1982. 182 с.
- Karnovsky I.A., Lebed E. Theory of Vibration Protection. Springer International Publishing, Switzerland, 2016. 708 p.
- Корень Б.Г., Резников Л.М. Динамические гасители колебаний. Теория и технические приложения. М.: Наука, 1988. 304 с.
- Ганиев Р.Ф., Кононенко В.О. Колебания твердых тел. М.: Наука, 1976. 432 с.
- Хохлов А.А. Динамика сложных механических систем. М.: МИИТ, 2002. 172 с.
- Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. 2-е изд., испр. М.: Физматлит, 2001. 320 с.
- Тарасик В.П. Математическое моделирование технических систем. Минск: Дизайн ПРО, 2004. 640 с.
- Елисеев С.В., Резник Ю.Н., Хоменко А.П., Засядко А.А. Динамический синтез в обобщенных задачах виброзащиты и виброизоляции технических объектов. Иркутск: Изд-во ИГУ, 2008. 523 с.
- Хоменко А.П., Елисеев С.В., Ермошенко Ю.В. Системный анализ и математическое моделирование в мехатронике виброзащитных систем. Иркутск: ИрГУПС, 2012. 288 с.
- Елисеев С.В. Прикладной системный анализ и структурное математическое моделирование (динамика транспортных и технологических машин: связность движений, вибрационные взаимодействия, рычажные связи). Иркутск: ИрГУПС, 2018. 692 с.
- Елисеев А.В., Кузнецов Н.К., Московских А.О. Динамика машин. Системные представления, структурные схемы и связи элементов. М.: Инновационное машиностроение, 2019. 381 с.
- Eliseev S.V., Eliseev A.V. Theory of Oscillations. Structural Mathematical Modeling in Problems of Dynamics of Technical Objects. Series: Studies in Systems, Decision and Control. Springer International Publishing, Cham, 2020. V. 252. 521 p.
- Елисеев С.В., Елисеев А.В., Большаков Р.С., Хоменко А.П. Методология системного анализа в задачах оценки, формирования и управления динамическим состоянием технологических и транспортных машин. Новосибирск, 2021. 679 с.

27. Елисеев А.В., Кузнецов Н.К., Елисеев С.В. Частотная энергетическая функция в оценке динамических состояний технических объектов // Труды МАИ. 2021. № 118. Порядковый номер 4.
28. Елисеев А.В., Кузнецов Н.К., Елисеев С.В. Системный анализ в оценке динамических состояний технических объектов: динамическое гашение колебаний, связность внешних воздействий // Вестн. Инженерной школы Дальневосточного федер. ун-та. 2021. № 3 (48). С. 17-30.
29. Eliseev A.V., Eliseev S.V., Kuznetsov N.K., Bolshakov R.S. Possibilities of Using Frequency Energy Functions in Problems of Dynamics of Machines for Transport and Technological Purposes. MATEC Web of Conferences 346, 03073 (2021). URL: <https://doi.org/10.1051/mateconf/202134603073> (дата обращения: 15.04.2022).
30. Eliseev S.V., Eliseev A.V., Kuznetsov N.K. System Representations of Dynamics of Mechanical Oscillatory Structures Based on Frequency Function and Damping Function. In: Ronzhin A., Shishlakov V. (eds) Electromechanics and Robotics. Smart Innovation, Systems and Technologies. V. 232. Springer, Singapore. URL: [https://doi.org/10.1007/978-981-16-2814-6\\_29](https://doi.org/10.1007/978-981-16-2814-6_29) (дата обращения: 15.04.2022).
31. Лурье А.И. Операционное исчисление и применение в технических приложениях. М.: Наука. 1959. 368 с.
32. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ 2022610619, 13.01.2022. Заявка № 2021682457 от 27.12.2021.
33. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ 2022611399, 25.01.2022. Заявка № 2022610613 от 19.01.2022.
14. Eliseev S.V., Nerubenko G.P. Dynamic vibration dampers. Novosibirsk: Nauka, 1982. 182 p.
15. Karnovsky I.A., Lebed E. Theory of Vibration Protection. Springer International Publishing, Switzerland, 2016. 708 p.
16. Korenev B.G., Reznikov L.M. Dynamic vibration dampers. Theory and technical applications. M.: Nauka, 1988. 304 p.
17. Ganiev R.F., Kononenko V.O. Vibrations of solids. M.: Nauka, 1976. 432 p.
18. Hohlov A.A. Dynamics of complex mechanical systems. M.: МИИТ, 2002. 172 p.
19. Samarskiy A.A., Mihajlov A.P. Mathematical modeling: Ideas. Methods. Examples. 2-e izd., ispr. M.: Fizmatlit, 2001. 320 p.
20. Tarasik V.P. Mathematical modeling of technical systems. Minsk: Dizajn PRO, 2004. 640 p.
21. Eliseev S.V., Reznik YU.N., Homenko A.P., Zasyadko A.A. Dynamic synthesis in generalized problems of vibration protection and vibration isolation of technical objects. Irkutsk: Izd-vo IGU, 2008. 523 p.
22. Homenko A.P., Eliseev S.V., Ermoshenko YU.V. System analysis and mathematical modeling in the mechatronics of vibration protection systems.. Irkutsk: IrGUPS, 2012. 288 p.
23. Eliseev S.V. Applied system analysis and structural mathematical modeling (dynamics of transport and technological machines: connectivity of movements, vibration interactions, lever connections). Irkutsk: IrGUPS, 2018. 692 p.
24. Eliseev A.V., Kuznecov N.K., Moskovskih A.O. Dynamics of cars. System representations, block diagrams and connections of elements. M.: Innovacionnoe mashinostroenie, 2019. 381 p.
25. Eliseev S.V., Eliseev A.V. Theory of Oscillations. Structural Mathematical Modeling in Problems of Dynamics of Technical Objects. Series: Studies in Systems, Decision and Control. Springer International Publishing, Cham, 2020. V. 252. 521 p.

#### *References*

1. Mahutov N.A. Security and risks: system research and development. Novosibirsk: Nauka, 2017. 724 p.
2. Lapidus B.M. On the formation of current directions of fundamental scientific research in the interests of advanced development of JSC "Russian Railways" // ZHeleznodorozhnyj transport. 2019. № 6. P. 26-30.
3. Stislavskij A.B., Cygichko V.N. Formal statement of the task of ensuring the safety of the transport complex // Trudy ISA RAN. 2009. V. 41. P. 26-42.
4. Clarence W. de Silva. Vibration. Fundamentals and Practice. Boca Raton, London, New York, Washington, D.C.: CRC Press, 2000. 957 p.
5. Harris S.M., Srede C.E. Shock and Vibration Handbook. New York: McGraw - Hill Book So, 2002. 1457 p.
6. Vibrations in technology: sprav. v 6-ti t. Vibracionnye processy i mashiny / pod red. E.E. Lavendella. M.: Mashinostroenie, 1981. V. 4. 504 p.
7. Rocard Y. General Dynamics of Vibrations. Paris: Masson, 1949. 458 p.
8. Banakh L., Kempner M. Vibrations of Mechanical Systems with Regular Structure, Berlin; Heidelberg: Springer, 2010. 262 p.
9. Panovko G.YA. Dynamics of vibration technological processes. M.-Izhevsk: NIC «Regulyarnaya i haoticheskaya dinamika», In-t komp'yuternyh tekhnologij, 2006. 176 p.
10. Kopylov YU.R. Dynamics of vibration shock hardening processes. Voronezh: IPC «Nauch. kniga», 2011. 568 p.
11. Eliseev A.V., Sel'vinskij V.V., Eliseev S.V. Dynamics of vibrational interactions of elements of technological systems taking into account unilateral ties. Novosibirsk: Nauka, 2015. 332 p.
12. Kolovskij M.Z. Automatic control of vibration protection systems. M.: Nauka, 1976. 320 p.
13. Kolovsky M.Z. Nonlinear Dynamics of Active and Passive Systems of Vibration Protection-Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1999. 429 p.
26. Eliseev S.V., Eliseev A.V., Bol'shakov R.S., Homenko A.P. Methodology of system analysis in the tasks of assessment, formation and management of the dynamic state of technological and transport machines. Novosibirsk, 2021. 679 p.
27. Eliseev A.V., Kuznecov N.K., Eliseev S.V. Frequency energy function in the assessment of dynamic states of technical objects // Trudy MAI. 2021. № 118. Poryadkovyj nomer 4.
28. Eliseev A.V., Kuznecov N.K., Eliseev S.V. System analysis in assessing the dynamic states of technical objects: dynamic damping of vibrations, connectivity of external influences // Far Eastern Federal University: School of Engineering Bulletin. 2021. № 3 (48). P. 17-30.
29. Eliseev A.V., Eliseev S.V., Kuznetsov N.K., Bolshakov R.S. Possibilities of Using Frequency Energy Functions in Problems of Dynamics of Machines for Transport and Technological Purposes. MATEC Web of Conferences 346, 03073 (2021). URL: <https://doi.org/10.1051/mateconf/202134603073> (data obrashcheniya: 15.04.2022).
30. Eliseev S.V., Eliseev A.V., Kuznetsov N.K. System Representations of Dynamics of Mechanical Oscillatory Structures Based on Frequency Function and Damping Function. In: Ronzhin A., Shishlakov V. (eds) Electromechanics and Robotics. Smart Innovation, Systems and Technologies. V. 232. Springer, Singapore. URL: [https://doi.org/10.1007/978-981-16-2814-6\\_29](https://doi.org/10.1007/978-981-16-2814-6_29) (data obrashcheniya: 15.04.2022).
31. Lur'e A.I. Operational calculus and application in technical applications. M.: Nauka. 1959. 368 p.
32. Certificate of registration of the computer program 2022610619, 13.01.2022. Zayavka № 2021682457 от 27.12.2021.
33. Certificate of registration of the computer program 2022611399, 25.01.2022. Zayavka № 2022610613 от 19.01.2022.