УДК 536.24 DOI:10.18324/2077-5415-2021-53-58

К расчету нестационарной теплопроводности двухслойной плоской системы

Ю.В. Видин[1a], В.С. Злобин[1b], А.А. Федяев[2c]

[1] Политехнический институт Сибирского федерального университета, Киренского, 26, Красноярск, Россия
[2] Братский государственный университет, ул. Макаренко, 40, Братск, Россия
[a, b] zlobinsfu@mail.ru, [c] vends1@mail.ru
[a] https://orcid.org/0000-0002-3777-6676, [b] https://orcid.org/000-0002-4281-3857,
[c] https://orcid.org/0000-0001-6233-3757
Статья поступила 03.09.2021, принята 23.09.2021

Исследование теплопроводности многослойных тел тем сложнее, чем больше слоев содержится в данной системе. Достаточно часто многослойные плоские системы могут быть заменены более простыми двухслойными системами. Сложность подобных задач обусловлена определением корней трансцендентных характеристических уравнений, возникающих в процессе решения. Определение корней является отдельной проблемой. Проблема получения решения громоздка и весьма трудоемка. Громоздкость и трудоемкость процесса особенно возрастает при расчете начальной стадии прогрева, когда в решении приходится учитывать большое число слагаемых. Обычно на практике используют табличные значения корней характеристического уравнения, полученные одним из известных численных методов. В статье предлагается аналитический приближенный метод определения наименьшего и наибольшего значения собственных чисел с последующим уточнением этого интервала. В процессе итерационного уточнения интервал между наименьшим и наибольшим значением корней быстро сужается и в конечном итоге сходится к истинному значению корня характеристического уравнения. Данный метод обладает высокой скоростью сходимости и позволяет производить вычисления с гарантированной точностью. Предлагаемый в статье аналитический метод позволяет определять корни характеристического уравнения для любых сочетаний определяющих его параметров, что является несомненным достоинством данного метода. Предлагаемый метод является достаточно простым и эффективным и может быть использован при решении широкого класса задач теплопроводности, в том числе с нелинейными граничными условиями.

Ключевые слова: аналитическое решение; трансцендентное уравнение; характеристические числа; приближенные методы; бесконечные ряды; итерационный процесс.

On the calculation of non-stationary thermal conductivity of a two-layer flat system

Yu.V. Vidin[1a], V.S. Zlobin[1b], A.A. Fedyaev[2c]

[1] Polytechnical Institute of Siberian Federal University; 26a, Kirensky St., Krasnoyarsk, Russia
[2] Bratsk State University; 40, Makarenko St., Bratsk, Russia
[a, b] zlobinsfu@mail.ru, [c] vends1@mail.ru
[a] https://orcid.org/0000-0002-3777-6676, [b] https://orcid.org/000-0002-4281-3857,
[c] https://orcid.org/0000-0001-6233-3757
Received 03.09.2021, accepted 23.09.2021

The more layers contained in a given system, the more difficult it is to study the thermal conductivity of multilayer bodies. Quite often, multilayer flat systems can be replaced by simpler two-layer systems. The complexity of such problems is due to the determination of the roots of transcendental characteristic equations that arise in the solution process. Determining the roots of the characteristic equation is a separate problem. The problem of obtaining a solution is cumbersome and very time-consuming. The cumbersome and laborious nature of the process increases, especially when calculating the initial stage of heating, when a large number of terms have to be taken into account in the solution. Typically, in practice, the table values of the roots of the characteristic equation obtained by one of the known numerical methods are used. The article proposes an analytical approximate method for determining the smallest and largest values of eigenvalues, with subsequent refinement of this interval. In the process of iterative refinement, the interval between the smallest and largest values of the roots of the characteristic equation narrows rapidly and, eventually, converges to the true value of the root of the characteristic equation. This method has a high convergence rate and makes it possible to perform calculations with guaranteed accuracy. The analytical method proposed in the article allows determining the roots of the characteristic equation for any combination of the defining parameters of the characteristic equation, which is its undoubted advantage. The proposed method is quite simple and effective and can be used to solve a wide class of thermal conductivity problems, including problems with nonlinear boundary conditions.

Keywords: analytical solution; transcendental equation; characteristic numbers; approximate methods; infinite series; iterative process.

Введение. Подавляющее число промышленных агрегатов и конструкций представляют собой многослойные системы. Это промышленные печи, содержащие огнеупорные и теплоизоляционные слои, обшивки различных высокоскоростных летательных аппаратов т. д. Таким образом, с вопросами теплопроводности многослойных тел приходится весьма часто встречаться в инженерной практике [1–4]. В настоящее время существует достаточно большое число различных методов решения таких задач. К ним относятся численные [5–7] и аналитические методы теории теплопроводности [8–10]. Существует также большое число приближенных аналитических методов решения задач теплопроводности, направленных на эффективное решение инженерных проблем [11–15]. Решения, получаемые при использовании аналитических методов, представляют собой бесконечные ряды, содержащие в своей структуре собственные числа характеристических уравнений, которые существенно усложняются при увеличении количества слоев теплотехнической конструкции. Использование аналитических методов для расчета нестационарных температурных полей в многослойных конструкциях сопряжено с рядом трудностей. Одной из них является процесс определения корней сложных трансцендентных характеристических уравнений. Особенно это проявляется при изучении начального периода прогрева, когда приходится брать большое количество членов бесконечных рядов, описывающих температурные поля в неоднородных элементах системы. Поэтому обычно реальная составная конструкция моделируется приближенно в виде некоторой двухслойной среды:

$$\frac{\partial \vartheta_i}{\partial \mathrm{Fo}} = \frac{\partial^2 \vartheta_i}{\partial X^2}, \quad (i = 1, 2) \tag{1}$$

$$0 \le \mathrm{Fo} < \infty; \quad 0 \le X \le 1;$$

граничное условие в центре:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial X} = 0 \quad \text{при} \quad X = 0, \tag{2}$$

условие сопряжения на границе слоев:

$$\vartheta_1 = \vartheta_2 \quad \frac{\partial \vartheta_1}{\partial X} = \frac{\partial \vartheta_2}{\partial X}, \tag{3}$$

граничное условие 3-го рода на поверхности:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial X} = -\mathrm{Bi}\,\vartheta \quad \text{при} \quad X = 1, \tag{4}$$

начальное условие:

$$\vartheta(X, 0) = 1, \quad \text{при} \quad \mathrm{Fo} = 0. \tag{5}$$

Здесь ϑ — безразмерная температура, X — безразмерная координата расчетной области, Fo — число Фурье.

В случае граничных условий 3-го рода решение задачи (1)–(5) имеет вид:

$$\theta(X, \mathrm{Fo}) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left\{ \cos \mu_n X - \frac{\mu_n}{K} \sin \mu_n X \right\} \times \\ \times \exp\left(-\mu_n^2 \mathrm{Fo}\right), \tag{6}$$

$$A_n = \left[\left(1 - \frac{\mu_n^2}{\mathrm{Bi}\,K}\right) \frac{\sin \mu_n \cos \mu_n + \mu_n}{2 \sin \mu_n} + \right. \\ \left. + \frac{\mu_n^2}{\mathrm{Bi}\,K} \cos \mu_n \right]^{-1}, \tag{7}$$

где μ_n — бесчисленное множество корней, которые находятся из решения характеристического уравнения следующего типа [14; 16]:

$$\mathrm{tg}\,\mu = \frac{\mathrm{Bi}\,K - \mu^2}{\mu(\mathrm{Bi} + K)}, \tag{8}$$

где Bi — безразмерное число подобия Био, а коэффициент K представляет отношение теплоаккумулирующей способности материалов, из которых изготовлено тело. Число Био Bi в теории теплообмена определяет интенсивность теплообмена на границе исследуемой системы и может принимать различные значения — как малые, так и большие. В зависимости от значения числа Bi, нагреваемые (охлаждаемые) тела можно классифицировать как термически тонкие, термически массивные или средней массивности. При этом само решение задачи может существенно усложняться, когда тело относится к термически массивному либо наоборот упрощаться в случае термически тонкого тела, когда температурное поле является достаточно однородным.

Для начальной стадии процесса прогрева (малое значение числа Фурье Fo) необходимо определять значительное количество корней зависимости (8). Обычно в расчетах используют готовые таблицы корней характеристического уравнения, определенных с помощью численного решения. Так в работах [13; 14] приведены табличные величины первых шести собственных значений данного уравнения для некоторых сочетаний между параметрами Bi и K. При этом вычисления ограничены для $\mathrm{Bi} = 100$ и $K = 10$ с относительно большим шагом для указанного коэффициента. Наиболее точными являются таблицы, приведенные в монографии [14], выполненные под руководством академика А.В. Лыкова. Достоинством названных таблиц является высокая точность приведенных значений μ_n, т. е. они могут рассматриваться как эталонные. Следует отметить, что в формуле (8) параметры Bi и K присутствуют на равных условиях, т. е., например, расчеты корней μ_n для соотношений $\mathrm{Bi} = 10$ и $K = 5$ являются совершенно аналогичными, как в случае $\mathrm{Bi} = 5$ и $K = 10$. Следовательно, объем таблиц может быть несколько сокращен. Общим недостатком таблиц является их дискретный характер, т. е. корни характеристического уравнения определены только для конкретных наборов параметров Bi и K. Если значения Bi и K не попадают в табличные, то приходится их определять непосредственно из характеристического уравнения численным методом. Наилучшим методом решения данной проблемы является аналитический метод определения корней характеристического уравнения (8), что позволяет исследовать тепловое состояние многослойных систем для любого набора значений параметров Bi и K, не обращаясь непосредственно к таблицам корней характеристического уравнения. Рассмотрим возможность получения решения характеристического уравнения (8) аналитическим методом.

Аналитическое решение. По-видимому, дополнительно к имеющимся табличным данным [14] целесообразно иметь аналитические методы нахождения собственных чисел μ_n зависимости (8) для любых возможных комбинаций между величинами Bi и K. На первом этапе важно установить пределы для искомых корней μ_n. Из анализа формулы (8) нетрудно выявить, что имеют место следующие ограничения для чисел μ_n:

$$\frac{n-1}{2}\pi \le \mu_n \le \frac{2n-1}{2}\pi, \tag{9}$$

$n = 1, 2, 3, ...$

Указанные интервалы (9) являются сравнительно широкими, и поэтому желательно их уменьшить. Если допустить, что:

$$\operatorname{tg}\mu = 0, \tag{10}$$

то тогда будет справедливо соотношение:

$$\mu_n = (n-1)\pi. \tag{11}$$

Следовательно, если произведение $\mathrm{Bi}\cdot K$ равно:

$$\mathrm{Bi}\cdot K = (n-1)^2\pi^2, \tag{12}$$

то выполняется равенство (11). Таким образом, можно обозначить новые пределы для корней μ_n ($n = 1, 2, 3, ...$), которые принимают вид при:

$$\mathrm{Bi}\cdot K \le (n-1)^2\pi^2$$

$$\frac{n-1}{2}\pi \le \mu_n \le (n-1)\pi. \tag{13}$$

Если же комплекс $\mathrm{Bi}\cdot K \ge (n-1)^2\pi^2$, то:

$$(n-1)\pi \le \mu_n \le \frac{2n-1}{2}\pi. \tag{14}$$

Условия (13) и (14) применимы в случае $n \ge 2$. Для варианта $n = 1$ остается справедливым соотношение (9) для любых величин произведения $\mathrm{Bi}\cdot K$.

Проиллюстрируем возможность применения названных пределов для второго собственного значения уравнения (8). Так, например, если $\mathrm{Bi}\cdot K \le \pi^2$, т. е., допустим, $\mathrm{Bi} = 5$ и $K = 1$, то $\frac{\pi}{2} \le \mu_2 \le \pi$. Если же $\mathrm{Bi}\cdot K > \pi^2$ (например, $\mathrm{Bi} = 5$ и $K = 2$), то тогда $\pi \le \mu_2 \le \frac{3}{2}\pi$. Как показано в монографии [14], в первом случае $\mu_2 = 2{,}93833$, и во втором случае $\mu_2 = 3{,}14620$. Таким простым приемом удается уменьшить интервал нахождения фактического числа μ_n в два раза. Для дополнительного сужения интервала целесообразно исследовать выражение (8) при условии $K << \mathrm{Bi}$ (или наоборот $\mathrm{Bi} << K$). В этом случае характеристическое уравнение (8) может быть записано приближенно в более простом виде:

$$\operatorname{tg}\mu = -\frac{\mu}{\mathrm{Bi}+K}. \tag{15}$$

В фундаментальной монографии по теории теплопроводности академика А.В. Лыкова [16] подробно изучена зависимость, аналогичная (15), которая представлена в форме:

$$\operatorname{tg}\mu = -\frac{\mu}{\mathrm{Bi}^*-1}. \tag{16}$$

В работе [16] приведены первые шесть корней уравнения (16) с четырьмя значащими цифрами после запятой. При этом охвачена область Bi^* от 0 до ∞ с приемлемым для инженерной практики шагом. Сопоставление соотношений (15) и (16) позволяет установить взаимосвязь в виде:

$$\mathrm{Bi}^* = \mathrm{Bi} + K + 1. \tag{17}$$

Используя это равенство, нетрудно определить ориентировочное значение искомого корня μ_n. Покажем это на конкретном числовом примере. Примем, что $\mathrm{Bi} = 0{,}8$ и $K = 0{,}2$ (или наоборот). Тогда согласно [14] имеем $\mu_2 = 2{,}0288$, а табличное значение [16] $\mu_2 = 2{,}04185$, т. е. результаты оказываются весьма близкими друг к другу. Для последующих корней различие еще меньше. Так, для $\mu_3 = 4{,}9132$, а табличная величина [16] $\mu_3 = 4{,}91443$. Последующие значения корней μ_n для выбранного варианта практически полностью совпадают. Однако необходимо иметь в виду, что первое собственное число по зависимости (16) соответствует второму корню уравнения (8), и далее действует подобный сдвиг в нумерации. Предлагаемый прием позволяет получить нижнюю оценку, достаточно близкую к действительному корню. Можно это положение подтвердить примером, когда разница между Bi и K не слишком велика. Так, в частности, возьмем вариант $\mathrm{Bi} = 2$ и $K = 1$. Тогда согласно условию (11) будем иметь [14] $\mu_2 = 2{,}4557$, $\mu_3 = 5{,}2339$, $\mu_4 = 8{,}2045$ и т. д. Табличные величины этих же корней для принятых значений Bi и K соответственно равны [16] $\mu_2 = 2{,}59518$, $\mu_3 = 5{,}26328$, $\mu_4 = 8{,}21397$ и т. д.

Кроме сказанного, важно отметить, что установленные пределы для определяемых собственных чисел μ_n могут быть эффективно использованы в дальнейшем в быстросходящемся процессе итерации по схеме:

$$\operatorname{tg}\mu_{\max} = \frac{\mathrm{Bi}\cdot K - \mu_{\min}^2}{\mu_{\min}(\mathrm{Bi}+K)}, \qquad (18)$$

либо наоборот по соотношению:

$$\operatorname{tg}\mu_{\min} = \frac{\mathrm{Bi}\cdot K - \mu_{\max}^2}{\mu_{\max}(\mathrm{Bi}+K)}. \qquad (19)$$

Применение формул (18)–(19) позволяет весьма просто и быстро, даже при ручном счете установить узкую вилку для определения корня μ_n. Естественно, что чем меньше предполагаемый интервал, в котором располагается искомое число μ_n, тем процесс последовательных приближений с разных сторон будет короче. Использование табличных значений обратной тригонометрической функции $y = \operatorname{arctg} x$ ускоряет вычислительные операции [17–20].

В заключение рассмотрим эффективный аналитический способ расчета первого собственного числа характеристического уравнения (8), являющегося на практике, как правило, основным. Для этого представим $\operatorname{tg}\mu$ в виде усеченного степенного ряда [17]:

$$\operatorname{tg}\mu = \mu + \frac{\mu^3}{3} + \frac{2\mu^5}{15} + \frac{17\mu^7}{315} + \ldots. \qquad (20)$$

Ограничиваясь в (20) первыми двумя членами ряда и подставляя их в левую часть зависимости (8), а затем, осуществляя перегруппировку слагаемых, получим биквадратное алгебраическое уравнение:

$$\mu_1^4 + \frac{3(\mathrm{Bi}+K+1)}{(\mathrm{Bi}+K)}\mu_1^2 - \frac{3\mathrm{Bi}\cdot K}{\mathrm{Bi}+K} = 0, \qquad (21)$$

решение которого имеет вид:

$$\mu_1^2 = \frac{3(\mathrm{Bi}+K+1)}{2(\mathrm{Bi}+K)}\left[\sqrt{1+\frac{4\mathrm{Bi}\,K(\mathrm{Bi}+K)}{3(\mathrm{Bi}+K+1)^2}} - 1\right]. \qquad (22)$$

При сравнительно умеренных величинах параметров Bi и K расчет μ_1 на основе предлагаемого аналитического решения (22) оказывается достаточно точным. Так, например, в случае, когда $\mathrm{Bi} = 2$ и $K = 0{,}4$, используя выражение (22), получим:

$$\mu_1^2 = \frac{3(2+0{,}4+1)}{2(2+0{,}4)}\left[\sqrt{1+\frac{4\cdot 2\cdot 0{,}4(2+0{,}4)}{3(2+0{,}4+1)^2}} - 1\right] = 0{,}22357.$$

Следовательно, $\mu_1 = \sqrt{0{,}22357} = 0{,}4728$. Табличная же величина для принятых Bi и K равна [16] $\mu_1 = 0{,}4717$.

Вычисление μ_1 по формуле (22) характеризуется некоторым завышением результатов по сравнению с действительными. Если расчет по выражению (22) будет давать μ_1 выше $\frac{\pi}{2}$, что может иметь место при очень больших исходных Bi и K, то тогда необходимо ограничить μ_1 верхним максимальным пределом $\mu_1 = \frac{\pi}{2}$. Далее по соотношению типа (18) проводится уточнение. Таким образом, действительное значение искомого корня гарантированно находится в интервале $\mu_{\max}$ — $\mu_{\min}$. Ширина данного интервала быстро сокращается в процессе последовательных итераций.

Нетрудно показать, что если учитывать третье, а тем более и четвертое слагаемые в разложении (20), то можно существенно расширить диапазон определения аналитическим способом корня μ_1. Однако это будет связано с необходимостью решения алгебраических уравнений более высоких степеней, что, естественно, сильно усложнит конечные расчетные выражения. Поэтому рационально брать за основу метода формулу (20).

В качестве иллюстрации рекомендуемого подхода проанализируем следующий вариант $\mathrm{Bi} = 100$ и $K = 5$. Тогда согласно (22) имеем:

$$\mu_1^2 = \frac{3(100+5+1)}{2(100+5)}\left[\sqrt{1+\frac{4\cdot 100\cdot 5\cdot 105}{3\cdot 106^2}} - 1\right] = 2{,}55742,$$

т. е. $\mu_1 = 1{,}5992$, что больше $\frac{\pi}{2}$. Затем с помощью (19) находим:

$$\operatorname{tg}\mu_{1\min}^* = \frac{\mathrm{Bi}\cdot K - \mu_{1\max}^2}{\mu_{1\max}(\mathrm{Bi}+K)} = \frac{100\cdot 5 - \frac{\pi^2}{4}}{\frac{\pi}{2}(100+5)} = 3{,}0166563.$$

Следовательно, $\mu_{1\min}^*$ равен [8] $\mu_{1\min}^* = 1{,}2507$. Теперь, используя (16), получим верхнюю оценку для μ_1:

$$\operatorname{tg}\mu_{1\max}^* = \frac{\mathrm{Bi}\cdot K - \left(\mu_{1\min}^*\right)^2}{\mu_{1\min}^*(\mathrm{Bi}+K)} = \frac{100\cdot 5 - 1{,}2507^2}{1{,}2507(100+5)} = 3{,}7955,$$

т. е. согласно [18] $\mu_{1\max}^* = 1{,}3132$. Таким образом, действительное число μ_1 должно находиться в интервале $1{,}2507 < \mu_1 < 1{,}3132$. Табличная величина μ_1 для вышепринятых Bi и K по данным [16] равна $\mu_1 = 1{,}3029$. Если повторно еще раз использовать $\mu_{1\max}^* = 1{,}3132$, то по зависимости (17) получим величину μ_1, очень близкую к эталонной. Применяя вышеизложенную итерационную процедуру, можно получать значения корней характеристического уравнения с любой наперед заданной точностью. Важными особенностями рекомендуемой итерационной схемы является ее простота и исключительно высокая сходимость при нахождении нижней и верхней оценок искомых чисел μ_n.

Заключение. Решение трансцендентных уравнений, возникающих в задачах теплопроводности, является сложной математической проблемой. Таблицы корней этих уравнений, приведенные в известных монографиях, например, в [13; 14; 16], получены численным расчетом и соответствуют дискретным значениям параметров Bi и K, что существенно ограничивает круг решаемых задач. В данной статье впервые получен приближенный аналитический метод расчета, позволяющий решать трансцендентные уравнения для любых возможных комбинаций параметров Bi и K без каких-либо ограничений, что является несомненным преимуществом пред традиционными численными методами и существенно облегчает исследование более широкого круга задач теплопроводности.

Изложенные в статье приближенные аналитические методы позволяют проводить исследования сложных характеристических уравнений на основе значительно более простых и хорошо изученных. Кроме этого, в ряде случаев удается осуществить расчет первых, наиболее важных собственных значений μ_1 с высокой точностью, используя сравнительно несложные замкнутые аналитические зависимости, что является достоинством данного метода. Рекомендуемые в работе теоретические подходы могут также быть полезными и в тех случаях, когда характеристические уравнения оказываются еще сложнее, например, при решении задачи нестационарной теплопроводности многослойных систем для разных типов граничных условий.

Литература

1. Видин Ю.В., Злобин В.С., Иванов Д.И. Нестационарный теплоперенос в неоднородных конструкциях криволинейной конфигурации: моногр. Красноярск: СФУ, 2016. 167 с.
2. Федяев А.А., Видин Ю.В., Злобин В.С. Нелинейные процессы переноса тепла в многослойных системах: моногр. Братск: Изд-во БрГУ, 2020. 218 с.
3. Кудинов В.А., Карташов Э.М., Калашников В.В. Аналитические решения задач тепломассопереноса и термоупругости для многослойных конструкций. М.: Высш. школа, 2005. 430 с.
4. Карташов Э.М., Кудинов В.А., Калашников В.В. Теория тепломассопереноса: решение задач для многослойных конструкций. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Изд-во Юрайт, 2018. 435 с.
5. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М.: Наука, 1989. 432 с.
6. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы для инженеров. М.: Высш. школа, 1994. 544 с.
7. Самарский А.А., Вабишевич П.Н. Вычислительная теплопередача. М.: Едиториал УРСС, 2003. 784 с.
8. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. 2-е изд., доп. М.: Высш. школа, 1985. 480 с.
9. Цой П.В. Методы расчета отдельных задач тепломассопереноса. М.: Энергия, 1971. 383 с.
10. Цой П.В. Методы расчета задач тепломассопереноса. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Энергоатомиздат, 1984. 414 с.
11. Видин Ю.В. Инженерные методы расчета процессов теплопереноса. Красноярск: КрПИ, 1974. 144 с.
12. Видин Ю.В., Злобин В.С., Федяев А.А. Аналитический метод расчета нестационарного температурного поля при линейной зависимости коэффициента теплопроводности от пространственной координаты // Системы Методы Технологии. 2019. № 3 (43). С. 58-62.
13. Григорьев Л.Я., Маньковский О.Н. Инженерные задачи нестационарного теплообмена. Л.: Энергия, 1968. 85 с.
14. Михайлов М.Д. Нестационарные температурные поля в оболочках. М.: Энергия, 1967. 120 с.
15. Шнейдер П. Инженерные проблемы теплопроводности. М.: Изд-во иностранной лит., 1960. 479 с.
16. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высш. школа, 1967. 600 с.
17. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике. М.: Наука, 1965. 608 с.
18. Сегал Б.И., Семендяев К.А. Пятизначные математические таблицы. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1962. 464 с.
19. Grigull U. Temperaturausgleich in einfachen Körpern. Springer-Verlag, 1964.
20. Hans Dieter Baehr, Karl Stephan. Heat and Mass Transfer. Springer, 2006.

References

1. Vidin YU.V., Zlobin V.S., Ivanov D.I. Nonstationary heat transfer in inhomogeneous structures of curved configuration: monogr. Krasnoyarsk: SFU, 2016. 167 p.
2. Fedyaev A.A., Vidin YU.V., Zlobin V.S. Nonlinear heat transfer processes in multilayer systems: monogr. Bratsk: Izd-vo BrGU, 2020. 218 p.
3. Kudinov V.A., Kartashov E.M., Kalashnikov V.V. Analytical solutions of heat and mass transfer and thermoelasticity problems for multilayer structures. M.: Vyssh. shkola, 2005. 430 p.
4. Kartashov E.M., Kudinov V.A., Kalashnikov V.V. Theory of heat and mass transfer: solving problems for multilayer structures. 2-e izd., pererab. i dop. M.: Izd-vo YUrajt, 2018. 435 p.
5. Samarskij A.A., Gulin A.V. Numerical methods. M.: Nauka, 1989. 432 p.
6. Amosov A.A., Dubinskij YU.A., Kopchenova N.V. Computational methods for engineers. M.: Vyssh. shkola, 1994. 544 p.

7. Samarskij A.A., Vabishevich P.N. Computational heat transfer. M.: Editorial URSS, 2003. 784 p.
8. Kartashov E.M. Analytical methods in the theory of thermal conductivity of solids. 2-e izd., dop. M.: Vyssh. shkola, 1985. 480 p.
9. Coj P.V. Methods for calculating individual problems of heat and mass transfer. M.: Energiya, 1971. 383 p.
10. Coj P.V. Methods for calculating heat and mass transfer problems. 2-e izd., pererab. i dop. M.: Energoatomizdat, 1984. 414 p.
11. Vidin YU.V. Engineering methods for calculating heat transfer processes. Krasnoyarsk: KrPI, 1974. 144 p.
12. Vidin YU.V., Zlobin V.S., Fedyaev A.A. Analytical method for calculating a nonstationary temperature field with a linear dependence of the thermal conductivity coefficient on the spatial coordinate // Systems. Methods. Technologies. 2019. № 3 (43). P. 58-62.
13. Grigor'ev L.YA., Man'kovskij O.N. Engineering problems of non-stationary heat transfer. L.: Energiya, 1968. 85 p.
14. Mihajlov M.D. Unsteady temperature fields in shells. M.: Energiya, 1967. 120 p.
15. SHnejder P. Engineering problems of thermal conductivity. M.: Izd-vo inostrannoj lit., 1960. 479 p.
16. Lykov A.V. Theory of thermal conductivity. M.: Vyssh. shkola, 1967. 600 p.
17. Bronshtejn I.N., Semendyaev K.A. Handbook of Mathematics. M.: Nauka, 1965. 608 p.
18. Segal B.I., Semendyaev K.A. Five-digit mathematical tables. M.: Gos. izd-vo fiz.-mat. lit., 1962. 464 p.
19. Grigull U. Temperaturausgleich in einfachen Körpern. Springer-Verlag, 1964.
20. Hans Dieter Baehr, Karl Stephan. Heat and Mass Transfer. Springer, 2006.