

Обоснование способа регулирования контактного усилия вибрационного вальца с уплотняемым материалом

Е.А. Шишкин^а, А.А. Смоляков^б

Тихоокеанский государственный университет, ул. Тихоокеанская, 136, Хабаровск, Россия

^а 004655@pnu.edu.ru, ^б 2012003170@pnu.edu.ru

^а <https://orcid.org/0000-0003-4387-0228>, ^б <https://orcid.org/0000-0003-4332-1667>

Статья поступила 14.01.2022, принята 26.01.2022

На начальном этапе уплотняемый материал имеет низкую плотность, и его сопротивление сминающему действию вибрационного вальца мало. При неизменных параметрах вибрационного катка с ростом плотности материала увеличивается амплитуда вибрационного возбуждения и, как следствие, растет величина усилия в зоне контакта вальца с материалом, что может вызвать дробление твердой фазы покрытия и привести к его разупрочнению. Для исключения указанных ситуаций необходимо уменьшать усилие в зоне контакта вальца с уплотняемым материалом за счет уменьшения амплитуды вибрационного возбуждения. Регулирование производится непрерывным увеличением частоты возбуждения параллельно с уменьшением статического момента вибровозбудителя, что приводит к равномерному окончательному уплотнению покрытия по всей глубине. В статье выполнен качественный анализ и дано обоснование используемого в системах интеллектуального уплотнения способа регулирования усилия в зоне контакта вибрационного вальца с уплотняемым материалом. Для описания напряженно-деформированного состояния уплотняемого материала принята реологическая модель Кельвина, включающая упругое и вязкое тела. Получена аналитическая зависимость для максимального усилия в зоне контакта вальца с уплотняемым материалом, которая была использована при разработке имитационной модели колебательной системы «вальец – уплотняемый материал». В результате моделирования установлено, что при неизменных параметрах вибрационного катка изменение жесткости уплотняемого материала значительно влияет на характеристики колебательного движения вальца и на параметры силового взаимодействия вальца с уплотняемым материалом. При этом рабочая частота вибровозбудителя приближается к резонансной. Были проанализированы способы регулирования амплитуды колебаний вальца. Первый способ подразумевает увеличение рабочей частоты вибровозбудителя при его неизменном статическом моменте, второй — уменьшение статического момента вибровозбудителя при неизменной рабочей частоте. Однако оба описанных способа неудовлетворительны, так как в первом случае высока опасность разрушения вибровозбудителя, а во втором случае вибровозбудитель работает в неустойчивом режиме в околорезонансной области. Таким образом, наиболее эффективное уплотнение материала достигается непрерывной одновременной регулировкой рабочей частоты и статического момента вибровозбудителя в зависимости от физико-механических характеристик материала.

Ключевые слова: вибрационный валец; уплотнение; сила взаимодействия; амплитуда колебаний; регулирование; частота колебаний; статический момент; амплитудно-частотная характеристика.

Justification of the method of regulating the contact force of the vibrating roller with the compacted material

E.A. Shishkin^а, A.A. Smolyakov^б

Pacific National University; 136, Tikhookeanskaya St., Khabarovsk, Russia

^а 004655@pnu.edu.ru, ^б 2012003170@pnu.edu.ru

^а <https://orcid.org/0000-0003-4387-0228>, ^б <https://orcid.org/0000-0003-4332-1667>

Received 14.01.2022, accepted 26.01.2022

At the initial stage, the compacted material has a low density and its resistance to the crushing action of the vibrating roller is small. With the parameters of the vibrating roller unchanged, the amplitude of the vibration excitation increases with increasing material density, and, as a result, the magnitude of the force in the contact zone of the roller with the material increases, which can cause crushing of the solid phase of the coating and lead to its softening. To eliminate these situations, it is necessary to reduce the force in the contact zone of the roller with the compacted material by reducing the amplitude of vibration excitation. Regulation is carried out by a continuous increase in the excitation frequency in parallel with a decrease in the static moment of the vibration exciter, which leads to a uniform final compaction of the coating over the entire depth. The article provides a qualitative analysis and substantiation of the force control used in intelligent compaction systems in the contact zone of the vibrating roller with the compacted material. To describe the stress-strain state of the compacted material, a rheological Kelvin model is adopted, including elastic and viscous bodies. An analytical dependence is obtained for the maximum force in the contact zone of the roller with the compacted material, which is used in the development of a simulation model of the oscillatory system "roller - compacted material". As a result of modeling, it has been found that with the parameters of the vibration roller unchanged, the change in the stiffness of the compacted material significantly affects the characteristics of the

oscillatory motion of the roller and the parameters of the force interaction of the roller with the compacted material, and also the operating frequency of the vibration exciter approaches the resonant one. The methods of regulating the amplitude of the vibrations of the roller are analyzed. The first method implies an increase in the operating frequency of the vibration exciter at its constant static moment, and the second - a decrease in the static moment of the vibration exciter at a constant operating frequency. However, both described methods are unsatisfactory, because in the first case, there is a high risk of destruction of the vibration exciter, and in the second case, the vibration exciter operates in a non-stop mode in the near-resonance region. Thus, the most effective compaction of the material is achieved by continuous joint adjustment of the operating frequency and static torque of the vibration exciter, depending on the physical and mechanical characteristics of the material.

Keywords: vibration roller; compaction; interaction force; oscillation amplitude; regulation; oscillation frequency; static moment; amplitude-frequency response.

Введение. Вначале уплотнения, когда уплотняемый материал имеет низкую плотность, режим работы вибрационного механизма вальца характеризуется высокой амплитудой и низкой частотой, что обеспечивает максимальное воздействие по глубине за счет высокой энергии сжатия [1; 2]. По мере уплотнения жесткость и плотность материала возрастают и, как следствие, увеличивается амплитуда вибрационного возбуждения [3]. При этом усилии в зоне контакта вальца с уплотняемым материалом возрастает [4]. В случае превышения усилием предела прочности материала происходит его разуплотнение [5]. Кроме этого, с увеличением жесткости уплотняемого материала валец при неизменных рабочих параметрах может перейти в один из нежелательных режимов (двойной прыжок, раскачивание, хаотическое движение), вследствие чего верхний слой материала разуплотняется, а каток теряет управляемость. Это делает дальнейшее уплотнение невозможным, работу оператора опасной и уменьшает срок службы машины вследствие ударных нагрузок [1; 6]. Для обеспечения работы вальца в наиболее эффективном режиме (частичный отрыв) необходимо уменьшать амплитуду вибрационного воздействия, для чего производят увеличение частоты вибрации параллельно с уменьшением статического момента вибровозбудителя [6; 7]. Это позволяет сконцентрировать уплотняющую нагрузку на небольшой глубине на заключительных этапах уплотнения [2; 8]. Таким образом обеспечиваются качество и равномерность уплотнения по всей глубине покрытия.

Современные вибрационные катки с функцией интеллектуального уплотнения используют автоматическое управление вынуждающей силой и рабочей частотой вибровозбудителя для исключения нежелательных режимов в процессе уплотнения [1; 9]. Управление заключается в одновременном регулировании частоты вращения и статического момента вибровозбудителя [10], причем последнее производится посредством изменения взаимного расположения центрального и внешнего дебалансов вибровозбудителя, каждый из которых генерирует половину максимальной вынуждающей силы (рис. 1).

Задачей данного исследования является качественный анализ различных способов регулирования контактного усилия вальца с уплотняемым материалом с целью обоснования описанного выше способа регулирования, применяемого в мировой практике в настоящее время.

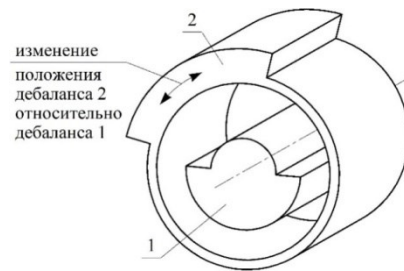


Рис. 1. Схема регулирования статического момента вибровозбудителя: 1 — центральный дебаланс; 2 — внешний дебаланс

Метод исследований. Рассмотрим колебательное движение вибрационного вальца в процессе уплотнения материала (рис. 2). Во время укатки валец 1 совершает круговые колебания в вертикальной плоскости за счет вращения дебаланса 2 вибровозбудителя [11].

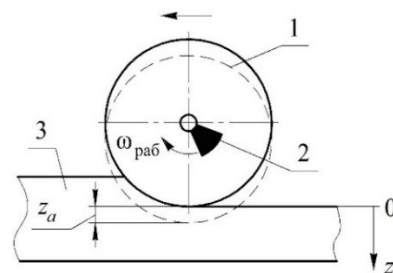


Рис. 2. Схема уплотнения материала вибрационным вальцом: 1 — валец; 2 — дебаланс; 3 — слой уплотняемого материала

Для описания напряженно-деформированного состояния уплотняемого материала принята реологическая модель Кельвина [12–14], включающая упругое и вязкое тела (рис. 3). На рис. 3 ноль оси z соответствует положению статического равновесия системы «валец – уплотняемый материал».

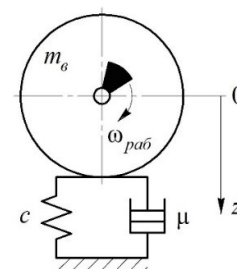


Рис. 3. Модель колебательной системы «валец – уплотняемый материал»

Усилие в зоне контакта вальца с уплотняемым материалом равно [15; 16]:

$$F(t) = (m_p + m_e)g + \mu \dot{z}(t) + cz(t), \quad (1)$$

где μ — коэффициент вязкого сопротивления материала, $H \cdot c/m$; c — жесткость материала, H/m ; m_e — масса вальца катка, κz ; m_p — масса рамы, распределенная на ось вальца катка, κz ; z — перемещение вальца, m .

Закон вынужденных колебаний вибрационного вальца имеет вид [17; 18]:

$$z(t) = z_a \cos(\omega_{раб}t - \varphi), \quad (2)$$

где z_a — амплитуда вынужденных колебаний вальца, m ; $\omega_{раб}$ — рабочая частота вращения дебаланса, $рад/с$; φ — начальная фаза, $рад$.

С учетом (2), после преобразований уравнение (1) примет вид:

$$F(z) = cz(t) \pm \mu \omega_{раб} \sqrt{z_a^2 - [z(t)]^2} + (m_p + m_e)g. \quad (3)$$

Амплитуда вынужденных колебаний вальца равна:

$$z_a = \frac{m_0 r \omega_{раб}^2}{m_e \sqrt{(\omega_0^2 - \omega_{раб}^2)^2 + 4h^2 \omega_{раб}^2}}. \quad (4)$$

где m_0 — масса дебаланса, κz ; r — эксцентриситет дебаланса, m ; ω_0 — собственная частота колебаний вальца, m ; h — коэффициент демпфирования, c^{-1} .

Собственная частота колебаний вальца равна [19]:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m_e}}. \quad (5)$$

Коэффициент демпфирования равен:

$$h = \frac{\mu}{2m_e}. \quad (6)$$

В результате исследования функции $F(z)$ на максимум получено уравнение для максимального усилия в зоне контакта вальца с уплотняемым материалом:

$$F_{max} = z_a \sqrt{c^2 + (\mu \omega_{раб})^2} + (m_p + m_e)g. \quad (7)$$

Резонансная частота колебаний вальца равна:

$$\omega_{рез} = \frac{\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2 - 2h^2}}. \quad (8)$$

Уравнения (4), (7), (8) были использованы при разработке имитационной модели колебательной системы «валец – уплотняемый материал» в среде визуального моделирования Xcos пакета Scilab. Полученная модель показана на рис. 4.

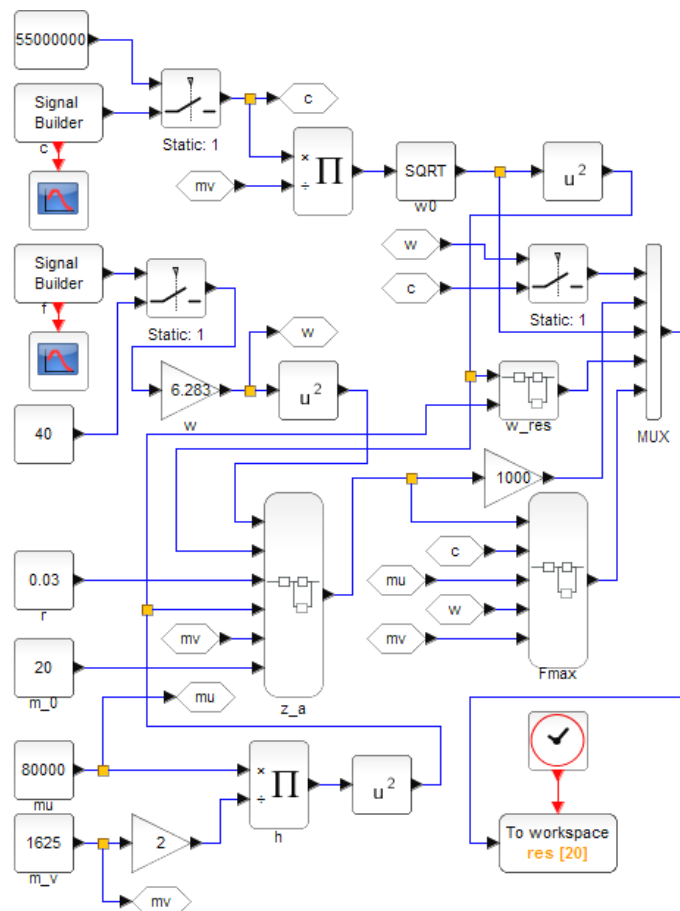


Рис. 4. Имитационная модель колебательной системы «валец – уплотняемый материал»

Представленная на рис. 4 имитационная модель включает:

- подсистему «w_res», служащую для расчета резонансной частоты колебаний вальца;
- подсистему «z_a», служащую для расчета амплитуды вынужденных колебаний вальца;
- подсистему «Fmax», служащую для расчета максимального усилия в зоне контакта вальца с уплотняемым материалом.

Результаты исследований. Результаты моделирования приведены в виде графиков на рис. 5–8.

Анализ полученных результатов позволяет сделать следующие выводы:

1. Изменение жесткости уплотняемого материала при неизменных параметрах рабочего органа значительно влияет на характеристики колебательного движения вальца, а также на параметры силового взаимодействия вальца с материалом.

2. С возрастанием жесткости материала при неизменных параметрах рабочего органа частота вибровозбудителя приближается к резонансной, поскольку вибрационные вальцы дорожных катков в процессе уплотнения совершают вынужденные колебания в зарезонансной области [20] амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) колебательной системы «валец – уплотняемый материал». Следовательно, режим работы вальца смещается в околорезонансную область, которая характеризуется нестабильностью колебаний и отсутствием плавности регулирования амплитуды вибрации.

3. С возрастанием жесткости материала происходит резкое увеличение амплитуды вибрации, что влечет за собой нежелательные последствия, описанные выше.

Возникает необходимость уменьшения амплитуды вибрации по мере возрастания жесткости материала.

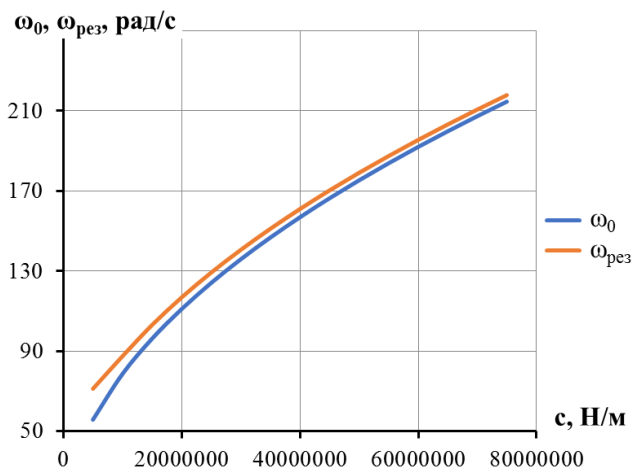


Рис. 5. Зависимость собственной и резонансной частот колебаний вальца от жесткости уплотняемого материала

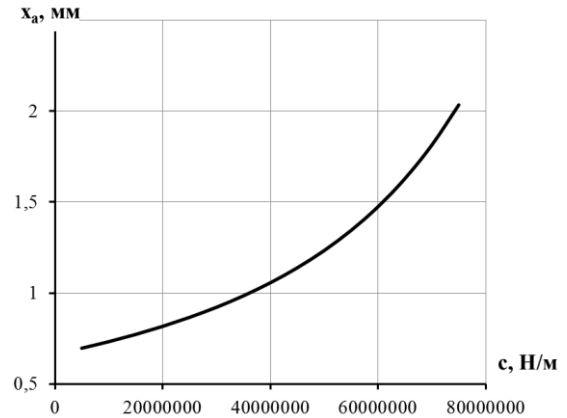


Рис. 6. Зависимость амплитуды вынужденных колебаний вальца от жесткости уплотняемого материала

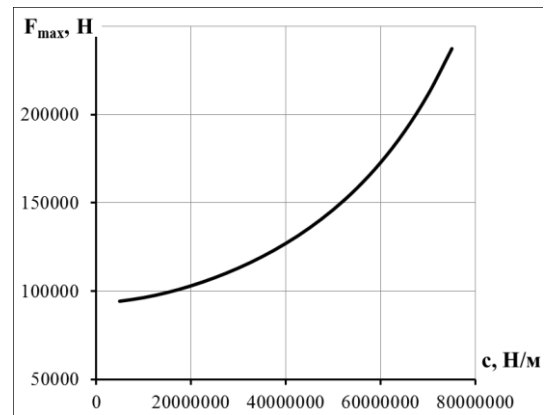


Рис. 7. Зависимость максимального усилия в зоне контакта вальца с уплотняемым материалом от его жесткости

Необходимо уменьшить амплитуду колебаний вальца до значения $x_{a\text{ опт}}$ (рис. 8), обеспечивающего при достигнутой жесткости c_2 эффективное уплотнение, т. е. максимально возможную пластическую деформацию уплотняемого материала без его разрушения.

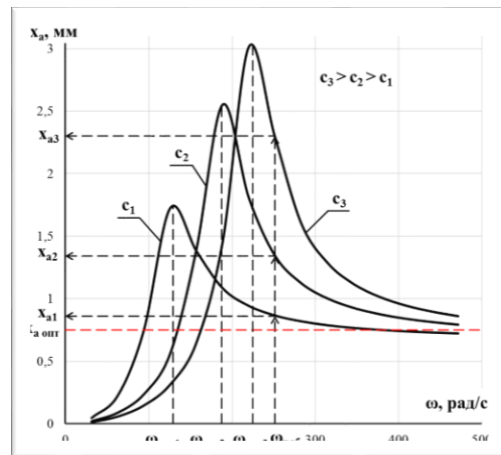


Рис. 8. Изменение АЧХ колебательной системы «валец – уплотняемый материал» с ростом жесткости материала при неизменных параметрах вибровозбудителя и вальца катка

Рассмотрим способы регулирования амплитуды колебаний вальца.

Первый способ подразумевает увеличение рабочей частоты колебаний вальца $\omega_{раб}$ при неизменном статическом моменте вибровозбудителя m_0r (см. рис. 9).

Второй способ подразумевает уменьшение статического момента вибровозбудителя m_0r при неизменной рабочей частоте $\omega_{раб}$ (см. рис. 10).

Однако оба описанных способа неудовлетворительны. При первом способе АЧХ колебательной системы остается неизменной, а для достижения оптимальной амплитуды колебаний необходимо значительно увеличивать рабочую частоту, что повышает вероятность разрушения вибровозбудителя в результате воздействия на него опасных центробежных усилий. При втором способе рабочая частота остается неизменной, а АЧХ колебательной системы изменяется за счет уменьшения статического момента вибровозбудителя до тех пор, пока не будет достигнута необходимая в данных условиях оптимальная амплитуда вибрации. Однако при этом вибровозбудитель продолжает работать в неустойчивом режиме в околорезонансной области со всеми вытекающими негативными последствиями [21].

Следовательно, необходимо одновременное регулирование, а именно: с увеличением рабочей частоты $\omega_{раб}$ в пределах допустимого диапазона одновременно уменьшать статический момент вибровозбудителя m_0r (см. рис. 11).

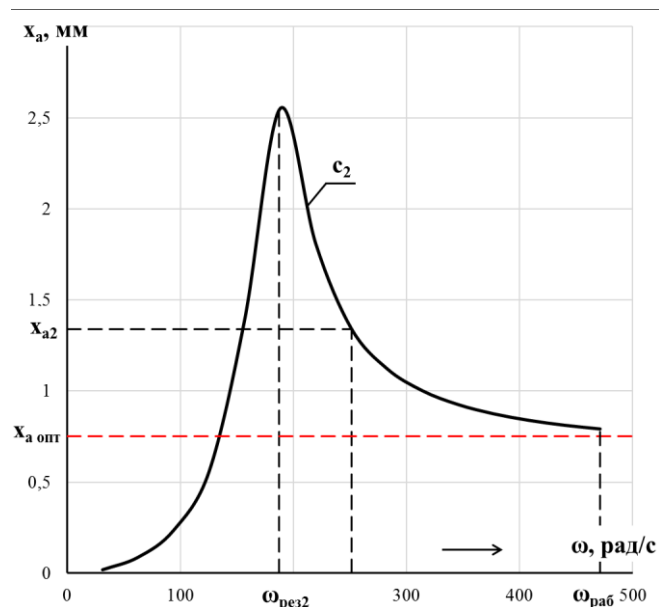


Рис. 9. Регулирование амплитуды колебаний вальца за счет изменения рабочей частоты

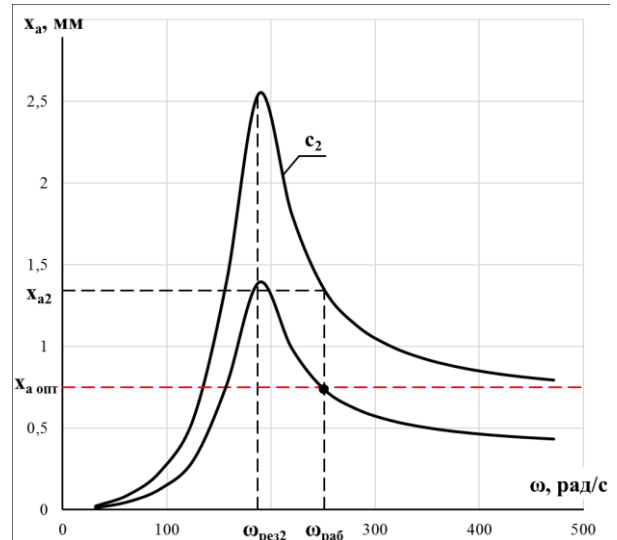


Рис. 10. Регулирование амплитуды колебаний вальца за счет изменения статического момента вибровозбудителя

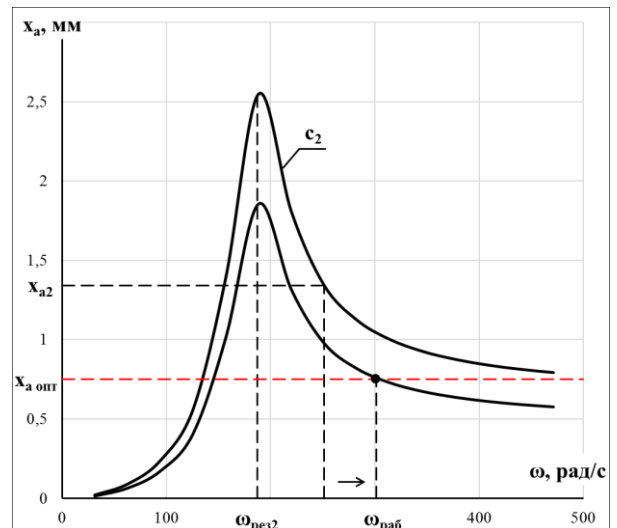


Рис. 11. Регулирование амплитуды колебаний вальца за счет одновременного изменения рабочей частоты и статического момента вибровозбудителя

Заключение. Представленное в статье исследование подтверждает правильность подхода ведущих производителей вибрационных катков для систем интеллектуального уплотнения к способу регулирования силового воздействия на уплотняемый материал с качественной стороны. Суть способа заключается в одновременном изменении рабочей частоты вращения и статического момента вибровозбудителя в зависимости от физико-механических характеристик материала.

Количественная сторона способа регулирования в данной статье не рассматривается, для ее отражения необходимы лабораторные и натурные испытания уплотняемого материала с целью определения его деформационных и прочностных характеристик для дальнейшего моделирования.

Метод исследования поведения колебательной системы «вибрационный валец – уплотняемый материал» при помощи имитационной модели, представленной в статье, может быть полезен при проектировании виброуплотняющих устройств для исключения возможных нежелательных режимов их работы.

Литература

1. Anderegg R., Kaufmann K. Intelligent compaction with vibratory rollers: feedback control systems in automatic compaction and compaction control // *Transportation Research Record*. 2004. V. 1868 (1). P. 124-134.
2. Zambrano C., Drnevich V.P., Bourdeau P.L. Advanced compaction quality control // *Joint Transportation Research Program*. 2006. P. 285. URL: <http://docs.lib.purdue.edu/jtrp/285> (дата обращения: 03.02.2021).
3. Mooney M.A., Adam D. Vibratory roller integrated measurement of earthwork compaction: an overview. In: *Proceeding of the Seventh International Symposium on Field Measurements in Geomechanics*, 2007. DOI 10.1061/40940(307)80.
4. Kordestani A. Ride vibration and compaction dynamics of vibratory soil compactors. Thesis for: Master of Applied Science. 2010. 190 p.
5. Popov Y., Chabutkin E. Increasing efficiency of vibratory rollers through adjusting magnitude of disturbing force. In: *Proceedings of the 5th International Conference on Industrial Engineering (ICIE 2019)*, 2020. P. 567-576.
6. Adam D., Pistor J. Dynamic roller compaction for earthworks and roller-integrated continuous compaction control: State of the art overview and recent developments. Institute of Geotechnics, Vienna University of Technology, Austria, 2016. 41 p.
7. Anderegg R., Kaufmann K. Compaction monitoring using intelligent soil compactors. In: *Proceeding of the GeoCongress 2006: Geotechnical Engineering in the Information Technology Age*, 2006. P. 1-6. DOI 10.1061/40803(187)41.
8. Imran S., Beainy F., Commuri S., Zaman M. Dynamical model of asphalt-roller interaction during compaction. In: *Proceeding of the 11th International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics*. 2014. V. 1. P. 559-567.
9. Mooney M.A. Intelligent soil compaction systems. National Academies of Sciences, Engineering, and Medicine. 2010. Washington, DC: The National Academies Press. URL: <https://doi.org/10.17226/22922> (дата обращения: 05.02.2022).
10. Тюремнов И.С. Обзор систем непрерывного контроля уплотнения грунта для вибрационных катков. Часть 3. Особенности функционирования и «интеллектуальное уплотнение» // *Вестн. Тихоокеанского гос. ун-та*. 2016. № 2 (41). С. 115-122.
11. Шишкин Е.А., Коваленко А.С. Оценка эффективности вибрационного уплотнения дорожных покрытий // *Механика XXI века*. 2020. № 19. С. 79-82.
12. Shen P., Lin S. Mathematic Modeling and chaotic identification for practice construction in vibratory compacting // *Journal of Vibration Engineering & Technologies*. 2018. V. 6. P. 1-13.
13. Шабанова Г.И., Савельев С.В., Бурый Г.Г. Математическое описание колебательной системы «вибрационный рабочий орган - грунт» // *Вестн. Сибирской гос. автомобильно-дорожной академии*. 2013. № 3 (31). С. 102-107.
14. Савельев С.В., Бурый Г.Г., Потеряев И.К. Применение алгоритма определения параметров вибрационных катков с учетом массы уплотняемого грунта в зоне активного действия вибрации // *Вестн. Сибирской гос. автомобильно-дорожной академии*. 2015. № 6 (46). С. 32-37.
15. Imran S., Beainy F., Commuri S., Zaman M. Transient response of a vibratory roller during compaction. In: *Proceeding of the 51st IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, 2012. P. 4378-4383.
16. Аннабердиев А.Х.-М. Анализ режимов уплотнения и разработка рекомендаций по их совершенствованию // *Инженерный вестн. Дона*. 2017. № 2 (45). С. 137.
17. Овчаренко И.Н. Математическое и компьютерное моделирование механических колебаний // *Инженерный журнал: наука и инновации*. 2014. № 11 (35). С. 1.
18. Тарасов В.Н., Бояркина И.В., Бояркин Г.Н., Серебренников В.С. Исследование динамических процессов отскока вибровальца от уплотняемой поверхности // *Динамика систем, механизмов и машин*. 2019. Т. 7. № 1. С. 161-167.
19. Зубков А.Ф. Сравнительная оценка по уплотняющему эффекту параметров гладковальцовых катков статического и вибрационного действия при строительстве дорожных покрытий нежесткого типа // *Научный вестн. Воронежского гос. архитектурно-строительного ун-та. Строительство и архитектура*. 2008. № 1 (9). С. 139-148.
20. Горбунов А.А., Гаврилов Е.Н., Дмитриев В.Н. Анализ динамических режимов резонансных вибромашин (эффект Зоммерфельда) // *Вестн. Ульяновского гос. технического ун-та*. 2009. № 2 (46). С. 26-28.
21. Антипов В.И., Денцов Н.Н., Кошелев А.В. Энергетические соотношения в вибрационной машине на многократном комбинационном параметрическом резонансе // *Вестн. Нижегородского ун-та им. Н.И. Лобачевского*. 2013. № 5-1. С. 188-194.

References

1. Anderegg R., Kaufmann K. Intelligent compaction with vibratory rollers: feedback control systems in automatic compaction and compaction control // *Transportation Research Record*. 2004. V. 1868 (1). P. 124-134.
2. Zambrano C., Drnevich V.P., Bourdeau P.L. Advanced compaction quality control // *Joint Transportation Research Program*. 2006. P. 285. URL: <http://docs.lib.purdue.edu/jtrp/285> (data obrashcheniya: 03.02.2021).
3. Mooney M.A., Adam D. Vibratory roller integrated measurement of earthwork compaction: an overview. In: *Proceeding of the Seventh International Symposium on Field Measurements in Geomechanics*, 2007. DOI 10.1061/40940(307)80.
4. Kordestani A. Ride vibration and compaction dynamics of vibratory soil compactors. Thesis for: Master of Applied Science. 2010. 190 p.
5. Popov Y., Chabutkin E. Increasing efficiency of vibratory rollers through adjusting magnitude of disturbing force. In: *Proceedings of the 5th International Conference on Industrial Engineering (ICIE 2019)*, 2020. P. 567-576.
6. Adam D., Pistor J. Dynamic roller compaction for earthworks and roller-integrated continuous compaction control: State of the art overview and recent developments. Institute of Geotechnics, Vienna University of Technology, Austria, 2016. 41 p.
7. Anderegg R., Kaufmann K. Compaction monitoring using intelligent soil compactors. In: *Proceeding of the GeoCongress 2006: Geotechnical Engineering in the Information Technology Age*, 2006. P. 1-6. DOI 10.1061/40803(187)41.
8. Imran S., Beainy F., Commuri S., Zaman M. Dynamical model of asphalt-roller interaction during compaction. In: *Proceeding of the 11th International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics*. 2014. V. 1. P. 559-567.
9. Mooney M.A. Intelligent soil compaction systems. National Academies of Sciences, Engineering, and Medicine. 2010. Washington, DC: The National Academies Press. URL: <https://doi.org/10.17226/22922> (data obrashcheniya: 05.02.2022).
10. Tyuremnov I.S. Review of systems for continuous monitoring of soil compaction for vibrating rollers. Part 3. Features of functioning and "intelligent compaction" // *Bulletin of PNU*. 2016. № 2 (41). P. 115-122.
11. SHishkin E.A., Kovalenko A.S. Evaluation of the effectiveness of vibration compaction of road surfaces // *Mekhanika XXI veku*. 2020. № 19. P. 79-82.
12. Shen P., Lin S. Mathematic Modeling and chaotic identification for practice construction in vibratory compacting // *Journal of Vibration Engineering & Technologies*. 2018. V. 6. P. 1-13.

13. SHabanova G.I., Savel'ev S.V., Buryj G.G. Mathematical description of the oscillatory system "vibrating working organ - ground" // Siberian State Automobile and Highway Academy. 2013. № 3 (31). P. 102-107.
14. Savel'ev S.V., Buryj G.G., Poteryaev I.K. Application of the algorithm for determining the parameters of vibration rollers taking into account the mass of compacted soil in the zone of active vibration action // Siberian State Automobile and Highway Academy. 2015. № 6 (46). P. 32-37.
15. Imran S., Beainy F., Commuri S., Zaman M. Transient response of a vibratory roller during compaction. In: Proceeding of the 51st IEEE Conference on Decision and Control (CDC), 2012. P. 4378-4383.
16. Annaberdiev A.H.-M. Analysis of compaction modes and development of recommendations for their improvement // Engineering journal of Don. E-journal. 2017. № 2 (45). P. 137.
17. Ovcharenko I.N. Mathematical and computer modeling of mechanical vibrations // Engineering Journal: Science and Innovation. 2014. № 11 (35). P. 1.
18. Tarasov V.N., Boyarkina I.V., Boyarkin G.N., Serebrennikov V.S. Investigation of dynamic processes of vibration roller rebound from the compacted surface // Dynamics of Systems, Mechanisms and Machines. 2019. V. 7. № 1. P. 161-167.
19. Zubkov A.F. Comparative assessment of the sealing effect of the parameters of smooth-rolling rollers of static and vibration action in the construction of non-rigid road surfaces // Russian Journal of Building Construction and Architecture. 2008. № 1 (9). P. 139-148.
20. Gorbunov A.A., Gavrilov E.N., Dmitriev V.N. Analysis of dynamic modes of resonant vibration machines (Sommerfeld effect) // Vestn. Ul'yanovskogo gos. tekhnicheskogo un-ta. 2009. № 2 (46). P. 26-28.
21. Antipov V.I., Dencov N.N., Koshelev A.V. Energy relations in a vibrating machine on multiple combinational parametric resonance // Vestnik of Lobachevsky University of Nizhni Novgorod. 2013. № 5-1. P. 188-194.