

Фрикционные автоколебания диска при скольжении с верчением на движущейся ленте: обобщение модели Ван-дер-Поля с stick-slip

В.А. Коронатов

Ангарск, Россия

kortavik@mail.ru

<https://orcid.org/0000-0002-1331-213X>

Статья поступила 15.04.2022, принята 04.05.2022

Предложена новая модель фрикционных автоколебаний, обобщающая модель Ван-дер-Поля с грузом на движущейся с постоянной скоростью ленте. В качестве груза рассматривается диск, взаимодействующий с двумя пружинами растяжения-сжатия, как это было в классической модели, и кручения. Пружина растяжения-сжатия имеет закрепленный конец и способствует возникновению сил трения покоя и скольжения. Пружина кручения прикреплена перпендикулярно к центру верхнего основания диска, и ее свободный конец закручивается с постоянной угловой скоростью. В результате могут возникать моменты покоя и верчения. Диск имеет возможность совершать продольные колебания при скольжении вдоль ленты и одновременно крутильные — при верчении. При таком движении не будут справедливы закон Амонтона – Кулона для нахождения силы трения скольжения, причем и в дифференциальной форме тоже, и Кулона — для определения момента верчения. Для их применения не соблюдаются необходимые для этого условия, а именно: тела соприкосновения должны совершать исключительно поступательное движение относительно друг друга при использовании закона о трении скольжения. А для нахождения момента верчения должно совершаться чистое верчение, без скольжения. Для корректного применения указанных законов о трении используется метод кинематических зон с необходимыми для этого вносимыми поправками. Записаны уравнения, определяющие движение диска, где допускаются кратковременные или длительные остановки как в скольжении относительно ленты, так и в верчении. Возможности таких остановок диска имеют экспериментальное подтверждение вопреки выводам теории поликомпонентного сухого трения, где сила трения и момент верчения считаются аналогичными вязкому сопротивлению. Новая модель предоставляет больше возможностей для изучения возникающих фрикционных автоколебаний в сравнении с системой Ван-дер-Поля. Дополнительно позволяет обнаруживать режимы детерминированного хаоса, наблюдать влияние крутильных колебаний на продольные и наоборот устанавливать механизм перекачки энергии и возможность синхронизации колебаний.

Ключевые слова: модель Ван-дер-Поля; фрикционные автоколебания; релаксационные колебания; закон Амонтона – Кулона; законы о трении; метод кинематических зон; теория поликомпонентного сухого трения; сила трения; момент верчения; эффект *stick-slip*.

Frictional self-oscillations of the disk when sliding with spinning on a moving tape: generalization of the Van der Pol model with stick-slip

V.A. Koronotov

Angarsk, Russia

kortavik@mail.ru

<https://orcid.org/0000-0002-1331-213X>

Received 15.04.2022, accepted 04.05.2022

A new model of frictional self-oscillations is proposed, generalizing the Van der Pol model with a load on a belt moving at a constant speed. As a load, a disk interacting with two springs is considered – tension-compression - as it was in the classical model, and torsion. The tension-compression spring has a fixed end and contributes to the occurrence of frictional forces of rest and sliding. The torsion spring is attached perpendicular to the center of the upper base of the disk, its free end is twisted at a constant angular velocity, as a result, moments of rest and twisting may occur. The disk has the ability to make longitudinal vibrations when sliding relative to the tape and at the same time torsional when spinning. With such a movement, the Amonton-Coulomb law will not be valid for finding the sliding friction force, and in differential form, too, and Coulomb - for determining the moment of spinning. The necessary conditions for their application are not maintained because the bodies of contact must make an exclusively translational motion relative to each other, when using the law of sliding friction. And, in order to find the moment of spinning, pure spinning must be performed, without sliding. For the correct application of these friction laws, the kinematic zone method is used, with the necessary amendments made for this. The equations defining the movement of the disk are written, where short-term or long-term stops are allowed both in sliding along the tape and in spinning. The possibilities of such disk stops have experimental confirmation, contrary to the conclusions of the theory of multi-component dry friction, where the friction force and the torque are similar to the viscous resistance. The new model provides more opportunities for studying the arising frictional self-oscillations, in comparison with the classical Van der Pol system. Additionally, the

model makes it possible to detect the modes of deterministic chaos, to observe the effect of torsional vibrations on longitudinal ones and, conversely, to establish a mechanism for pumping energy and the possibility of synchronization of vibrations.

Keywords: Van der Pol model; frictional self-oscillations; relaxation oscillations; Amontion-Coulomb law; friction laws; kinematic zone method; theory of multicomponent dry friction; friction force; torque; stick-slip effect.

Введение. В данной статье предлагается новая оригинальная модель для изучения фрикционных автоколебаний. Построена она на основе классической модели Ван-дер-Поля [1], предложенной еще в 1930 г. Модель знаменитого голландского ученого представляет собой груз, скользящий относительно движущейся резиновой ленты привода под действием упругой силы пружины растяжения-сжатия и трения (рис. 1).

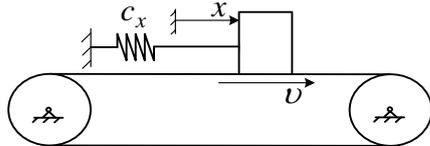


Рис. 1. Классическая модель Ван-дер-Поля

Эта модель стала одной из первых в изучении механических фрикционных автоколебаний, которая показывает, как сила трения вносит нелинейность в рассматриваемую систему и создает условия для возникновения релаксационных колебаний. Когда могут возникать эффекты, получившие название «stick-slip», при которых скольжение груза прерывается кратковременными или длительными остановками — залипанием, приводящее к совместному движению груза с лентой. До сих пор такая модель, с одной стороны, привлекает внимание своей кажущейся простотой и наглядностью возникающих колебаний, а с другой — трудностями в изучении их свойств и закономерностей, отсутствием стандартных аналитических и приближенно-аналитических методов для исследования подобного вида прерывистых движений в сравнении с безостановочными. Их изучение диктуется необходимостью избегать указанных режимов, которые во время эксплуатации машин и механизмов обычно нежелательны. Приводят к их преждевременному износу или даже поломке, или к нарушениям текущего технологического процесса. Например, для долота бурильной колонны — при бурении скважин, для тормозных устройств — во время их эксплуатации, для станков — при обработке деталей, для свай — при виброударном погружении их в грунт. Предпринимались неоднократные попытки в поисках модификаций модели Ван-дер-Поля, ставшей уже классической, для получения дополнительных возможностей в изучении свойств фрикционных автоколебаний. Вариантов здесь, правда, не так много из-за простоты исходной модели, где для применения классического закона о трении скольжения предполагается возможность только для поступательного движения тел скольжения.

Для модификации классической модели обычно переходят от одномассовой модели Ван-дер-Поля к многомассовой, увеличивая тем самым число степеней свободы для новой вводимой модели. Делается это за счет дополнительных тел как на самой движущейся ленте, так и за ее пределами, связь между которыми

осуществляется посредством пружин растяжения-сжатия (например [2–4]). Это варианты при использовании обычного закона Амонтона – Кулона о силе трения. Другие, менее распространенные варианты связаны с использованием закона трения покоя наследственного типа [5; 6] при наличии ограничителя-преграды для скользящего тела или отсутствии такого ограничителя (например [7–9]). Ограничитель-преграда была использована и без учета трения покоя наследственного типа в недавней работе [10]. Кроме того, существуют модели с некулоновым трением, когда вместо постоянного трения скольжения вводится нелинейная зависимость этой силы от скорости скольжения в виде кубической параболы (например [11]) или иного закона (например [12–14]). Как оказалось, на таких вновь вводимых моделях не удастся достичь чего-либо принципиально нового в изучении фрикционных автоколебаний, сохраняя при этом простоту и естественность классической модели. Лишь на моделях с трением покоя наследственного типа дополнительно удастся обнаруживать хаотичные процессы (например [7–9]).

Отметим также, что лишь в единственной статье [15] был затронут случай непоступательного движения для тел скольжения. В ней верчение тела сопровождается скольжением относительно движущейся ленты привода, что привело к трудностям в применении классических законов о силе трения и моменте верчения. И способствовало в указанной работе возникновению ошибок принципиального характера, которые будут показаны ниже и станут очевидны из дальнейшего материала этой статьи.

Модель, предлагаемую автором, можно также рассматривать как еще одну попытку по улучшению возможностей обсуждаемой модели в изучении свойств фрикционных автоколебаний в рамках классических законов Амонтона – Кулона — о силе трения и Кулона — о моменте верчения. В ней, в отличие от системы Ван-дер-Поля, рассматриваемое тело совершает не простое скольжение, а скольжение с верчением относительно движущейся ленты (см. рис 2, который приведен ниже с подробным описанием) и имеется два независимых источника энергии. Каждый источник энергии поддерживает автоколебания для одной из составляющих движения рассматриваемого тела (диска): поступательной — в скольжении относительно движущейся ленты и вращательной — в результате верчения. Влияние этих составляющих движения друг на друга регулируется силой трения и моментом верчения. Предполагаются возможности кратковременных или длительных остановок каждого из этих двух движений — либо одновременно, либо по отдельности. В последнем случае скольжение с верчением будет вырождаться в кратковременное чистое скольжение или чистое верчение (или, по-другому, плоскопараллельное движение диска будет вырождаться в поступательное или вращательное). Возможности кратковременных или длитель-

ных остановок диска допускаются вопреки выводам теории поликомпонентного сухого трения [16–18] и имеют экспериментальное подтверждение [19; 20]. Такое экспериментальное подтверждение опровергает выводы упомянутой теории о том, что сила трения скольжения и момент верчения в рассматриваемых случаях будут аналогичны вязкому сопротивлению, когда трение и момент покоя отсутствуют. Следует подчеркнуть, что напрямую классические законы о трении здесь не применимы, причем и закон о трении скольжения в дифференциальном виде тоже. Формулировка таких законов подразумевает, что тела соприкосновения должны друг относительно друга двигаться либо поступательно, либо совершать чисто вращательное движение (верчение) — такие движения по отдельности определяют необходимые условия применимости самих законов [20–23]. Трудности, связанные с корректностью применения классических законов о трении, удалось преодолеть с помощью метода кинематических зон [20–23], с необходимыми для этого вносимыми поправками. Существенно и то, что, в отличие от других методов, знание законов распределения нормального напряжения в пятне контакта здесь не требуется. Все это позволяет по-новому взглянуть на описание движения тел в подобных случаях и ожидать более достоверные результаты в моделировании.

Полученные уравнения приведены к виду, удобно для численного моделирования возникающих фрикционных автоколебаний диска относительно движущейся ленты. Выбранная модель может вырождаться в классическую систему Ван-дер-Поля при отсутствии закручивания верхнего конца пружины кручения. Новая модель, в отличие от классической, дает возможность обнаруживать режимы детерминированного хаоса, наблюдать регулируемое силами трения и верчения влияние крутильных колебаний на продольные колебания и наоборот. Устанавливать механизм перекачки энергии и возможность синхронизации таких колебаний. Все это говорит о том, что новая введенная модель представляет несомненный интерес для ее детального изучения. Результаты численного моделирования будут представлены в отдельной статье.

О силе трения и моменте верчения. Как известно, классические законы о трении [24–29] можно записать в современном представлении (например [18]) так:

$$F = \begin{cases} -f_0 N \operatorname{sign} \dot{x}, & \text{при } \dot{x} \neq 0; \\ [-F_1; F_1], & \text{при } \dot{x} \equiv 0, \\ \text{где } F_1 = f_1 N \left(\varepsilon_x = \frac{f_1}{f_0} \geq 1 \right); \end{cases} \quad (1)$$

$$M_z = \begin{cases} -\rho_0 N \operatorname{sign} \dot{\phi}, & \text{при } \dot{\phi} \neq 0; \\ [-M_1; M_1], & \text{при } \dot{\phi} \equiv 0, \\ \text{где } M_1 = \rho_1 N \left(\varepsilon_\phi = \frac{\rho_1}{\rho_0} \geq 1 \right); \end{cases} \quad (2)$$

В записанных формулах используются такие обозначения: $F, F_1, N, f_0, f_1, \varepsilon_x, \dot{x}$ — соответственно сила трения и ее предельное значение при отсутствии скольжения (предельное значение трения покоя), реакция опоры, коэффициент трения скольжения и его предельное значение при отсутствии скольжения (предельное значение коэффициента трения покоя), величина скачка в изменении величины силы трения при переходе от покоя к скольжению, линейная скорость скольжения тела; точка $\langle \cdot \rangle$ означает производную по времени t ; $M_z, M_1, \rho_0, \rho_1, \varepsilon_\phi, \dot{\phi}$ — соответственно момент верчения и его предельное значение при отсутствии верчения (предельное значение момента покоя), коэффициент трения верчения и его предельное значение при отсутствии верчения (предельное значение коэффициента трения покоя), величина скачка в изменении величины момента верчения при переходе от покоя к верчению, угловая скорость верчения тела. Формула (1) выражает собой закон Амонтона – Кулона и применяется при определении трения скольжения, когда $\dot{x} \neq 0$, и трения покоя, когда $\dot{x} \equiv 0$. Установлена она была опытным путем [27; 28] Ш. Кулоном, когда тела скольжения имели возможность двигаться друг относительно друга только поступательно. Что дает основание считать, что поступательное движение тел соприкосновения относительно друг друга является необходимым условием [20–23] применимости закона о трении (1). Формула (2) выражает закон Кулона и применяется при определении момента трения верчения, когда $\dot{\phi} \neq 0$, и момента покоя, когда $\dot{\phi} \equiv 0$. Установлена она была тоже опытным путем [27; 28], когда тела верчения имели возможность друг относительно друга только поворачиваться (вращаться) — такое движение определяет необходимое условие [20–23] применимости закона о трении верчения (2). Сказанное говорит о том, что при использовании этих законов следует следить, чтобы тела соприкосновения относительно друг друга двигались либо поступательно — при применении закона (1), либо совершали чисто вращательное движение — при применении закона (2). Это должно соблюдаться и для часто используемого закона о трении скольжении в дифференциальном виде [15–19]. Применение закона о трении скольжении в дифференциальном виде для случаев непоступательного движения тел создавало лишь иллюзию правомерности его применения, так как для элементарных площадок в таких случаях он также неприменим. Элементарные площадки, как и рассматриваемое тело, не будут совершать поступательное движение. К сожалению, о выполнимости такого необходимого условия часто забывают, что приводит к ошибкам как количественного характера, так и качественного — например, в виде парадоксов Пенлеве [22; 30–32]. Построение теории поликомпонентного сухого трения также от этого пострадало, привело к неправильным результатам. Взятые за основу интегральные выражения, через которые выражались результирующие компоненты сил сухого трения, были определены неверно [20–23]. При их нахождении использовался закон о трении скольжения в дифференциальном виде без необходимых на то ос-

нований. Как следствие, выводы этой теории оказались сомнительными. Следует подчеркнуть, что и для материальной точки закон (1) тоже применим не всегда [32], а лишь тогда, когда заменяемое ею тело будет совершать поступательное движение. Об этом следить почему-то не принято — как в публикациях научных статей (например [15–19; 33–35]), так и в примерах, поясняющих применение закона о трении скольжения в существующих учебниках и пособиях. Что, конечно же, делается неправильно. Сказанное относится и к вопросам применимости законов о трении и в неголономой механике тоже.

Корректное применение законов о трении для более сложных видов движения тел друг относительно друга, когда необходимые условия применимости классических законов нарушены, приведено в работах автора [20–23]. Для таких случаев законы о трении записываются так:

$$F = -F_0 \frac{|\dot{x}| + \Delta}{|\dot{x}| + bR|\dot{\phi}| + \Delta}, \text{ где } F_0 = F_c|_{\dot{\phi}=0} = fN; \quad (3)$$

$$M_z = -M_0 \frac{R|\dot{\phi}| + \Delta}{R|\dot{\phi}| + a|\dot{x}| + \Delta}, \text{ где } M_0 = M_z|_{\dot{x}=0} = \rho N. \quad (4)$$

Здесь:

$$f = \begin{cases} f_0 \text{sign}(\dot{x}), \text{ при } \dot{x} \neq 0; \\ [-f_1; f_1], \text{ при } \dot{x} \equiv 0 \left(\varepsilon_x = \frac{f_1}{f_0} > 1 \right); \end{cases} \quad (5)$$

$$\rho = \begin{cases} \rho_0 \text{sign} \dot{\phi}, \text{ при } \dot{\phi} \neq 0; \\ [-\rho_1; \rho_1], \text{ при } \dot{\phi} \equiv 0 \left(\varepsilon_\rho = \frac{\rho_1}{\rho_0} > 1 \right). \end{cases} \quad (6)$$

В формулах (3) и (4) a, b, Δ — соответственно коэффициенты пропорциональности, определяемые экспериментально, где наличие коэффициента Δ позволяет определять трение и момент покоя; R — радиус пятна контакта между контактирующими телами (в дальнейшем — радиус диска на ленте). Изменившийся вид приведенных формул (3) и (4) говорит об уменьшении как силы трения, так и момента верчения в сравнении с классическими законами (1) и (2). Согласно методу кинематических зон [20–23], такие изменения объясняются тем, что в пятне контакта тел вся площадь соприкосновения делится преимущественно на зоны скольжения и верчения — преобладающих движений в нашем случае. Каждая из таких площадей имеет размеры, пропорциональные той кинематической скорости, которая характеризует данное движение. При этом имеется в виду суммарная площадь всех кинематических зон скольжения или верчения, так как сами такие кинематические зоны могут быть дискретными и в каждый момент времени располагаются в разных местах. Все это проявляется на мезомасштабном уровне, что не дает возможности наблюдать указанное визуально в нашем обычном макромире. Характеризующие эти зоны кинематические скорости берутся по модулю — соответственно верчения $|\dot{\phi}|$ и скольжения $|\dot{x}|$. При определении площадей кинематических зон направле-

ние верчения или скольжения роли не играет, что объясняет знак модуля для указанных скоростей. При $\dot{\phi} \equiv 0$ или $\dot{x} \equiv 0$ формулы (3) и (4) становятся эквивалентны классическим формулам соответственно (1) и (2), так как в этом случае вся площадь пятна контакта будет соответствовать только одной из указанных кинематических зон. Что будет наблюдаться при скольжении без верчения или верчении без скольжения.

Для дальнейшего приведенные формулы (3) и (4) удобнее и привычнее будет представлять в таком эквивалентном виде:

$$F = \begin{cases} -f_0 N \frac{|\dot{x}| + \Delta}{|\dot{x}| + bR|\dot{\phi}| + \Delta} \text{sign} \dot{x}, \text{ при } \dot{x} \neq 0; \\ \frac{1}{k_\phi} [-F_1; F_1], \text{ при } \dot{x} \equiv 0, \end{cases} \quad (7)$$

где $F_1 = f_1 N, k_\phi = 1 + \frac{bR}{\Delta} |\dot{\phi}|$;

$$M_z = \begin{cases} -\rho_0 N \frac{R|\dot{\phi}| + \Delta}{R|\dot{\phi}| + a|\dot{x}| + \Delta} \text{sign} \dot{\phi}, \text{ при } \dot{\phi} \neq 0; \\ \frac{1}{k_x} [-M_1; M_1], \text{ при } \dot{\phi} \equiv 0, \end{cases} \quad (8)$$

где $M_1 = \rho_1 N, k_x = 1 + \frac{a}{\Delta} |\dot{x}|$;

В записанных формулах (7) и (8) под коэффициентами k_ϕ, k_x будем понимать: k_ϕ — коэффициент динамичности верчения, определяющий влияние скорости верчения $|\dot{\phi}|$ на трение покоя до начала скольжения; k_x — коэффициент динамичности скольжения, определяющий влияние скорости скольжения $|\dot{x}|$ на момент трения покоя до начала верчения. Эти коэффициенты показывают, во сколько раз уменьшатся предельные значения силы трения покоя и момента покоя при плоском движении тела в сравнении с классическими случаями. Когда тела соприкосновения движутся либо поступательно друг относительно друга, либо совершают чисто вращательное движение, т. е. когда законы Амонтона – Кулона и Кулона выполняемы напрямую. Кроме того, эти коэффициенты говорят об уменьшении эффекта залипания при скольжении с верчением или наоборот в сравнении с чистым скольжением или чистым верчением. Длительные остановки тела могут трансформироваться в короткие. А при больших значениях коэффициентов, что будет соответствовать большим скоростям — верчения $|\dot{\phi}|$ или скольжения $|\dot{x}|$ — такие остановки могут исчезать полностью, что и наблюдается в действительности.

О теории поликомпонентного сухого трения. Нельзя не остановиться более подробно на теории поликомпонентного сухого трения [16–18], созданной В.Ф. Журавлевым и заставившей автора по-новому взглянуть на законы о трении. Эта теория позволила обратить внимание на аппроксимацию Паде как очень удобный инструмент в аналитическом представлении

сил сопротивления, когда они не столь просты и зависят от нескольких кинематических величин [23]. Эта теория предназначена для решения вопросов о применении законов о трении для случаев сложного движения тел. Когда тела соприкосновения друг относительно друга участвуют в движениях, которые можно представлять в виде определенных комбинаций простых движений — скольжения и качения, скольжения с верчением [18]. На то, что в таких случаях законы о трении плохо согласуются с экспериментальными данными, одним из первых обратил внимание французский ученый Контенсу [35]. Поэтому для случаев верчения со скольжением он предложил использовать закон о трении скольжения в дифференциальном виде, что привело к сложным интегралам при определении результирующих значений. Такие интегралы, долгое время считавшиеся не берущимися в элементарных функциях, В.Ф. Журавлеву удалось проинтегрировать для частных случаев аналитически и выразить через элементарные функции [16]. Результаты точного интегрирования показали, что полученные аналитические выражения пропорциональны скорости скольжения [16–18]. Что послужило основанием для предположения о том, что компоненты сил сухого трения будут подобны вязкому сопротивлению и в других подобных случаях. И послужило основанием для введения эмпирических формул в таком виде, используя при этом аппроксимацию Паде. При скольжении с верчением силу трения скольжения F и момент верчения M_z было предложено искать по формулам (в обозначениях данной статьи):

$$F = -F_0 \frac{\dot{x}}{|\dot{x}| + bR|\dot{\phi}|}; \quad (9)$$

$$M_z = -M_0 \frac{R\dot{\phi}}{R|\dot{\phi}| + a|\dot{x}|}. \quad (10)$$

При применении таких эмпирических формул предполагается:

1. $(R\dot{\phi})^2 + \dot{x}^2 \neq 0$;

2. Отсутствие трения и момента покоя (что определило выбор аппроксимации Паде не в самом общем виде, когда отсутствует свободное слагаемое в числителе и в знаменателе записанных выражений).

3. Возможность определения коэффициентов аппроксимации a, b аналитически (в предположении знания закона распределения нормальных напряжений в пятне контакта).

Как уже говорилось выше, по мнению автора, в теории В.Ф. Журавлева ошибкой принципиального характера является принятие за основу правомерности закона о трении скольжения в дифференциальном виде. Несмотря на то, что движение для рассматриваемых тел, в том числе и для выделяемых элементарных площадок — явно не удовлетворяет отмеченному выше необходимому условию применимости этого закона. Объясняется это, по-видимому, тем, что на момент создания такой теории на столь очевидное необходимое условие применимости закона Амонтона – Кулона почему-то никем не обращалось внимание, и его просто не замечали. Хотя необходимость поступательного

движения для тел скольжения, как следует из описания опытов Ш. Кулона и других ученых [28; 29], подразумевалась всегда при экспериментальной проверке достоверности этого закона. Как следствие, неаккуратное использование закона о трении скольжения при создании теории поликомпонентного сухого трения предопределило возникновение таких ошибок:

1. Результирующие интегралы в [16–18], определяющие компоненты сил сухого трения, определены были неверно [20–23].

2. Возможность определения коэффициента трения верчения через коэффициент трения скольжения в [16–18] — сомнительна [20–23].

3. Базовые формулы (9) и (10) теории неточны — аналогия с результатами точного интегрирования в [16–18] привела к ошибочным результатам из-за неверно введенных интегральных зависимостей для результирующих сил [20–23].

4. Коэффициенты аппроксимации в формулах (9) и (10) нельзя определять по предложенным аналитическим формулам в [16–18] — в них используются неверно введенные интегральные зависимости для результирующих сил [20–23].

5. Выводы теории об отсутствии трения и момента покоя не подтверждаются экспериментально [19; 20]

6. Утверждение о том, что компоненты сил сухого трения будут аналогичны силам вязкого сопротивления, говорящее об отсутствии трения и момента покоя — сомнительно, тем более что эксперименты не подтверждают этого [19; 20].

7. Вместо динамических законов распределения нормальных напряжений используются в [16–18] статические, например, в виде закона Герца.

Перечисленное одновременно можно отнести и к ошибкам, которые были допущены в указанной выше статье [15] — в ней использовались принципы и выводы теории поликомпонентного сухого трения. По мнению автора, в сравнении с теорией поликомпонентного сухого трения метод кинематических зон обладает следующими преимуществами:

1. Законы о трении скольжения и верчения используются без нарушений необходимых условий их применимости, для чего разработан метод кинематических зон [20–23].

2. Независимость коэффициентов трения и верчения друг от друга не нарушена, что было заложено и в классических законах о трении.

3. Базовые формулы (7) и (8) вводятся не эмпирически, а имеют обоснование на основе метода кинематических зон [20–23].

4. Классические законы о трении в виде (1) и (2) являются частными случаями для формул (7) и (8), что выглядит весьма логично.

5. Возможность возникновения трения и момента покоя согласуется с экспериментальными данными [19; 20].

6. Как и в классических законах о трении, предполагается наличие трения и момента покоя [20–23] с возможностью их определения. Тем самым, аналогия силы трения или момента верчения с вязким сопротивлением отрицается.

7. Для использования новых обобщенных законов о трении нет необходимости устанавливать законы распределения нормальных напряжений в пятне контакта [20–23] — как статических, так и динамических.

Можно заметить и похожесть формулы (7) для определения силы трения с аналитическим выражением для силы лобового сопротивления со стороны грунта, которая была введена автором в теории бурения [36–38]. В теории бурения угловая скорость определяла скорость вращения долота, которая характеризовала непрерывное силовое воздействие на породу, приводящее к потере ее прочности. А в формуле (7) угловая скорость — это скорость вращения тела, приводящая к заглаживанию поверхностей тел соприкосновения, что облегчает в итоге их скольжение относительно друг друга и способствует уменьшению возникающей силы трения как покоя, так и скольжения.

Заметим, что возникающие эффекты *stick-slip* в бурении часто связывают только с силами сухого трения (например [7–9; 12–14]). С чем автор не может согласиться. Подобные эффекты *stick-slip* могут проявляться и вследствие возникающей силы лобового сопротивления со стороны грунта, действующей на долото. Именно сила лобового сопротивления является главной причиной такого эффекта в бурении в сравнении с силами сухого трения. Что было показано, например, в работах автора [37; 38].

Обобщение модели Ван-дер-Поля. В качестве обобщающей модели предлагается рассмотреть систему, изображенную на рис. 2. Здесь круглый однородный диск радиуса R и массы m прикреплен к двум пружинам — растяжения-сжатия, жесткости c_x , и кручения, жесткости c_φ . Через x, φ обозначены координаты, определяющие соответственно положение в продольном вдоль ленты направлении и угол поворота диска — по отношению к концам недеформированных пружин соответственно растяжения-сжатия и кручения. Осевой момент инерции диска равен $I = \frac{mR^2}{2}$. У пружины

кручения свободный конец закручивается с постоянной угловой скоростью ω , а у пружины растяжения он закреплен неподвижно, как это и было предусмотрено в классической модели Ван-дер-Поля [1]. Диск лежит на движущейся с постоянной скоростью v ленте и имеет возможность либо просто двигать вместе с ней (эффект залипания), оставаясь неподвижным в относительном движении, либо — скользить с вращением относительно нее. Может и просто скользить или вертеться относительно ленты, совершая тем самым кратковременные остановки во вращательной или поступательной составляющих движениях. Заметим, что описанная модель становится классической системой Ван-дер-Поля (см. рис. 1), если свободный конец пружины кручения не закручивать или просто эту пружину убрать. Груз в этом случае будет совершать поступательное движение, определяемое через координату x , с возможными кратковременными или длительными остановками.

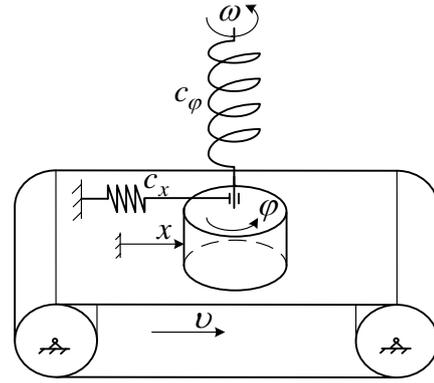


Рис. 2. Обобщенная модель Ван-дер-Поля

Записанные выше законы о трении (7) и (8) для нашего случая движения диска относительно движущейся ленты обобщенной модели (рис. 2), примут вид:

$$F = \begin{cases} -f_0 N \frac{|\dot{x} - v| + \Delta}{|\dot{x} - v| + bR|\dot{\varphi}| + \Delta} \text{sign}(\dot{x} - v), & \text{при } \dot{x} \neq v; \\ \frac{1}{k_\varphi} [-F_1; F_1], & \text{при } \dot{x} \equiv v, \end{cases} \quad (11)$$

где $F_1 = f_1 N, k_\varphi = 1 + \frac{bR}{\Delta} |\dot{\varphi}|$;

$$M_z = \begin{cases} -\rho_0 N \frac{R|\dot{\varphi}| + \Delta}{R|\dot{\varphi}| + a|\dot{x} - v| + \Delta} \text{sign} \dot{\varphi}, & \text{при } \dot{\varphi} \neq 0; \\ \frac{1}{k_x} [-M_1; M_1], & \text{при } \dot{\varphi} \equiv 0, \end{cases} \quad (12)$$

где $M_1 = \rho_1 N, k_x = 1 + \frac{a}{\Delta} |\dot{x} - v|$;

Кроме того, принимаются во внимание упругая сила $F_x = -c_x x$ и упругий момент $M_\varphi = -c_\varphi (\varphi - \omega t)$, возникающие со стороны пружин.

Для дальнейшего существенно, когда диск преодолевает кратковременные остановки в поступательном и вращательном движениях в случае их возникновения. В случае кратковременной остановки в скольжении диска относительно ленты, когда $\dot{x} \equiv 0; f = f_1$, условием срыва будет:

$$c_x |x| \geq \frac{f_1 N}{k_{x*}} \Rightarrow k_{x*} \geq \frac{f_1 mg}{c_x |x|} \Rightarrow |\dot{\varphi}|_* = \frac{\Delta}{bR} \left(\frac{f_1 mg}{c_x |x|} - 1 \right). \quad (13)$$

В случае кратковременной остановки в вращении диска относительно ленты, когда $\dot{\varphi} \equiv 0; \rho = \rho_1$, условием срыва будет:

$$c_\varphi |\varphi - \omega t| \geq \frac{\rho_1 N}{k_{\varphi*}} \Rightarrow k_{\varphi*} \geq \frac{\rho_1 mg}{c_\varphi |\varphi - \omega t|} \Rightarrow |\dot{x} - v|_* = \frac{\Delta}{a} \left(\frac{\rho_1 mg}{c_\varphi |\varphi - \omega t|} - 1 \right). \quad (14)$$

Здесь k_{ϕ^*}, k_{x^*} — предельные значения коэффициентов динамичности, возникающих соответственно перед началом скольжения или верчения, когда диском достигаются для этого критические скорости вращения (верчения) $|\dot{\phi}|_*$ или скольжения $|\dot{x} - v|_*$. Равенства (13) и (14) определяют их критические значения, достигнув которые, диск из состояния покоя переходит либо в режим скольжения, либо — верчения. С учетом сделанных замечаний уравнения движения диска на ленте запишутся так:

$$\begin{cases} \dot{x} \equiv v, \text{ при } |\dot{\phi}| < \frac{\Delta}{bR} \left[\frac{f_1 mg}{c_x |x|} - 1 \right]; \\ m\ddot{x} = -c_x x - f_0 mg \frac{|\dot{x} - v| + \Delta}{|\dot{x} - v| + bR|\dot{\phi}| + \Delta} \text{sign}(\dot{x} - v); \\ \dot{\phi} \equiv 0, \text{ при } |\dot{x} - v| < \frac{\Delta}{a} \left[\frac{\rho_1 mg}{c_\phi |\phi - \omega t|} - 1 \right]; \\ I\ddot{\phi} = -c_\phi (\phi - \omega t) - \rho_0 mg \frac{R|\dot{\phi}| + \Delta}{R|\dot{\phi}| + a|\dot{x} - v| + \Delta} \text{sign} \dot{\phi}. \end{cases} \quad (15)$$

Остановка скольжения диска будет возникать тогда, когда в режиме скольжения $\dot{x} \neq v$ одновременно будет выполняться:

$$\dot{x} = v, \text{ при } |\dot{\phi}| < \frac{\Delta}{bR} \left[\frac{f_1 mg}{c_x |x|} - 1 \right]. \quad (16)$$

Остановка вращения (верчения) диска будет возникать тогда, когда в режиме верчения ($\dot{\phi} \neq 0$) одновременно будет выполняться:

$$\dot{\phi} = 0, \text{ при } |\dot{x} - v| < \frac{\Delta}{a} \left[\frac{\rho_1 mg}{c_\phi |\phi - \omega t|} - 1 \right]. \quad (17)$$

В противных случаях вместо остановки в скольжении или вращении будет наблюдаться, в первом случае, мгновенная смена направления скольжения, а во втором случае — направления верчения.

Переходя к безразмерным переменным:

$$\tau = \sqrt{\frac{g}{R}} t; \quad \xi = \phi - \omega t; \quad \eta = \frac{x}{R}; \quad (18)$$

и параметрам:

$$\begin{aligned} V &= \frac{v}{\sqrt{gR}}; & \Omega &= \sqrt{\frac{R}{g}} \omega; & \delta &= \frac{\Delta}{\sqrt{gR}}; \\ \alpha_x &= \frac{Rc_x}{mg}; & \alpha_\phi &= \frac{c_\phi}{mgR}; & \hat{\rho}_0 &= \frac{\rho_0}{R}; & \hat{\rho}_1 &= \frac{\rho_1}{R}, \end{aligned} \quad (19)$$

получим уравнения движения диска в безразмерном виде:

$$\begin{cases} \dot{\eta} \equiv V, \text{ при } |\dot{\xi} + \Omega| < \frac{\delta}{b} \left[\frac{f_1}{\alpha_x |\eta|} - 1 \right]; \\ \ddot{\eta} = -\alpha_x \eta - f_0 \frac{|\dot{\eta} - V| + \delta}{|\dot{\eta} - V| + b|\dot{\xi} + \Omega| + \delta} \text{sign}(\dot{\eta} - V); \\ \dot{\xi} \equiv -\Omega, \text{ при } |\dot{\eta} - V| < \frac{\delta}{a} \left[\frac{\hat{\rho}_1}{\alpha_\phi |\xi|} - 1 \right]; \\ \ddot{\xi} = -2 \left[\alpha_\phi \xi + \hat{\rho}_0 \frac{|\dot{\xi} + \Omega| + \delta}{|\dot{\xi} + \Omega| + a|\dot{\eta} - V| + \delta} \text{sign}(\dot{\xi} + \Omega) \right]. \end{cases} \quad (20)$$

Остановка скольжения диска, когда:

$$\dot{\eta} = V, \text{ при } |\dot{\xi} + \Omega| < \frac{\delta}{b} \left[\frac{f_1}{\alpha_x |\eta|} - 1 \right]. \quad (21)$$

Остановка верчения диска, когда:

$$\dot{\xi} = -\Omega, \text{ при } |\dot{\eta} - V| < \frac{\delta}{a} \left[\frac{\hat{\rho}_1}{\alpha_\phi |\xi|} - 1 \right]. \quad (22)$$

Здесь точка $\langle \cdot \rangle$ означает производную по безразмерному аналогу времени τ . Приведенные уравнения (20) с условиями переключения (21) и (22) дают полный алгоритм для проведения численного моделирования движения диска относительно движущейся ленты с возможными кратковременными остановками в скольжении с верчением одновременно или по-отдельности.

Данная система может быть хаотичной, что ранее уже подтверждалось на более простом варианте системы, приведенной в [36]. В работе автора [36], хотя и моделировался процесс бурения, но в ней момент сопротивления вращению долота ошибочно определялся по формуле (4). Тем самым, уравнения, приведенные в [36], оказались очень похожи на систему уравнений (15). Результаты численного моделирования фрикционных автоколебаний для обобщенной модели Ван-дер-Поля будут показаны в отдельной статье.

Заключение. Новая модель позволяет, помимо обычных фрикционных автоколебаний, наблюдать возникновение режимов детерминированного хаоса, влияние крутильных колебаний на продольные и наоборот, механизм перекачки энергии для них, возможность синхронизации возникающих колебаний. Тем самым, в сравнении с классической моделью Ван-дер-Поля предлагаемая обобщающая модель дает дополнительные возможности в изучении нелинейных колебаний в целом, фрикционных автоколебаний и хаотичных в частности. Введенная модель представляет несомненный интерес для детального изучения ее свойств в дальнейшем.

Приведенные формулы (7), (8) показывают, что при проявлении эффектов *stick-slip* должно наблюдаться уменьшение длительности залипания при скольжении с верчением или наоборот, в сравнении с чистым скольжением или чистым верчением. Длительные остановки тела, возможные при чистом скольжении или чистом верчении, могут трансформироваться в более короткие или полностью исчезать при возникновении скольжения с верчением.

Литература

1. Ван-дер-Поль Б. Нелинейная теория электрических колебаний. М.: Связьтехиздат, 1935. 91 с.
2. Khizgiyayev S.V. Self-excited oscillations of a two-mass oscillator with dry «stick-slip» friction // JAMM. 2007. V. 71. P. 905-913. EDN: UKXOKB
3. Pascal M. Dynamics of coupled oscillators excited by dry friction // ASME J. Comput. Nonlin. Dyn. 2008. V. 3. № 3. P. 20-26. EDN: YANYMV
4. Паскаль М. Новые эффекты в поведении осциллятора «stick-slip» // ПММ. 2011. Т. 75. Вып. 3. С. 402-409.
5. Ишлинский А.Ю., Крагельский И.В. О скачках при трении // Журнал технической физики. 1944. Т. 14. Вып. 4/5. С. 276-282.
6. Ветюков М.М., Доброславский С.В., Нагаев Р.Ф. Автоколебания в системе с характеристикой сухого трения наследственного типа // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 1. С. 23-28.
7. Метрикин В.С., Нагаев Р.Ф., Степанова В.В. Периодические и стохастические автоколебания в системе с сухим трением наследственного типа // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 5. С. 859-864.
8. Зайцев М.В., Метрикин В.С. К теории неавтономной динамической системы с трением наследственного типа // Вестн. Нижегород. ун-та им. Н.И. Лобачевского. 2012. № 3. Ч. 1. С. 141-146.
9. Игумнов Л.А., Метрикин В.С. О сложной динамике в простейших вибрационных системах с трением наследственного типа // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18. Вып. 4. С. 433-446.
10. Паскаль М. Осциллятор с сухим трением и упругим ограничителем // ПММ. 2021. Т. 85. Вып. 4. С. 494-502.
11. Пановко Я.Г. Основы прикладной теории упругих колебаний. М.; Машиностроение, 1967. 316 с.
12. Leine R.I., van Campen D.H., de Kraker A. Stick-Slip Vibrations Induced by Alternate Friction Models // Nonlinear Dynamics. 1998. V. 16, iss. 1. P. 41-54. URL: <https://doi.org/10.1023/A:1008289604683> (дата обращения: 07.05.2022).
13. van de Vrande B.L., van Campen D.H., de Kraker A. An Approximate Analysis of Dry-Friction-Induced Stick-Slip Vibrations by a Smoothing Procedure // Nonlinear Dynamics. 1999. V. 19, iss. 2. P. 157-169. URL: <https://doi.org/10.1023/A:1008306327781> (дата обращения: 07.05.2022).
14. Leine R., van Campen D.H. Discontinuous fold bifurcations in mechanical systems // Archive of Applied Mechanics. 2002. V. 72, iss. 2-3. P. 138-146. URL: <https://doi.org/10.1007/s00419-001-0190-9> (дата обращения: 07.05.2022).
15. Киреенков А.А. О крутильных колебаниях в системах с комбинированным сухим трением // Изв. РАН. МТТ. 2009. № 3. С. 36-40.
16. Журавлев В.Ф. О модели сухого трения в задаче качения твердых тел // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 5. С. 762-767.
17. Журавлев В.Ф. Закономерности трения при комбинации скольжения и верчения // Изв. РАН. МТТ. 2003. № 4. С. 81-88.
18. Андронов В.В., Журавлев В.Ф. Сухое трение в задачах механики. М.; Ижевск: R&CDynamics, 2010. 183 с.
19. Борисов А.В., Караваев Ю.Л., Мамаев И.С., Ермакова Н.Н., Иванова Т.Б., Тарасов В.В. Экспериментальное исследование движения тела с осесимметричным основанием, скользящего по шероховатой поверхности // Нелинейная динамика. 2015. Т. 11. № 3. С. 547-577.
20. Коронатов В.А. О сухом трении при непоступательном скольжении тела и критика теории Контенсу - Журавлева // Системы. Методы. Технологии. 2019. № 1 (41). С. 21-28.
21. Коронатов В.А. О корректном применении закона Кулона при использовании экспериментальных характеристик трения. Аппроксимация кривой Штрибека // Системы. Методы. Технологии. 2019. № 3 (43). С. 35-43.
22. Коронатов В.А. О применении закона Кулона при скольжении тел, движущихся не поступательно, и парадоксах Пенлеве // Системы. Методы. Технологии. 2019. № 4 (44). С. 25-35.
23. Коронатов В.А. Общий подход к определению сил сопротивления при качении, скольжении тел с верчением, бурении, проникании, сверлении и заглаживании // Системы. Методы. Технологии. 2018. № 3 (39). С. 24-32.
24. Леонардо да Винчи. О себе и о своей науке. Т. I. Academia, 1932.
25. Amontons M. De la resistance caus'ee dans les machines // M'em. l'Acad. Roy., 1699. P. 206-222.
26. Euler L. Sur la diminution de la resistance du frottement. Histoire de L'Academie Royale des Sciences et Belles Lettres de Berlin. 1748. P. 133-148.
27. Coulomb C.A. Theorie des machines simples. Mem. Math. et Phys. l'Acad. Sci., 1785. V. 10. P. 161-331.
28. Крагельский И.В., Щедров В.С. Развитие науки о трении. М.: Изд-во АН СССР, 1956. 234 с.
29. Крагельский И.В. Трение и износ. Изд. 2-е перераб. и доп. М.: Машиностроение, 1968. 480 с.
30. Painleve P. Le, cons sur le Frottement. Paris: Hermann, 1895 (Пенлеве П. Лекции о трении. М.: Гостехиздат, 1954. 316 с.).
31. Коронатов В.А. Парадоксы Пенлеве для классических механических систем с сухим трением и ключ к их решению // Математика, ее приложения и математическое образование (МПМО'20): материалы VII Междунар. конф. (7-12 сент. 2020 г.). Улан-Удэ, 2020. С. 121-124.
32. Коронатов В.А. Оптимальные режимы движения ведущих колес при разгоне на прямолинейных участках пути. Границы применимости закона Кулона для материальных точек // Системы. Методы. Технологии. 2020. № 1 (45). С. 13-20.
33. Загордан А.А., Привалов Е.А. Аппроксимация выражений для силы и момента силы сухого трения // Изв. РАН. МТТ. 2019. № 4. С. 3-7.
34. Козлов В.В. О механизме сухого трения // Доклады АН. 2011. Т. 437. № 6. С. 766-767.
35. Контенсу П. Связь между трением скольжения и трением верчения и ее учет в теории волчка. Проблемы гироскопии. М.: Мир, 1967. С. 60-77.
36. Коронатов В.А. Новая динамическая модель бурильной колонны с учетом проходки (погружения) при кулоновом трении и режимы детерминированного хаоса // Системы. Методы. Технологии. 2014. № 3 (23). С. 47-56.
37. Коронатов В.А. Начала построения строгой теории бурения // Системы. Методы. Технологии. 2016. № 4 (32). С. 83-94.
38. Коронатов В.А. Основы математически строгой теории глубокого бурения // Системы. Методы. Технологии. 2020. № 2 (46). С. 23-29.

References

1. Van-der-Pol' B. Nonlinear theory of electric oscillations. M.: Svyaz'tekhzdat, 1935. 91 p.
2. Khizgiyayev S.V. Self-excited oscillations of a two-mass oscillator with dry «stick-slip» friction // JAMM. 2007. V. 71. P. 905-913. EDN: UKXOKB
3. Pascal M. Dynamics of coupled oscillators excited by dry friction // ASME J. Comput. Nonlin. Dyn. 2008. V. 3. № 3. P. 20-26. EDN: YANYMV
4. Paskal' M. New effects in the behavior of the "stick-slip" oscillator // PMM. 2011. P. 75. Vyp. 3. P. 402-409.
5. Ishlinskij A.YU., Kragel'skij I.V. On jumps under friction // Technical Physics. 1944. V. 14. Vyp. 4/5. P. 276-282.

6. Vetyukov M.M., Dobroslavskii S.V., Nagaev R.F. Self-oscillations in a system with a characteristic of hereditary dry friction // *Izv. AN SSSR. MTT*. 1990. № 1. P. 23-28.
7. Metrikin V.S., Nagaev R.F., Stepanova V.V. Periodic and stochastic self-oscillations in a system with hereditary dry friction // *PMM*. 1996. V. 60. Vyp. 5. P. 859-864.
8. Zaicev M.V., Metrikin V.S. To the theory of a non-autonomous dynamic system with hereditary type friction // *Vestnik of Lobachevsky University of Nizhni Novgorod*. 2012. № 3. CH. 1. P. 141-146.
9. Igumnov L.A., Metrikin V.S. On complex dynamics in the simplest vibration systems with friction of hereditary type // *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*. 2018. V. 18. Vyp. 4. P. 433-446.
10. Paskal' M. Oscillator with dry friction and elastic limiter // *PMM*. 2021. V. 85. Vyp. 4. P. 494-502.
11. Panovko YA.G. Fundamentals of the applied theory of elastic vibrations. M.; Mashinostroenie, 1967. 316 p.
12. Leine R.I., van Campen D.H., de Kraker A. Stick-Slip Vibrations Induced by Alternate Friction Models // *Nonlinear Dynamics*. 1998. V. 16, iss. 1. P. 41-54.
URL: <https://doi.org/10.1023/A:1008289604683> (data obrashcheniya: 07.05.2022).
13. van de Vrande B.L., van Campen D.H., de Kraker A. An Approximate Analysis of Dry-Friction-Induced Stick-Slip Vibrations by a Smoothing Procedure // *Nonlinear Dynamics*. 1999. V. 19, iss. 2. P. 157-169.
URL: <https://doi.org/10.1023/A:1008306327781> (data obrashcheniya: 07.05.2022).
14. Leine R., van Campen D.H. Discontinuous fold bifurcations in mechanical systems // *Archive of Applied Mechanics*. 2002. V. 72, iss. 2-3. P. 138-146.
URL: <https://doi.org/10.1007/s00419-001-0190-9> (data obrashcheniya: 07.05.2022).
15. Kireenkov A.A. On torsional vibrations in systems with combined dry friction // *Izv. RAN. MTT*. 2009. № 3. P. 36-40.
16. Zhuravlev V.F. On the dry friction model in the rolling problem of solids // *PMM*. 1998. V. 62. Vyp. 5. P. 762-767.
17. Zhuravlev V.F. The laws of friction in the combination of sliding and spinning // *Izv. RAN. MTT*. 2003. № 4. P. 81-88.
18. Andronov V.V., Zhuravlev V.F. Dry friction in problems of mechanics. M.; Izhevsk: R&CDynamics, 2010. 183 p.
19. Borisov A.V., Karavaev YU.L., Mamaev I.S., Erdakova N.N., Ivanova T.B., Tarasov V.V. Experimental study of the motion of a body with an axisymmetric base sliding on a rough surface // *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. 2015. V. 11. № 3. P. 547-577.
20. Koronotov V.A. On dry friction during non - accessible sliding of the body and criticism of the Contensu - Zhuravlev theory // *Systems. Methods. Technologies*. 2019. № 1 (41). P. 21-28.
21. Koronotov V.A. On the correct application of Coulomb's law when using experimental friction characteristics. Approximation of the Stribek curve // *Systems. Methods. Technologies*. 2019. № 3 (43). P. 35-43.
22. Koronotov V.A. On the application of Coulomb's law in the sliding of bodies moving non-translationally and the paradoxes of Painlevé // *Systems. Methods. Technologies*. 2019. № 4 (44). P. 25-35.
23. Koronotov V.A. A general approach to the determination of resistance forces during rolling, sliding of bodies with spinning, drilling, penetration, drilling and smoothing // *Systems. Methods. Technologies*. 2018. № 3 (39). P. 24-32.
24. Leonardo da Vinci. About myself and my science. V. I. Academia, 1932.
25. Amontons M. De la resistance causée dans les machines // *Mém. l'Acad. Roy.* 1699. P. 206-222.
26. Euler L. Sur la diminution de la resistance du frottement. *Histoire de L'Academie Royale des Sciences et Belles Lettres a Berlin*. 1748. P. 133-148.
27. Coulomb C.A. Theorie des machines simples. *Mem. Math. et Phys. l'Acad. Sci.*, 1785. V. 10. P. 161-331.
28. Kragel'skij I.V., SHCHedrov V.S. Development sciences of friction. M.: Izd-vo AN SSSR, 1956. 234 p.
29. Kragel'skij I.V. Friction and wear. *Izd. 2-e pererab. i dop. M.: Mashinostroenie*, 1968. 480 p.
30. Painlevé P. Leçons sur le frottement. Paris: Hermann, 1895 (Penlevé P. Lekcii o trenii. M.: Gostekhizdat, 1954. 316 p.).
31. Koronotov V.A. Painlevé paradoxes for classical mechanical systems with dry friction and the key to their solution // *Matematika, ee prilozheniya i matematicheskoe obrazovanie (MPMO'20): materialy VII Mezhdunar. konf. (7-12 sent. 2020 g.)*. Ulan-Ude, 2020. P. 121-124.
32. Koronotov V.A. Optimal driving modes of the driving wheels during acceleration on straight sections of the track. Limits of applicability of Coulomb's law for material points // *Systems. Methods. Technologies*. 2020. № 1 (45). P. 13-20.
33. Zagordan A.A., Privalov E.A. Approximation of expressions for the force and moment of dry friction force // *Izv. RAN. MTT*. 2019. № 4. P. 3-7.
34. Kozlov V.V. About the mechanism of dry friction // *Doklady AN*. 2011. V. 437. № 6. P. 766-767.
35. Kontensu P. The relationship between sliding friction and spinning friction and its account in the theory of the top. *Problemy giroskopii*. M.: Mir, 1967. P. 60-77.
36. Koronotov V.A. A new dynamic model of a drill string taking into account penetration (immersion) under coulomb friction and modes of deterministic chaos // *Systems. Methods. Technologies*. 2014. № 3 (23). P. 47-56.
37. Koronotov V.A. The beginning of the construction of a rigorous drilling theory // *Systems. Methods. Technologies*. 2016. № 4 (32). P. 83-94.
38. Koronotov V.A. Fundamentals of mathematically rigorous theory of deep drilling // *Systems. Methods. Technologies*. 2020. № 2 (46). P. 23-29.