

ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ И МАШИНОСТРОЕНИЯ

УДК 620.17

DOI:10.18324/2077-5415-2021-3-7-13

Уточнение радиуса контакта при кинетическом индентировании сферы

П.М. Огар^a, В.А. Шилин^b, Я.В. Казанкина^c

Братский государственный университет, Макаренко, 40, Братск, Россия

^a ogar@brstu.ru, ^b wal-500@yandex.ru, ^c kazankina_yana@mail.ru

^a <https://orcid.org/0000-0001-7717-9377>, ^b <https://orcid.org/0000-0002-8218-782X>,

^c <https://orcid.org/0000-0002-2972-4411>

Статья поступила 30.08.2021, принята 17.09.2021

В работе указано, что попытки решить упругопластические задачи в «упругой» постановке, рассматривая повторный контакт как упругий с «герцевским» распределением контактного давления, являются грубым допущением. Это приводит при определении параметров индентирования к погрешностям до 15 %. Представлены новые свойства диаграммы кинетического индентирования сферы, позволяющие определить распределение давления на площадке контакта. Предложено достаточно точное уравнение, которое следует применять для определения модуля упругости материала при отсутствии наплыва при индентировании сферы. Использование оригинального подхода к описанию площади контакта при разгрузке сферы позволило получить новое уравнение для начальной жесткости при разгрузке, которое учитывает распределение давления на площадке контакта и значительно отличается от существующего. Вычислительные эксперименты подтверждают погрешности при использовании существующего уравнения для начальной жесткости при разгрузке для определения площади контакта, что является причиной многочисленных поправок к приведенному модулю упругости или к начальной жесткости при разгрузке в работах разных авторов.

Ключевые слова: кинетическое индентирование сферы, радиус контакта, начальная жесткость разгрузки, определение модуля упругости, распределение контактного давления.

Refinement of the contact radius during kinetic indentation of the sphere

P.M. Ogar^a, V.A. Shilin^b, Y.V. Kazankina^c

Bratsk State University; 40, Makarenko St., Bratsk, Russia

^a ogar@brstu.ru, ^b wal-500@yandex.ru, ^c kazankina_yana@mail.ru

^a <https://orcid.org/0000-0001-7717-9377>, ^b <https://orcid.org/0000-0002-8218-782X>,

^c <https://orcid.org/0000-0002-2972-4411>

Received 30.08.2021, accepted 17.09.2021

In this paper, it is indicated that attempts to solve elastoplastic tasks in the "elastic" formulation, considering repeated contact as an elastic with the Herz distribution of contact pressure, are a gross assumption. This leads to the determination of the parameters of indentation to errors up to 15%. The new properties of the kinetic indentation chart of the sphere, allowing to determine the distribution of pressure on the contact site, are presented. The use of an original approach to the description of the contact area during the unloading of the sphere makes it possible to obtain a new equation for the initial stiffness during unloading, which takes into account the pressure distribution on the contact site and is significantly different from the existing one. Computational experiments are confirmed by errors using an existing equation for initial stiffness when unloading to determine the area of contact, which causes numerous corrections to the reduced modulus of elasticity or to the initial stiffness during unloading in the works of different authors.

Keywords: kinetic indentation of the sphere, contact radius, initial stiffness of unloading, determination of the elastic modulus, distribution of contact pressure.

Введение. Испытания на вдавливание сферы являются одним из самых ранних методов определения механических свойств материалов. Главными преимуществами метода являются неразрушающее действие, простота выполнения и возможность оценки локальных механических свойств материалов конструкции.

Исторически изначально тест на вдавливание сферы использовался для определения твердости материала [1; 2] по Бринеллю (1900) и по Майеру (1908).

Значительно расширились возможности определения механических свойств материалов при использовании метода кинематического индентирования, который

заключается в фиксации усилия P_i и перемещений h_i при упругопластическом внедрении сферы и аналогичной фиксации P_{ei} и h_{ei} упругого восстановления при разгрузке. Ключевым моментом при таком подходе является определение жесткости $S = dP_{ei}/dh_{ei}$ в начальный момент разгрузки. Вопросами упругого вдавливания осесимметричных инденторов в разное время занимались авторы работ [3–7], подробно их содержание изложено в [8]. В результате для практического применения начальная жесткость разгрузки была определена следующим образом:

$$S = 2E^* a, \tag{1}$$

где E^* — приведенный модуль упругости; a — площадь контакта после нагружения;

$$E^* = \left(\frac{1-\nu^2}{E} + \frac{1-\nu_i^2}{E_i} \right)^{-1}, \tag{2}$$

где ν , ν_i и E , E_i — коэффициенты Пуассона и модули упругости материала и индентора.

При известном значении одного из параметров (E^* или a) представляется возможность определить другой.

Ввиду определенной неудовлетворенности использования в инженерных расчетах в уравнение (1) вводятся различные корректирующие и поправочные параметры. Согласно [9]:

$$S = \beta_c 2E^* a, \tag{3}$$

где β_c — корректирующий фактор.

По данным [10], приведенный модуль упругости определяется уравнением:

$$E^* = c \cdot \left(\frac{S}{2a} \right) + b \cdot \left(\frac{S}{2a} \right)^2, \tag{4}$$

где c — константа; $b = b(\varepsilon_y, n)$; ε_y, n — параметры упругопластического тела.

В работе [11]:

$$k_c S = 2E^* a, \tag{5}$$

где $k_c = 1/\beta_c$, $k_c = k_c(\varepsilon_y, n)$. Согласно [12], $k_c = k_c(\varepsilon_y, n, E/E_i)$.

Авторы [13] ввели параметр γ_c , аналогичный параметру β_c в уравнении (2):

$$\gamma_c = 1 + \frac{2(1-\nu) a}{3\pi(1-\nu) R}, \tag{6}$$

где ν — коэффициент Пуассона; R — радиус сферы.

Впоследствии поправка γ_c была использована в работах [14; 15] для уточнения радиуса контакта.

Из вышеуказанного следует: 1) выражение (1) требует уточнения; 2) отсутствует единый подход к определению причины этой проблемы.

Целью настоящих исследований является уточнение выражения для начальной жесткости разгрузки при

использовании метода кинетического индентирования сферы.

Характеристики диаграммы кинетического индентирования. Построению диаграммы кинетического индентирования предшествует предварительная обработка измеренных результатов испытаний с целью исключения влияния деформации индентора и других элементов установки, а также влияния тангенциальных сил. На рис. 1 представлена типичная «очищенная» диаграмма кинетического индентирования, состоящая из ветвей нагружения и разгрузки индентора. Имеются 5 параметров, которые снимаются с кривых «нагрузка – перемещение» для дальнейшего использования: максимальная нагрузка P_m , максимальное внедрение h_m , экспонента α зависимости $P(h_i)$, контактная жесткость на начальном участке ветви разгрузки $S = dP_e/dh_e$, остаточная глубина h_r после разгрузки индентора. Кривую нагружения можно описать уравнением:

$$P = C_l h^\alpha, \tag{7}$$

а кривую разгрузки согласно [9]:

$$P_e = P_m \left(\frac{h_e - h_r}{h_m - h_r} \right)^\gamma, \tag{8}$$

где C_l — константа; α , γ — показатели степени.

Из уравнения (9) для контактной жесткости на начальном участке кривой разгрузки имеем:

$$S = \left. \frac{dP_e}{dh_e} \right|_{h_e=h_m} = \frac{P_m \cdot \gamma}{h_m - h_r} = \frac{P_m \cdot \gamma}{w_0}. \tag{9}$$

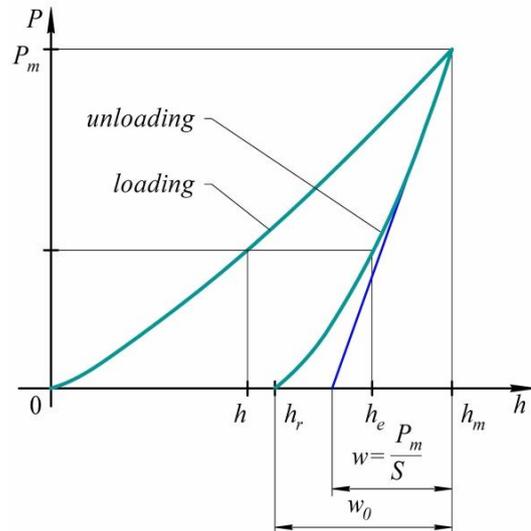


Рис. 1. Типичная «очищенная» диаграмма кинетического индентирования

Из рис. 1 следует:

$$w = \frac{P_m}{S} = \frac{w_0}{\gamma}, \quad \gamma = \frac{w_0}{w}. \tag{10}$$

В работе [16] при разгрузке индентора параметр γ определен расчетным путем:

$$\gamma = \frac{3 - 2\bar{h}_c}{2 - \bar{h}_c}, \quad (11)$$

где $\bar{h}_c = h_c/R$, R — радиус сферы; h_c — глубина, на которой происходит контакт индентора с образцом под нагрузкой P_m . Аналогичный результат был получен для повторного нагружения индентора в работе [17].

Из геометрических соотношений следует:

$$h_c = R - \sqrt{R^2 - a^2}, \text{ или } \bar{h}_c = 1 - \sqrt{1 - \bar{a}^2}, \quad (12)$$

где $\bar{a} = a/R$; a — радиус площадки контакта при нагрузке.

Подставляя уравнение (12) в (11), получим:

$$\gamma = \frac{1 + 2\sqrt{1 - \bar{a}^2}}{1 + \sqrt{1 - \bar{a}^2}}. \quad (13)$$

Таким образом, экспоненту кривой разгрузки γ можно определить через относительный радиус контакта \bar{a} в нагруженном состоянии индентора.

Методология решения проблемы. Из анализа обзоров, приведенных в работах [14; 18], существуют следующие методы определения радиусов контакта: 1) с помощью предложенного авторами [19] параметра $c^2 = h_c/h$, учитывающего продавливание ($c^2 < 1$) и нагромождение ($c^2 > 1$) материала [10–12; 18–21 и др.]; 2) использующие результаты теории упругости: при применении для анализа испытаний на вдавливание начальной жесткости при разгрузке; для учета влияния тангенциальных напряжений, а также деформации индентора при нагружении [13–15; 22 и др.]. При применении параметра c^2 учитываются пластические свойства материала, поэтому вначале их необходимо определить согласно [23] или другим методикам, например [16; 21; 25–28 и др.].

В настоящем исследовании используем результаты теории упругости. Параметр c^2 будем использовать для аналитического построения кинетических диаграмм индентирования сферы в виртуальные материалы с разными пластическими свойствами.

Часто упругопластические задачи пытаются решать в «упругой» постановке, рассматривая повторный контакт как упругий с «герцевским» распределением контактного давления. При этом используется постоянный радиус кривизны восстановленной поверхности, определенный исходя из ее остаточной глубины и диаметра отпечатка. Считаем это грубым допущением, цена которого показана далее. На самом деле, при упругопластическом деформировании распределение давления на площадке контакта выравнивается [9; 29], а радиус кривизны по диаметру отпечатка может отличаться в два раза [30, с. 15]. Парадокс ситуации состоит в том, что в указанных работах [9; 29] этот прием используется.

Уравнение для распределения контактного давления при упругопластическом внедрении сферы получено в работе [31]. Авторами показано, что если кривая нагружения диаграммы кинетического индентирования сферы

описывается уравнением (7), тогда распределение давления в месте контакта описывается выражением:

$$p(r) = p_0(1 - r^2/a^2)^\beta, \quad (14)$$

где $\beta = \alpha - 1$; $p_0 = p_m(\beta + 1)$; $p_m = P/(\pi a^2)$ — среднее давление в контакте.

Используя конечно-элементное моделирование при введении сферы в упругопластическое упрочняемое полупространство, авторы [32] получили, что:

$$\bar{P} = \frac{P}{E^* R^2} = e^{-B \bar{h}^A}, \quad (15)$$

где $A = A(\sigma_y^*, n)$; $B = B(\sigma_y^*, n)$; $\sigma_y^* = \sigma_y/E^*$; σ_y — предел текучести; n — показатель упрочнения. Для $\varepsilon_y = 0.0005 \dots 0.005$ и $n = 0.05 \dots 0.4$:

$A(\sigma_y^*, n) = 1.0212 \dots 1.3128$. Тогда в уравнении (14) $\beta = 0.0212 \dots 0.3128$.

Напряженно-деформированное состояние от действия на упругое полупространство нагрузки вида (14) рассмотрено в работе [22]. Перемещения в центре площадки контакта описываются уравнением:

$$u_z(r) = \frac{P_m}{E^*} a 2^{2\beta+1} (1 + \beta) V(\beta + 1, \beta + 1). \quad (16)$$

Учитывая принятые обозначения и то, что $K_\beta(\beta) = 2^{2\beta+1} (1 + \beta) V(\beta + 1, \beta + 1)$, где $V(\alpha_1, \alpha_2)$ — бета-функция, получим:

$$P = \frac{\pi}{K_\beta} \cdot E^* (h - h_r) \sqrt{R(h + h_r)}. \quad (17)$$

Из уравнения (17) можно получить достаточно точное уравнение, которое следует применять для определения модуля упругости материала при отсутствии наплыва при индентировании:

$$E = \frac{1 - \nu^2}{\frac{\pi(h - h_r) \sqrt{R(h + h_r)}}{K_\beta P} \frac{1 - \nu_i^2}{E_i}}. \quad (18)$$

Разгрузка сферы рассмотрена авторами [33], где указано, что контактная глубина при разгрузке описывается выражением:

$$h_{ce} = h_c \frac{h_e - h_r}{h_m - h_r}, \quad h_r \leq h_e \leq h_m, \quad (19)$$

где h_c — контактная глубина при упругопластическом нагружении.

Соответственно для радиуса площадки контакта при разгрузке:

$$a_{ce} = (2Rh_{ce} - h_{ce}^2)^{0.5}. \quad (20)$$

Из выражения (16) с учетом (19), (20) и принятых обозначений следует:

$$P_e = \frac{\pi E^*}{K_{\beta 0}} (2Rh_{ce} - h_{ce}^2)^{0.5} (h_e - h_r), \quad (21)$$

а начальная жесткость разгрузки:

$$S = \left. \frac{dP_e}{dh_e} \right|_{h_e=h_m} = \frac{\pi E^*}{K_\beta} \cdot \frac{3Rh_c - 2h_c^2}{(2Rh_c - h_c^2)^{0.5}}. \quad (22)$$

После преобразования с учетом уравнения (11) получим:

$$S = \frac{\pi E^*}{K_\beta} \cdot \frac{3-2\bar{h}_c}{2-\bar{h}_c} \cdot (2Rh_c - h_c^2)^{0.5} = \frac{\pi E^*}{K_\beta} \cdot \gamma \cdot a = K_s E^* a, \quad (23)$$

$$K_s(\beta, a) = \frac{\pi \gamma(a)}{K_\beta(\beta)}. \quad (24)$$

Зависимости параметра $K_s(\beta, \bar{a})$, аналога численной константы в уравнении (1), представлены на рис. 2.

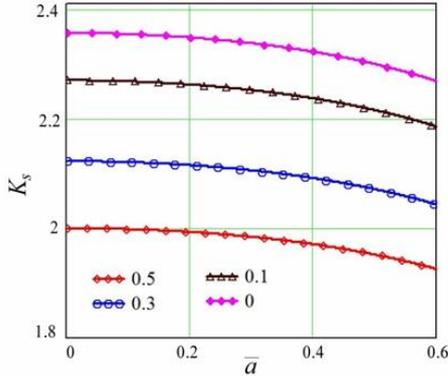


Рис. 2. Зависимости параметра $K_s(\bar{a})$ для разных значений β

Аналогичный результат получен в работе [34] для корректирующего фактора β_c из уравнения (3):

$$\beta_c = \frac{\pi \gamma}{2K_\beta}. \quad (25)$$

После подстановки уравнения (25) в (3) получим уравнение (23).

Результаты исследований. Для оценки полученных результатов рассмотрено внедрение сферического индентора из карбида вольфрама ($E_i = 700 \text{ GPa}$, $\nu_i = 0.24$) в упругопластическое упрочняемое полупространство с одинаковыми упругими константами ($E = 200 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$) и с разными пластическими свойствами. При описании свойств виртуальных материалов используем следующие характеристики упругопластического тела Холломоуна [35]: $\varepsilon_y = \sigma_y / E$, где σ_y — предел текучести, и n — экспоненту упрочнения. Для вычислительных экспериментов использованы три виртуальных материала с разными свойствами, для которых параметры ε_y и n соответственно равны: 0.001, 0.05; 0.003, 0.1; 0.005, 0.2.

Для определения расчетного значения радиуса относительной площади \bar{a}_{calc} использовались данные [18], которые, по мнению авторов [15], являются наиболее точными из методов, использующих c^2 . Согласно [18]:

$$c^2 = \frac{h_c}{h} = M^{2/N} (2\bar{h})^{(2-N)/N}, \quad (26)$$

где $M = M(\varepsilon_y, n)$ и $N = N(\varepsilon_y, n)$ получены в результате конечно-элементного моделирования.

В этом случае радиус контакта рассчитывается следующим образом:

$$\bar{a}_{calc} = \sqrt{2c^2 \bar{h} - (c^2 \bar{h})^2}. \quad (27)$$

При построении кривой нагружения использовано уравнение (15), предложенное авторами [32], а для кривой разгрузки — уравнения (8), (11) или (13). Для указанных выше виртуальных материалов значения параметра β соответственно равны 0.0616, 0.1749, 0.2537 и значительно отличаются от «герцевского» $\beta = 0.5$.

Далее были рассмотрены два случая:

1) приведенная начальная жесткость разгрузки определялась из уравнения (9):

$$\bar{S}_1 = \frac{S_1}{E^* R} = \frac{\bar{P}_m \cdot \gamma}{h_m - \bar{h}_r}, \quad (28)$$

а относительный радиус контакта — согласно уравнению (1):

$$\bar{a}_{s1} = \bar{S}_1 / 2; \quad (29)$$

2) для определения приведенной начальной жесткости разгрузки использовалось уравнение (23):

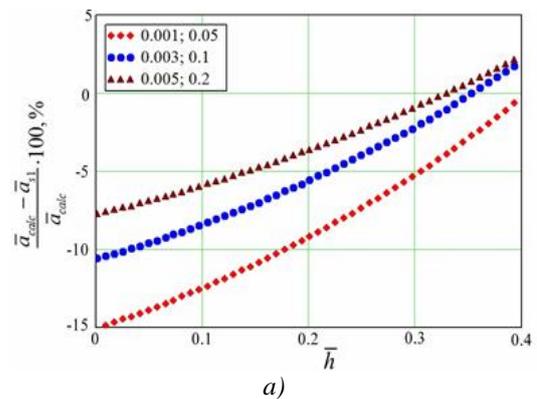
$$\bar{S}_2 = \frac{S_2}{E^* R} = \frac{\pi \gamma \bar{a}_{calc}}{K_\beta}. \quad (30)$$

Относительный радиус контакта при этом:

$$\bar{a}_{s2} = \bar{S}_2 / K_s = \bar{a}_{calc}. \quad (31)$$

Таким образом, во втором случае значения радиуса контакта, определенного из начальной жесткости разгрузки, всегда совпадают с его расчетным значением, что не наблюдается для случая 1. Следует отметить, что значения жесткостей \bar{S}_1 и \bar{S}_2 при одинаковых значениях h_m совпадают.

На рис. 3, а представлена зависимость расхождения \bar{a}_{s1} от \bar{a}_{calc} с ростом величины внедрения сферы \bar{h} в виртуальные материалы. Явная корреляция с данными на рис. 3, а следует из зависимостей $K_s(\bar{h})$ на рис. 3, б, которые показывают, какими должны быть численные коэффициенты в уравнении (1) для устранения расхождений \bar{a}_{s1} от \bar{a}_{calc} .



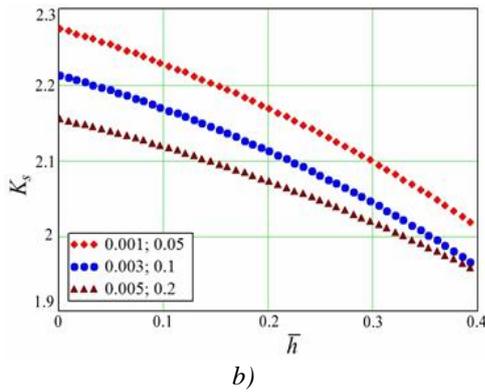


Рис. 3. Величина расхождений \bar{a}_{s1} от \bar{a}_{calc} с увеличением внедрения сферы \bar{h} (а) и значения параметра $K_s(\bar{h})$ (b), устраняющие эти расхождения в случае 2

Рассмотрим поправку к уравнению (1) предложенную автором [32], согласно которой для $\bar{a} = a/R \geq 0.25$ рекомендовано

$$\bar{a}_h = \bar{a}_{s1} - \eta^*(\bar{h}, \bar{P}), \tag{32}$$

где

$$\eta^*(\bar{h}, \bar{P}) = c_1 + c_2 \bar{h} \ln \bar{h} + c_3 \ln^2 \bar{P}, \tag{33}$$

$$c_1 = -0.019381588, c_2 = -0.15760423, c_3 = -0.00019448324.$$

Зависимость $\bar{a}_h(\bar{h})$ в сравнении с зависимостями $\bar{a}_{s1}(\bar{h})$ и $\bar{a}_{s2}(\bar{h})$ представлена на рис. 4.

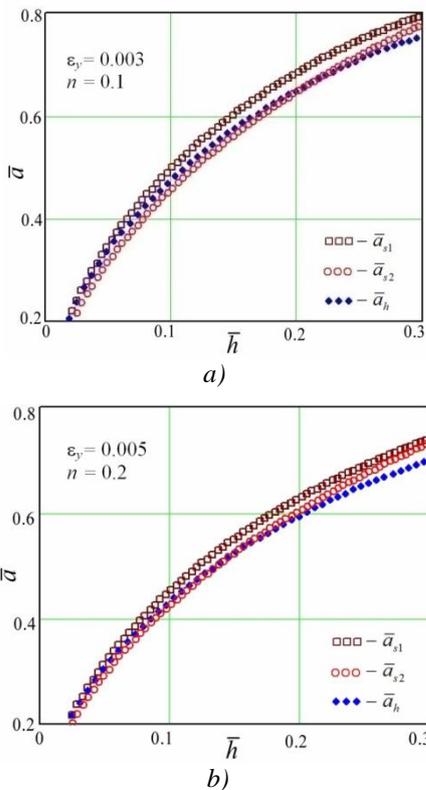


Рис. 4. Сравнение расчетной зависимости $\bar{a}_h(\bar{h})$ с учетом поправочного параметра $\eta^*(\bar{h}, \bar{P})$ по данным [32] с зависимостями $\bar{a}_{s1}(\bar{h})$ и $\bar{a}_h(\bar{h})$

Как следует из рис. 4 расчет зависимости $\bar{a}_h(\bar{h})$ приводит к равномерно уменьшающимся значениям в сравнении с $\bar{a}_{s1}(\bar{h})$, в то время, как зависимости $\bar{a}_{s1}(\bar{h})$ и $\bar{a}_{s2}(\bar{h})$ сближаются (см. также рис. 3, а).

Очевидно, что целью авторов [32] являлось объяснение уменьшения радиуса контакта, а не определение начальной жесткости при разгрузке.

Без учета распределения контактного давления достичь поставленной цели исследований невозможно. Это подтверждается также результатом работы [34] при определении корректирующего фактора β_c , в которой было учтено распределения контактного давления и получен аналогичный результат.

Заключение

1. Указано, что попытки решать упругопластические задачи в «упругой» постановке, рассматривая повторный контакт как упругий с «герцевским» распределением контактного давления, являются грубым допущением. Это приводит при определении параметров индентирования к погрешностям до 15 %.

2. Ключевым моментом для достижения цели является использование более ранних разработок коллектива по определению распределения давления на площадке контакта (уравнение (14)) и определению напряженно-деформированного состояния при действии такой нагрузки на упругое полупространство.

3. Предложено уравнение (18) учитывающее распределение контактного давления, которое следует применять для определения модуля упругости материала при отсутствии наплыва при индентировании сферы.

3. Использование оригинального подхода к описанию площади контакта при разгрузке сферы позволило получить новое уравнение для начальной жесткости при разгрузке (уравнение (23)), значительно отличающееся от общепринятого (уравнение (1)). Вычислительные эксперименты подтверждают погрешности при использовании уравнения (1). Это объясняет причину многочисленных поправок к приведенному модулю упругости или к начальной жесткости при разгрузке в работах разных авторов, например, в [9–12 и др.].

Литература

1. Meyer E. Untersuchungen über Harteproofung und Harte. Zeitschrift des Vereins Deutschen Ingenieure. 1908. 52. P. 645-654.
2. Tabor D. The hardness of metals, Oxford University press, Great Britain, 1951. P. 600.
3. Galin L.A. Spatial contact problems of the theory of elasticity for punches of circular shape in planar projection, J. Appl. Math. Mech. (PMM), 1946. 10. P. 425-448.
4. Sneddon I.N. The relation between load and penetration in the axisymmetric boussinesq problem for a punch of arbitrary profile // Int. J. Eng. Sci. 1965. 3. P. 47-57.
5. Bulychev S.I., Alekhin V.P., Shorshorov M.Kh., Ternovskii A.P., Shnyrev G.D. Determining Young's modulus from the indenter penetration diagram // Industrial Laboratory. 1975. 41. P. 1137.

6. Bulychev S.I., Alekhin V.P., Shorshorov M.K., Ternovskii A.P. Mechanical properties of materials studied from kinetic diagrams of load versus depth of impression during microimpression // *Stren. Mater.* 1976. V. 8. P. 1084.
7. Galanov B.A., Grigor'ev O.N., Mil'man Y.V., Ragozin I.P., Trefilov V.I. Determination of the hardness and Young's modulus with elastoplastic penetration of indentors into materials // *Sov. Phys. Dokl.* 1984. 29. P. 146-147.
8. Borodich F.M., Keer L.M. Contact problems and depth-sensing nanoindentation for frictionless and frictional boundary conditions // *Int. J. Solids Struct.* 2004. 41. P. 2479-2499.
9. Oliver W.C., Pharr G.M. Measurement of hardness and elastic modulus by instrumented indentation: Advances in understanding and refinements to methodology // *J. Materials Research.* 2004. V. 19. № 1. P. 3-20.
10. Lee H. U.S. Patent № 6, 778, 916 (17 Aug. 2004).
11. Lee H., Lee J.H., Pharr G.M. A numerical approach to spherical indentation techniques for material property evaluation // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids.* 2005. V. 53. P. 2037-2069.
12. Lee J.H., Kim T., Lee H. A study on robust indentation techniques to evaluate elastic-plastic properties of metals. *Int. J. Solids and Structures.* 2010. 47. P. 647-664.
13. Hay J.L., Wolff P.J. Small correction required when applying the Hertzian contact model to instrumented indentation data // *J. Mater. Res.* V. 16. № 5, May 2001. P. 1280-1286.
14. Collin J.-M., Mauvoisin G., El Abdi R. An experimental method to determine the contact radius changes during a spherical instrumented indentation // *Mechanics of Materials.* 2008. 40. P. 401-406.
15. Collin J.-M. Correction factor for contact radius in spherical indentation measurements // *Mechanics of Materials.* 2012. 50. P. 47-52.
16. Ogar P., Kushnarev V., Kobzova I. Energy approach to determine mechanical properties of materials from the kinetic diagram of spherical indentation // *Materials Today: Proceedings.* 2019. V. 19. Part 5. P. 2342-2346.
17. Ogar P.M., Tarasov V.A. Kinetic Indentation Application to Determine Contact Characteristics of Sphere and Elastoplastic Half-Space // *Advanced Materials Research.* 2013. V. 664. P. 625-631.
18. Hernot X., Bartier O., Bekouche Y., El Abdi R., Mauvoisin G. Influence of penetration depth and mechanical properties on contact radius determination for spherical indentation // *International Journal of Solids and Structures.* 2006. № 43. P. 4136-4153.
19. Hill R., Storakers B., Zdunek A.B. A theoretical study of the Brinell hardness test // *Proc. Roy. Soc. Lon.* 1989. V. A. № 423. P. 301-330.
20. Kim S.H., Lee B.W., Choi Y., Kwon D. Quantitative determination of contact depth during spherical indentation of metallic materials - a FEM study // *Mat. Sc. and Eng. A.* 2006. V. 415. P. 59-65.
21. Zhang T., Wang S., Wang W. An energy-based method for flow property determination from a single-cycle spherical indentation test (SIT), *Int. J. of Mech. Sci.* 2020. 171. P. 105369.
22. Ogar P., Gorokhov D., Mamaev L., Kushnarev V. Influence of the form of axisymmetric load on the stress-strain state of an elastoplastic half-space // *MATEC Web of Conferences.* 2019. 298. P. 00094.
23. Ogar P., Gorokhov D., Zhuk A., Kushnarev V. Contact geometry during indentation of a sphere into an elastoplastic half-space // *MATEC Web of Conferences.* 2019. 298. P. 00093.
24. ГОСТ Р 56232-2014. Определение диаграммы напряжение - деформация методом инструментального индентирования шара. Введ. 01.01.2016. М.: Стандартинформ, 2016. 36 с.
25. Gao X., Jing X., Subhash G. Two new expanding cavity models for indentation deformations of elastic strain-hardening materials. *Int. J. Solids Struct.* 2006. 43 (7). P. 2193-208.
26. Jiang P., Zhang T., Feng Y., Yang R., Liang N. Determination of plastic properties by instrumented spherical indentation: Expanding cavity model and similarity solution approach. *J. of Mat. Res.* 2009. 24. P. 1045-1053.
27. Kang S.-K., Kim Y.-C., Kim K.-H., Kim J.-Y., Kwon D. Extended expanding cavity model for measurement of flow properties using instrumented spherical indentation // *Int. J. Plastic.* 2013. 49. P. 1-15.
28. Zhang T., Wang S., Wang W. Method to determine the optimal constitutive model from spherical indentation tests, *Results in Physics.* 2018. 8. P. 716-727.
29. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 509 с.
30. Марковец М.П. Определение механических свойств металлов по твердости. М.: Машиностроение, 1979. 191 с.
31. Огар П.М., Тарасов В.А., Турченко А.В. Развитие инженерных расчетов характеристик контакта жесткой сферы с упругопластическим полу-пространством // *Современные технологии. Системный анализ. Моделирование.* 2012. № 1. С. 80-87.
32. Collin J.M., Mauvoisin G., Pilvin P. Materials characterization by instrumented indentation using two different approaches // *Materials and Design.* 2010. V. 32. P. 636-640.
33. Ogar P., Gorokhov D., Ugryumova E. Mechanics of unloading of a rough surfaces pre-loaded joint // *MATEC Web of Conferences.* 2017. 129. P. 06016.
34. Ogar P.M., Tarasov V.A., Gorokhov D.B. The correction factor in elastic modulus determining by indentation // *Adv. Mat. Res.* 2014. V. 887-888. P. 997-1000.
35. Hollomon J.H., Tensile Deformation, *Trans. of the Metallurgical Society of AIME.* 1945. 162. P. 268-290.

References

1. Meyer E. Untersuchen uber Hartepfung und Harte. *Zeitschrift des Vereins Deutschen Ingenieure.* 1908. 52. P. 645-654.
2. Tabor D. The hardness of metals, Oxford University press, Great Britain, 1951. P. 600.
3. Galin L.A. Spatial contact problems of the theory of elasticity for punches of circular shape in planar projection, *J. Appl. Math. Mech. (PMM),* 1946. 10. P. 425-448.
4. Sneddon I.N. The relation between load and penetration in the axisymmetric boussinesq problem for a punch of arbitrary profile // *Int. J. Eng. Sci.* 1965. 3. P. 47-57.
5. Bulychev S.I., Alekhin V.P., Shorshorov M.Kh., Ternovskii A.P., Shnyrev G.D. Determining Young's modulus from the indenter penetration diagram // *Industrial Laboratory.* 1975. 41. P. 1137.
6. Bulychev S.I., Alekhin V.P., Shorshorov M.K., Ternovskii A.P. Mechanical properties of materials studied from kinetic diagrams of load versus depth of impression during microimpression // *Stren. Mater.* 1976. V. 8. P. 1084.
7. Galanov B.A., Grigor'ev O.N., Mil'man Y.V., Ragozin I.P., Trefilov V.I. Determination of the hardness and Young's modulus with elastoplastic penetration of indentors into materials // *Sov. Phys. Dokl.* 1984. 29. P. 146-147.
8. Borodich F.M., Keer L.M. Contact problems and depth-sensing nanoindentation for frictionless and frictional boundary conditions // *Int. J. Solids Struct.* 2004. 41. P. 2479-2499.
9. Oliver W.C., Pharr G.M. Measurement of hardness and elastic modulus by instrumented indentation: Advances in understanding and refinements to methodology // *J. Materials Research.* 2004. V. 19. № 1. P. 3-20.
10. Lee H. U.S. Patent № 6, 778, 916 (17 Aug. 2004).

11. Lee H., Lee J.H., Pharr G.M. A numerical approach to spherical indentation techniques for material property evaluation // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2005. V. 53. P. 2037-2069.
12. Lee J.H., Kim T., Lee H. A study on robust indentation techniques to evaluate elastic-plastic properties of metals. *Int.J. Solids and Structures*. 2010. 47. P. 647-664.
13. Hay J.L., Wolff P.J. Small correction required when applying the Hertzian contact model to instrumented indentation data // *J. Mater. Res.* V. 16. № 5, May 2001. P. 1280-1286.
14. Collin J.-M., Mauvoisin G., El Abdi R. An experimental method to determine the contact radius changes during a spherical instrumented indentation // *Mechanics of Materials*. 2008. 40. P. 401-406.
15. Collin J.-M. Correction factor for contact radius in spherical indentation measurements // *Mechanics of Materials*. 2012. 50. P. 47-52.
16. Ogar P., Kushnarev V., Kobzova I. Energy approach to determine mechanical properties of materials from the kinetic diagram of spherical indentation // *Materials Today: Proceedings*. 2019. V. 19. Part 5. P. 2342-2346.
17. Ogar P.M., Tarasov V.A. Kinetic Indentation Application to Determine Contact Characteristics of Sphere and Elastoplastic Half-Space // *Advanced Materials Research*. 2013. V. 664. P. 625-631.
18. Hernot X., Bartier O., Bekouche Y., El Abdi R., Mauvoisin G. Influence of penetration depth and mechanical properties on contact radius determination for spherical indentation // *International Journal of Solids and Structures*. 2006. № 43. P. 4136-4153.
19. Hill R., Storakers B., Zdunek A.B. A theoretical study of the Brinell hardness test // *Proc. Roy. Soc. Lon.* 1989. V. A. № 423. P. 301-330.
20. Kim S.H., Lee B.W., Choi Y., Kwon D. Quantitative determination of contact depth during spherical indentation of metallic materials—a FEM study // *Mat. Sc. and Eng. A*. 2006. V. 415. P. 59-65.
21. Zhang T., Wang S., Wang W. An energy-based method for flow property determination from a single-cycle spherical indentation test (SIT), *Int. J. of Mech. Sci.* 2020. 171. P. 105369.
22. Ogar P., Gorokhov D., Mamaev L., Kushnarev V. Influence of the form of axisymmetric load on the stress-strain state of an elastoplastic half-space // *MATEC Web of Conferences*. 2019. 298. P. 00094.
23. Ogar P., Gorokhov D., Zhuk A., Kushnarev V. Contact geometry during indentation of a sphere into an elastoplastic half-space // *MATEC Web of Conferences*. 2019. 298. P. 00093.
24. GOST R 56232-2014. Defining a diagram "stress-strain" by the method of instrumental indentation of the ball. *Vved.* 01.01.2016. M.: Standartinform, 2016. 36 p.
25. Gao X., Jing X., Subhash G. Two new expanding cavity models for indentation deformations of elastic strain-hardening materials. *Int. J. Solids Struc.* 2006. 43 (7). P. 2193-208.
26. Jiang P., Zhang T., Feng Y., Yang R., Liang N. Determination of plastic properties by instrumented spherical indentation: Expanding cavity model and similarity solution approach. *J. of Mat. Res.* 2009. 24. P. 1045-1053.
27. Kang S.-K., Kim Y.-C., Kim K.-H., Kim J.-Y., Kwon D. Extended expanding cavity model for measurement of flow properties using instrumented spherical indentation // *Int. J. Plastic.* 2013. 49. P. 1-15.
28. Zhang T., Wang S., Wang W. Method to determine the optimal constitutive model from spherical indentation tests, *Results in Physics*. 2018. 8. P. 716-727.
29. Dzhonson K. *Contact mechanics*. M.: Mir, 1989. 509 p.
30. Markovec M.P. *Determining metal mechanical properties by their hardness*. M.: Mashinostroenie, 1979. 191 p.
31. Ogar P.M., Tarasov V.A., Turchenko A.V. Development of engineering calculations of the contact characteristics of a rigid sphere with an elastic-plastic half-space // *Modern technologies. System analysis. Modeling*. 2012. № 1. P. 80-87.
32. Collin J.M., Mauvoisin G., Pilvin P. Materials characterization by instrumented indentation using two different approaches // *Materials and Design*. 2010. V. 32. P. 636-640.
33. Ogar P., Gorokhov D., Ugryumova E. Mechanics of unloading of a rough surfaces pre-loaded joint // *MATEC Web of Conferences*. 2017. 129. P. 06016.
34. Ogar P.M., Tarasov V.A., Gorokhov D.B. The correction factor in elastic modulus determining by indentation // *Adv. Mat. Res.* 2014. V. 887-888. P. 997-1000.
35. Hollomon J.H., *Tensile Deformation*, *Trans. of the Metallurgical Society of AIME*. 1945. 162. P. 268-290.