

## Применение элементарной теории проникания ударника в грунтовые среды при однократном ударе

В.А. Коронатов

Братский государственный университет, Макаренко, 40, Братск, Россия

kortavik@mail.ru

<https://orcid.org/0000-0002-1331-213X>

Статья поступила 25.08.2021, принята 14.09.2021

*В безволновой элементарной теории проникания предложен новый способ аналитического определения силы лобового сопротивления для ударника в грунтовых средах. Вместо привычной квадратичной зависимости от скорости проникания используется аппроксимация Паде 1-й степени. В ней впервые учитываются ограничение по максимуму и возможность частичной потери прочности среды, которая определяется через силу удара (его начальную скорость). Предполагается, что удар абсолютно неупругий, а его энергия затрачивается на тепловые потери и нарушение внутренних прочностных связей твердой среды, приводящих к потере ее целостности в области удара. Возникающие микро- и макротрещины нарушают необходимые условия применения уравнений механики сплошной среды, а для существующих волновых методов — лишают их оснований. Затухающий закон потери прочности при удалении от места удара предложено определять подбором функции эмпирически, согласно экспериментальным данным. Новый вид силы лобового сопротивления позволяет аналитически находить связь между динамическими и статическими напряжениями грунтовой среды, а также для их предельных значений. Устанавливается минимальная начальная скорость удара, превышение которой ведет к погружению тела. Удар с такой начальной скоростью принимается как эталонный, разделяющий друг от друга эффективные и холостые удары. Сравнение эталонного с текущим ударом, без нахождения их силы, дает возможность определить начальную скорость проникания, которая раньше бесосновательно приравнивалась к начальной скорости удара. Фазы удара и проникания разделяются друг от друга во времени, а начало погружения находится из условия, когда напряжения среды — динамическое предельно-допустимое и статическое, вызванное предельно-равновесным состоянием ударника — сравниваются друг с другом. Учтены упругие свойства верхнего слоя грунтовой среды и сняты ограничения на силу удара. Приведены примеры моделирования процесса проникания ударника с конусообразным наконечником при однократном ударе о горизонтально и вертикально расположенные среды-преграды.*

**Ключевые слова:** ударник; боек; грунт; грунтовые среды; проникание; погружение; теория удара; динамическое напряжение; лобовое сопротивление; метод локального взаимодействия.

## Application of the elementary theory of a striker penetration into soil media with a single impact

V.A. Koronotov

Bratsk State University; 40, Makarenko St., Bratsk, Russia

kortavik@mail.ru

<https://orcid.org/0000-0002-1331-213X>

Received 25.08.2021, accepted 14.09.2021

*In the waveless elementary theory of penetration, a new method of analytical determination of the drag force for a striker in soil media is proposed. Instead of the usual quadratic dependence on the penetration rate, the Padé approximation of the first degree is used. For the first time, it takes into account the limitation on the maximum and the possibility of a partial loss of the strength of the medium, which is determined through the force of the impact (its initial velocity). It is assumed that the impact is absolutely inelastic, and its energy is spent on heat losses and violation of the internal strength bonds of the solid medium, leading to the loss of its integrity in the impact area. The emerging micro and macro cracks violate the necessary conditions for the application of the equations of continuum mechanics, and for the existing wave methods, they deprive them of their grounds. The decaying law of strength loss, with distance from the impact site, is proposed to be determined by selecting a function empirically, according to experimental data. The new type of drag force makes it possible to analytically find the relationship between the dynamic and static stresses of the soil medium, as well as for their limiting values. The minimum initial impact velocity is set, the excess of which leads to the immersion of the body. A hit with such an initial velocity is taken as a reference, separating effective and blank strikes from each other. Comparison of the reference with the current impact, without finding their strength, makes it possible to determine the initial speed of penetration, which was previously unreasonably equated to the initial speed of the impact. The phases of impact and penetration are separated from each other in time, and the beginning of the immersion is found from the condition when the stresses of the medium - the dynamic maximum allowable and static, caused by the maximum equilibrium state of the striker, become equal to each other. The elastic properties of the upper layer*

*of the soil medium are taken into account and the restrictions on the impact force are removed. Examples of modeling the process of penetration of a striker with a cone-shaped tip with a single impact on horizontally and vertically located medium-obstacles are given.*

**Keywords:** drummer; firing pin; priming; soil media; penetration; immersion; impact theory; dynamic stress; drag; method of local interaction.

**Введение.** Задачу о проникании ударника в грунтовые среды можно разделить на две части: рассмотрение момента удара — это необходимо для определения начальных условий — и математическое описание принятой модели для поиска ответов на поставленные вопросы. Момент удара общепринято рассматривать в рамках стереомеханической теории удара, несмотря на то, что она создавалась для иных задач. Для таких, где вариант с возможностью проникания не рассматривается, так как тела соударения являются абсолютно твердыми, а определение самой силы удара не предусмотрено. Такая «неприспособленность» стереомеханической теории для задач проникания отрицательно сказалась, например, в нахождении начальных условий и не позволяет выявлять эффективные и холостые удары — приводящие к началу погружения ударника в грунт или нет. Буквально во всех опубликованных работах начальная скорость проникания находится неправильно из-за отсутствия возможности учесть силу ударов. Следует подчеркнуть, что результаты моделирования процесса проникания существенно зависят от выбора динамических моделей взаимодействия ударника с грунтом, существующие варианты которых обсудим на примере поступательного движения.

Выбор модели определяется в значительной степени видом силы лобового сопротивления, которую принято искать аналогично тому, как это делается в воздушных средах. А именно: в виде квадратичной зависимости от скорости проникания в форме Резаля или Понселе [1; 2] либо в общем виде квадратного трехчлена [3] — такие законы задаются эмпирически, без каких-либо строгих обоснований. Сила сопротивления похожим образом может определяться и через контактные напряжения [4; 5]. Заметим, что в указанной квадратичной зависимости свободное слагаемое обычно считается прочностной составляющей. Но эта составляющая неспособна реагировать на изменение прочности среды, вызванное дискретным ударом или каким-либо иным силовым воздействием, например, непрерывным. Что говорит о необходимости поиска другого способа учета прочности грунта для силы лобового сопротивления. В аналитических зависимостях этой силы большое значение имеют коэффициенты пропорциональности, которые определяются с учетом механических свойств грунта и его плотности. Определение коэффициентов представляет определенные трудности, и для их нахождения разработаны различные методики [4–8]. Сравнение экспериментальных показаний с результатами моделирования процесса проникания, как правило, указывает на их расхождение [9], что может говорить и о неточности найденных коэффициентов. При сильных ударах такие различия становятся наиболее заметными, и принято считать, что причиной этого является меняющаяся плотность грунта, как у воздушных сред. Поэтому для улучшения точности расчетов существующие методы предусматривают определение

законов изменения плотности грунтовой среды в случаях ударов большой силы. А при не столь сильных ударах таким изменением плотности обычно пренебрегают, считая ее величиной постоянной.

Для нахождения законов изменения плотности используются уравнения механики сплошной среды, позволяющие описывать волновые явления, возникающие в грунте. В настоящее время для учета волновых явлений наиболее часто применяется модель локального взаимодействия (МЛВ) [4–8]. Методы локального взаимодействия, получившие развитие в задачах аэродинамики [10; 11], в последующем стали использоваться и для исследования движения тел в плотных грунтовых средах [4–8; 11–16]. Для этого в качестве модели реального грунта за основу была взята пластически сжимаемая среда (пластический газ) [4], которая не теряет свою целостность при оказании на нее силового воздействия. Под «пластическим газом» понимают сплошную среду, которая при нагрузке изменяет свою плотность по определенному закону, а при разгрузке сохраняет свою плотность, полученную при нагружении [4]. Таковы основы существующих на сегодняшний день методов описания процесса проникания.

В начале текущего года автором был предложен еще один подход для решения указанных задач, названный элементарной теорией проникания [17–19]. Принципы теории существенно отличаются от тех, что были перечислены выше, буквально во всем — как по выбору моделей грунтовой среды и самой динамической модели, так и по использованию стереомеханической теории удара. Было достигнуто более ясное понимание физики процесса и значительное упрощение его математического описания. В данной статье, помимо некоторых дополнений к ранее опубликованному материалу построения элементарной теории проникания [17–19], приводится:

1. Сравнение элементарной теории с существующими методами моделирования процесса проникания твердого тела при ударе с уточнением границ ее применимости по силе удара.
2. Некоторые обобщения элементарной теории проникания через введение упругих сил со стороны верхнего слоя грунта.
3. Примеры, показывающие моделирование процесса проникания ударника в горизонтально и вертикально расположенные среды-преграды с учетом вводимых обобщений.

**Недостатки существующих методов.** О несовершенстве существующих подходов в вопросах проникания абсолютно твердого тела в грунтовые среды при однократном и многократном ударе говорит отсутствие ответов (или их неубедительность) на ряд вопросов, возникающих при моделировании процесса. Например, таких:

1. Почему влияние удара на свойства грунтов принято связывать с изменением их плотности? А силу

лобового сопротивления со стороны грунтовой среды определяют с учетом ее плотности [4–8], а не прочности? – ведь действие удара сказывается прежде всего на изменении прочности грунтов, а существующая аналогия с воздушными средами здесь вызывает вопросы.

2. Насколько правомерна общепринятая квадратичная зависимость от скорости проникания для силы лобового сопротивления? — и такая аналогия с воздушными средами тоже сомнительна.

3. Почему не учитывается влияние упругих сил верхнего слоя твердых грунтов? — в существующих моделях это не предусматривается.

4. Как определить начальную скорость проникания для ударника? — ее принято приравнивать к начальной скорости удара [4–8; 20–23], что делалось из-за отсутствия обоснованного способа.

5. Чем вызвано совмещение фазы удара и начала проникания [4–8; 20–23]? — такое совмещение никак не обосновывается и делалось, по-видимому, лишь только для того, чтобы избежать постановки вопроса о нахождении начальной скорости.

6. Как предугадать, каким окажется текущий удар — эффективным или холостым? Удары при какой начальной скорости могут приводить к началу проникания тела в грунт, а при каких — нет? — такие вопросы раньше не обсуждались.

7. Как можно учесть силу отдельного удара? — стереомеханическая теория Ньютона [9; 24–26] ответа на это не дает, и поэтому было принято считать, что всякий текущий удар должен привести к началу проникания, а вариант с отсутствием такой возможности просто исключался.

8. Как объяснить, что однократный удар малой силы не может привести к началу проникания тела в грунт, а многократное нанесение нескольких таких ударов — может, и как можно это учесть при расчетах? — тоже это был необсуждаемый вопрос.

9. Насколько правомерны и точны уравнения механики сплошной среды [4–8]? — данный вопрос появляется из-за возникающих трещин, что можно воспринимать либо как нарушение условия неразрывности среды, либо как изменение граничных условий. Первое лишает оснований применения самих уравнений механики сплошной среды, а второе не дает возможность учесть изменения граничных условий, ведь форму и размеры трещин еще не научились определять заранее.

10. Как учесть затухающее действие удара на твердую среду, приводящее к восстановлению ее прочностных свойств по мере удаления от поверхности? — возникают отмеченные выше трудности в применении уравнений механики сплошной среды для таких задач.

Перечисленные вопросы и послужили причиной для разработки новой элементарной теории проникания.

**Принятые допущения элементарной теории проникания.** При построении элементарной теории проникания ударника в грунтовые среды при однократном ударе принимаются такие допущения [17; 18]:

1. Ударник является абсолютно твердым телом.

2. Грунт считается твердой и однородной средой, наделенной прочностными свойствами.

3. Удар абсолютно неупругий, его энергия полностью расходуется на тепловые потери и нарушение прочностных связей внутри грунтовой среды через возникновение микро- и макротрещин.

4. При ударах телом с плоским или не столь острым оголовком возникают трещины, близкие по числу и размерам как в направлении удара, так и в поперечных направлениях, а с острым наконечником — в направлении удара образуется преобладающая трещина, влияние которой на изменение прочности грунта будет наиболее заметным.

5. Потеря прочности грунта, постепенно исчезающей по мере удаления от места нанесения удара, носит затухающий характер. Затухание определяется на основании экспериментальных данных эмпирически путем подбора аналитической функции — как переменный коэффициент пропорциональности.

6. Возникающие релаксационные процессы по частичному или полному восстановлению прочностных свойств грунта после произведенного удара являются гораздо более длительными, чем сам процесс проникания (погружения).

7. Фаза удара, во время которой создается необходимая для этого потеря прочности среды в области контакта, предшествует началу проникания тела в грунт.

8. Предполагается, что в среднем влияние ударов равной силы приводит к одинаковой потере прочности грунта, несмотря на то, что возникающие трещины от каждого удара будут, вообще говоря, уникальны — отличаться по очертаниям, числу и размерам.

9. Сила лобового сопротивления для ударника определяется по формуле [17; 18]:

$$F_c = F_0 \left( 2 - e^{-\alpha x} \right) \frac{\dot{x} + \Delta}{\dot{x} + bV_- + \Delta}. \quad (1)$$

Здесь  $F_0$  — максимальная сила лобового сопротивления, подлежащая определению;  $V_-$  — начальная скорость текущего удара;  $b, \Delta$  — коэффициенты аппроксимации, определяемые экспериментально;  $x$  — координата проникания (погружения) ударника; точкой  $\langle \cdot \rangle$  обозначается дифференцирование по времени  $t$ .

Выражение  $2 - e^{-\alpha x}$  — один из возможных вариантов эмпирического подбора аналитической функции, определяющей закон затухания потери прочности грунта по мере удаления от места удара, где  $\alpha$  — параметр, определяемый экспериментально.

10. Упругие свойства грунта могут проявляться только со стороны верхнего слоя. Эти свойства не зависят от силы отдельно нанесенного холостого удара — удара, не приводящего к началу проникания ударника, а от серии таких ударов упругость слоя может быть нарушена.

11. Упругая сила со стороны верхнего слоя считается прямо пропорциональной объему среды, вытесняемой ударником перед началом проникания.

12. Упругие свойства нижних грунтовых слоев считаются пренебрежимо малыми [4], и их влияние не учитывается.

Следует отметить, что сила трения, возникающая на боковой поверхности ударника, будет ослабевать вследствие появления трещин в поперечных направлениях грунта при не столь остром оголовке [18], так как нормальные напряжения в поперечном направлении уменьшаются.

В первых работах по элементарной теории проникания [17; 18] некоторые приведенные здесь допущения либо не выделялись, либо формулировались немного иначе в сравнении с тем, как это сделано сейчас. Новая редакция не нарушает смыслового значения прежних формулировок. Добавлены три гипотезы об упругих свойствах грунтовой среды. Все приведенные выше гипотезы следует брать за основу и при многократных ударах, заменяя только формулу (1) нахождения лобового сопротивления на аналогичную — где должна учитываться многократность удара, как это сделано в работе [19].

**Основные положения теории.** При создании новой элементарной теории [17; 18] проникания автор руководствовался тем, чтобы найти ответы на перечисленные здесь вопросы, и желанием получить физически более ясную, в сравнении с имеющимися, динамическую модель для ударника, движущегося в грунтовой среде. Для этого пришлось преодолеть существующие стереотипы при введении силы лобового сопротивления, действующей на ударник со стороны грунта, избежать формального подхода в понимании действия удара и добиться корректного использования стереомеханической теории Ньютона. Было принято во внимание, что удар оказывает прежде всего разрушающее действие на грунтовую среду [17; 18], приводящее к появлению микро- и макротрещин. Прежние модели грунтовых сред такого не допускали, что явилось причиной для перехода к новой модели грунта — твердой среде, наделенной прочностными свойствами. Потеря целостности среды вблизи области удара должна приводить к уменьшению ее прочности, а значит, и к уменьшению силы сопротивления [17; 18]. Чем сильнее удар — тем заметнее должны проявляться потеря прочности среды и уменьшение силы лобового сопротивления для тела при проникании. Следует подчеркнуть, что при определении такой силы именно потеря прочности грунта играет определяющую роль, а не изменение его плотности, как это принято считать для воздушных сред [1–3]. Увеличение плотности грунта не всегда ведет к увеличению его прочности. Это становится очевидным, например, в случаях образования трещин, особенно больших размеров. Или при сравнении проникания сначала в замерший грунт, а затем в такой же, но уже размороженный. Здесь увеличение плотности ведет к уменьшению прочности и силы сопротивления со стороны размороженного грунта. Уменьшение прочности грунта связывается с силой удара через его начальную скорость, величина которой считается пропорциональна его силе [17–19]. Аналитически выражать силу лобового сопротивления в нелинейной зависимости от скорости проникания, с учетом ограничения по максимуму, и учитывать возможность частичной потери прочности грунта удалось при помощи аппроксимации Паде 1-й степени [17–19]. Новый вид силы лобового сопротивления позволил аналити-

чески находить связь между динамическими и статическими напряжениями грунтовой среды, а также для их предельных значений. До сих пор такая связь устанавливалась только эмпирическим путем. Начало проникания находится из условия, когда напряжения среды — динамическое предельно-допустимое и статическое, вызванное предельно-равновесным состоянием ударника, сравниваются друг с другом. Для преодоления недостатка стереомеханической теории Ньютона в отсутствие возможности определения самой величины силы удара вводится эталонный удар. Для этого сначала устанавливается минимальная начальная скорость удара, превышение которой ведет к погружению тела. Затем удар с такой начальной скоростью принимается как эталонный, разделяющий друг от друга эффективные и холостые удары. Введение эталонного удара позволяет находить ответы на ряд важных вопросов, на которые раньше ответы не находились. Так, например, определение начальной скорости проникания через разность начальных скоростей текущего и эталонного ударов — было сделано без нахождения величины их силы [17–19]. Это исправляет ранее допускавшуюся ошибку в нахождении начальной скорости проникания и позволяет отказаться от совмещения фазы удара с началом проникания. Такое совмещение раньше делалось только для того, чтобы избежать постановки вопроса о необходимости поиска начальной скорости проникания, просто приравнивая ее к начальной скорости удара [4–8; 20–23]. Существенно и то, что наконец-то удалось впервые выявлять среди текущих ударов холостые [17–19] — такие, когда сила удара еще не способна преодолеть сопротивление грунтовой среды, и проникание начаться не может. Такие случаи могут возникать, например, при слабых ударах или сверхпрочных грунтах, что в прежних моделях никак не предусматривалось. Ранее считалось, что каждый удар является эффективным и приводит к началу проникания тела в грунт [4–8; 20–23], что, на самом деле, далеко не так. Удивительно, но раньше на возникающие в результате удара трещины внимание не обращалось, несмотря на то, что они, как правило, визуальны, определяемы и влияют на прочность грунта. Именно наглядность, создаваемая возникающими трещинами, помогла автору в построении динамической модели [17–19] взаимодействия ударника с грунтовой средой, дающей основу новой теории. В новой редакции элементарной теории добавилась возможность учитывать упругие свойства верхнего слоя среды-преграды, что более подробно будет показано ниже на конкретных примерах. В элементарной теории проникания, как представляется, удалось найти ответы на все указанные выше вопросы.

**Сравнение элементарной теории проникания с существующими методами.** Используемые динамические модели взаимодействия ударника с грунтовой средой можно условно разбить на инженерные и ударно-волновые. Инженерная — это модель, которая описывает только движение ударника [20–22; 24–26]. Ударно-волновая модель, помимо описания движения ударника, учитывает возникающие волновые процессы в грунте. Под таковыми в дальнейшем будут подразумеваться прежде всего модели, созданные в рамках МЛВ [4–8]. Ударно-волновые модели обычно строятся

на основе инженерных и являются их уточнениями. Сам ударник в таких моделях обычно считается абсолютно твердым телом. Выбор инженерной модели, как уже указывалось, определяется видом квадратичной зависимости от скорости проникания для силы лобового сопротивления, действующей на ударник со стороны среды. Принято считать, что инженерная модель способна давать приемлемые результаты только при не столь сильных ударах, а ударно-волновая — при сильных [4–8]. Описание ударно-волновой модели заметно усложняется из-за необходимости поиска решений уравнений механики сплошной среды, что, как правило, невозможно делать без использования численных методов [4–8]. Заметим, что в новой элементарной теории проникания введенную динамическую модель следует отнести скорее к инженерным моделям. В ней нет необходимости устанавливать закон изменения плотности среды, а значит и описывать волновые явления. А потеря прочности, затухающей при удалении от места удара, определяется эмпирически подбором аналитической функции согласно экспериментальным данным. Такая функция, являясь ограниченно-нарастающей, показывает восстановление прочностных свойств при удалении от места контакта и принимается в качестве переменного коэффициента в аналитическом выражении (1) для силы лобового сопротивления [17–19].

Существующие публикации говорят о том, что до сих пор основное внимание уделялось именно ударно-волновым моделям [4–8], что вызвано сложностями математического описания волновых процессов. На инженерную модель обращать особого внимания было не принято, там, казалось, все просто и понятно. Однако, по мнению автора, такой подход не оправдал себя по двум причинам: в качестве модели реального грунта для ударно-волновой модели бралась малоприспособная для этого пластически сжимаемая среда (пластический газ) [4; 5], и из-за недостаточного внимания к выбору инженерной модели. Выявленные ошибки, в том числе и при выборе инженерной модели, сказались на результатах описания ударно-волновых моделей, причем очень сильно и не лучшим образом.

Заманчивая аналогия с воздушными средами и принятые за основу в МЛВ пластически сжимаемые среды [4; 5] обусловили то, что важнейшие свойства реальных грунтов были потеряны. Речь идет о прочностных свойствах и возможности появления трещин в твердых грунтах после нанесения удара. Взамен этого, предполагая сохранение целостности среды, основное внимание уделялось определению законов изменения ее плотности. А ведь возникающие трещины при ударе — и это неоспоримый факт! — нарушают условия неразрывности среды, а значит, и основания для применения уравнений механики сплошной среды, или требуют внесения изменений в граничные условия.

Инженерные модели тоже были несовершенны из-за используемой аналогии с воздушными средами при введении силы лобового сопротивления и некорректного использования стереомеханической теории удара при описании процесса проникания. В инженерных моделях к допущенным ошибкам следует отнести следующие:

1. Силу лобового сопротивления нужно искать не только в зависимости от скорости проникания, но и с учетом влияния разрушающего действия удара на прочность среды. При увеличении силы удара она должна уменьшаться вследствие потери прочности среды. Как уже отмечалось, именно потеря прочности, а не плотность среды, играет определяющую роль в нахождении силы лобового сопротивления со стороны твердых сред при ударе. Такая сила сопротивления, возрастающая при росте скорости проникания, должна иметь ограничение по максимуму. Иначе, без такого ограничения, при больших скоростях проникания могут получаться сверхвысокие расчетные напряжения грунта, многократно превышающие его предельно-допустимое значение [27; 28], и сверхвысокие расчетные температуры перегрева оголовка ударника [27; 28] — что в реальности не подтверждается и наблюдаться не может [28]. Раньше к таким сверхвысоким расчетным значениям могли приходиться практически всегда при моделировании начала погружения высокоскоростных прониканий. Ведь начальную скорость проникания было принято приравнять к начальной скорости удара, а она в таких случаях может достигать очень больших значений. Эти недостатки удается исправить, заменяя квадратичную зависимость силы лобового сопротивления от скорости проникания на аппроксимацию Паде 1-й степени [17–19]. Переход к такому новому виду силы сопротивления позволил также связывать потерю прочности среды с силой удара, точнее, с его начальной скоростью — ведь начальная скорость удара пропорциональна его силе.

2. Затухающее действие удара, проявляющееся восстановлением прочностных свойств по мере удаления от поверхности грунта, необходимо учитывать при нахождении силы лобового сопротивления — что ранее не делалось. Наиболее сильное разрушающее действие удара, а значит, и уменьшение сопротивляемости твердой среды должно проявляться в области контакта, а по мере удаления от этого места прочностные связи среды будут нарушаться уже в меньшей степени, предположительно, по затухающему закону. Об этом наглядно говорит визуальная картина возникающих трещин [23; 29], которые полностью исчезают при достаточном удалении от места удара. В элементарной теории на это обращается внимание, а затухание предлагается учитывать через ограниченно-нарастающую функцию, вид которой подбирается на основании опытных данных эмпирически. Эту функцию можно рассматривать как переменный коэффициент пропорциональности, который должен показывать возрастание силы лобового сопротивления по мере удаления от места удара. Для мягких грунтов затухающее действие удара, по-видимому, должно проявляться более заметно.

3. Не учитывалась упругая сила противодействия, которая возникает со стороны верхнего слоя грунта и может проявляться визуально при несильных ударах. А для модели среды в виде пластического газа такая возможность полностью исключается заложенными в нее свойствами.

4. Считалось, что всякий удар должен приводить к началу проникания ударника в грунт. Но такое для реальных грунтовых сред могло и не происходить,

например, при ударах малой силы. Столь упрощенный подход объясняется просто: стереомеханическая теория Ньютона не дает возможности определять силу ударов и их влияние на прочность среды. Указанный подход провоцирует начать моделирование процесса проникания ударника в грунт даже в тех случаях, когда в реальности такая возможность проникания исключается полностью.

5. Неверно выбранные начальные условия при описании процесса проникания: начальную скорость нельзя приравнять к начальной скорости удара. Это было бы равносильно совмещению фазы удара с началом процесса проникания, что тоже будет неправильно. Например, при холостых ударах это приводит к такому противоречию: слабый удар не может вызвать проникание, но начальная скорость проникания будет отлична от нуля — ведь она должна быть равна начальной скорости этого удара. Такой противоречивый результат моделирования раньше было трудно заметить, так как заранее не представлялось возможным определить, какой удар будет холостым, а какой — эффективным. Весьма существенно и то, что возникающие микро- и макротрещины в грунтовых средах [9; 29], как отмечалось, вызывают большие сомнения в корректности существующих ударно-волновых методов, причем не только для МЛВ. Наличие трещин нарушает необходимое условие применения уравнений механики сплошной среды — условие неразрывности. Если же пытаться использовать уравнения неразрывности корректно, отнеся влияние трещин на изменение вида граничных условий — то напрямую это сделать будет, скорее всего, невозможно. Ведь граничные условия грунтовой среды будут заранее неизвестны: число, форму и размеры трещин еще не научились определять заранее. Образование трещин вследствие нанесенного удара является очевидным фактом для твердых сред, а для мягких это тоже будет наблюдаться, хотя и в меньшей степени, после образования пробки уплотнения перед оголовком ударника. На образование такой пробки тратится часть начальной скорости удара (начальной энергии), механизм ее возникновения описан в работе [18]. Возникающая пробка в мягком грунте, кроме того, будет нарушать и однородность среды по плотности в области удара. Сказанное говорит о том, что принципиальная основа для применения уравнений сплошной среды, а значит, и для существующих ударно-волновых моделей подвергается большим сомнениям, если брать во внимание возникающие трещины. На появление трещин, как уже отмечалось, внимание раньше не обращалось.

Вышесказанное говорит о том, что новая элементарная теория выгодно отличается от прежних подходов. Об этом говорят и возможности элементарной теории объяснить ряд качественных моментов, которые до сих пор объяснений не находили. Например, то, что отдельный удар может являться холостым ударом, а серия таких ударов уже сможет привести к началу проникания тела [19], т. е. последний удар такой серии превращается в эффективный. Или даже просто объяснения того, что от одного удара определенной силы (начальной скорости) может возникнуть начало проникания, а от другого удара — нет. Ослабление бокового

трения по сравнению с расчетным тоже раньше не находило объяснений. Обращение внимания на возникающие трещины позволило получить наглядную интерпретацию в получении обоснований элементарной теории проникания.

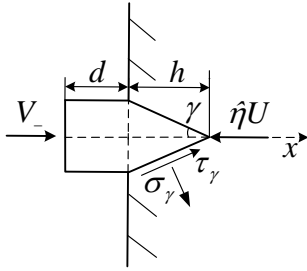
Существенно и то, что в элементарной теории удалось избежать использования уравнений механики сплошной среды для изучения волновых явлений, что заметно упрощает математическое описание процесса проникания в сравнении с ударно-волновыми методами. Тем более что в противном случае надо заранее, до нанесения удара, знать, как определяются размеры и форма трещин, их число и расположение — граничные условия для таких уравнений. А потеря прочности, затухающей при удалении от места удара, определяется, как уже указывалось, эмпирически. И сделать это будет гораздо проще в сравнении с вариантом поиска вида такой функции аналитически из уравнений механики сплошной среды. Для рассматриваемых задач утраченная роль плотности среды в пользу ее прочности для элементарной теории снимает ограничения на силу текущих ударов. Элементарная теория проникания будет применима и при сильных ударах. По крайней мере, таких, когда сила удара еще не способна в реальности повлиять на прочность или возникновение заметных деформаций у самого ударника. Здесь необходимо представлять реально допустимые границы принятой идеализации об абсолютно твердом теле для рассматриваемого ударника.

Элементарная теория отличается от вышеперечисленных методов не в каких-то частных вопросах, а на принципиальном уровне: в выборе динамической модели взаимодействия ударника с грунтовой средой, так и самой среды. Осуществлен отказ от аналогий с воздушными средами в пользу реальных свойств грунта как твердой среды, обладающей прочностью и возможностью частичной потери своей целостности. Элементарная теория хорошо согласована и с возможностями применения стереомеханической теории удара.

**Пример проникания в вертикально расположенную среду-преграду** (рис. 1). В этом и следующем примерах моделирование процесса проникания рассматривается в вертикально и горизонтально расположенные среды-преграды. Ударником является тело цилиндрической формы с острым коническим оголовком высотой  $h$  и углом полураствора  $\gamma$ ;  $d$  — длина цилиндрической хвостовой части, которую будем считать малой ( $d \ll 1$ ). На боковой поверхности конического оголовка будут возникать нормальные  $\sigma_\gamma$  и касательные  $\tau_\gamma$  напряжения;  $V_0$  — начальная скорость текущего удара ударника о среду-преграду (рис. 1). Считается, что упругие силы противодействия верхнего слоя среды значительно больше веса ударника, т. е.  $\hat{\eta}U \gg mg$ , действием которого в данном примере будем пренебрегать; здесь  $\hat{\eta}U$  — сила упругости;  $\hat{\eta}$  — жесткость

верхнего слоя;  $U = \frac{1}{3}S_0h$  — объем грунтовой среды, вытесненной оголовком;  $S_0 = \pi h^2 t g \gamma^2$  — площадь поперечного сечения хвостовой цилиндрической части

ударника. Начало координат оси  $x$  выбирается на глубине  $h$  от поверхности грунтовой среды (на вершине оголовка ударника перед началом проникания).



**Рис. 1.** Предельно-равновесное положение ударника перед началом проникания, когда  $\hat{\eta}U \gg mg$

Процесс проникания будем начинать описывать с такого положения, когда конусообразный оголовок ударника будет полностью погружен в грунт. В противном случае, при слабом ударе, может возникнуть малоинтересный случай проникания только лишь части оголовка. Тем самым принимается такое предельно-равновесное положение ударника, когда наконечник полностью находится в грунтовой среде (рис. 1), что должно предшествовать началу полноценного проникания. Для определения выполнения условия начала проникания необходимо, согласно элементарной теории, сравнить нормальные предельно-допустимые напряжения — динамическое  $\sigma_{d1}$  и статическое  $\sigma_{\pi/2}$ , возникающие в грунте за ударником в направлении предполагаемого погружения (оси  $x$ ) на площадках, перпендикулярных к этому направлению.

Заметим, что, согласно положениям стереомеханической теории Ньютона, время удара и перемещение тела за это время должны быть очень малыми величинами, что ставит под сомнение возможность достижения ударником в результате удара. Даже при не столь больших  $h$ . Тем не менее, такое можно допустить, исходя из того, что реальный грунт далеко не абсолютно твердое тело, а значит, время удара и перемещение тела за это время могут стать не столь малыми величинами, как это принято считать. В случаях, когда  $h$  велико, предельно-равновесное положение следует задавать так, чтобы конусообразный оголовок был погружен в грунт лишь частично. В рассматриваемых здесь примерах считается, что  $h$  невелико.

Сначала, из условия равновесия ударника и без учета действия удара на грунт, определим на наклонных площадках оголовка статическое нормальное напряжение:  $\sigma_\gamma = \frac{\hat{\eta}h}{3(1 + \mu_1 ctg\gamma)}$ . Здесь было принято во внимание, что  $\tau_\gamma = \mu_1 \sigma_\gamma$ , где  $\mu_1$  — предельное значение коэффициент трения покоя. Грунт за оголовком ударника будет сжиматься, и для его площадок, ориентированных под прямым углом к направлению проникания, статическое нормальное напряжение определится так:

$$\sigma_{\pi/2} = \frac{\hat{\eta}h}{3 \sin^2 \gamma (1 + \mu_1 ctg\gamma)}$$

Для определения динамического предельно-допустимого нормального напряжения следует учесть влияние удара на изменение прочности грунта. Согласно элементарной теории проникания, это можно сделать через силу лобового сопротивления, которая определяется по формуле (1). Перед началом проникания сила лобового сопротивления будет равна упругой силе противодействия со стороны верхнего слоя среды преграды:

$$F_c = \hat{\eta}U \Rightarrow F_0 \frac{1}{k} = \hat{\eta}U \Rightarrow F_0 = k\hat{\eta}U.$$

Здесь  $k = 1 + \frac{b}{\Delta} V_-$  — коэффициент динамичности, определяющий влияние удара на прочность грунта. После деления на площадь поперечного сечения  $S_{\pi/2}$  (основание конусообразного оголовка, равное поперечному сечению цилиндрической части ударника) записанное выше второе равенство можно представить через напряжения так:

$$\sigma - k \frac{\sigma}{k} = 0 \Rightarrow \sigma_d = \frac{\sigma}{k} \Rightarrow \sigma_{d1} = \frac{\sigma_1}{k_*}.$$

Здесь  $\sigma = \frac{\hat{\eta}U}{S_{\pi/2}}$  — статическое нормальное напряжение грунта, возникающее на площадках, перпендикулярных к направлению проникания тела;  $\sigma_1$  — предельное статическое нормальное напряжение для данного грунта, определяемое экспериментально;  $\sigma_d$ ;  $\sigma_{d1}$  — соответственно динамическое и предельно допустимое динамические напряжения, возникающие в грунте в результате произведенного удара. Предельно-равновесное состояние тела, которое предшествует началу проникания, определится из условия:

$$\sigma_{d1} = \sigma_{\pi/2},$$

что позволит определить критические значения начальной скорости удара и силы лобового сопротивления:

$$V_{-*} = \frac{\Delta}{b} \left[ \frac{3\sigma_1 \sin^2 \gamma (1 + \mu_1 ctg\gamma)}{\hat{\eta}h} - 1 \right],$$

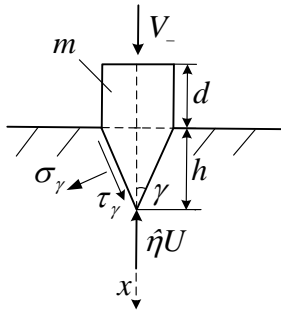
$$F_{*} = k_* \hat{\eta}U = \pi \sigma_1 h^2 \sin^2 \gamma tg^2 \gamma (1 + \mu_1 ctg\gamma),$$

где индекс-звездочка  $\langle * \rangle$  обозначает для соответствующих величин критические значения. Удар с критической начальной скоростью  $V_{-*}$  принимается за эталонный, который приводит к предельно-равновесному состоянию ударника после удара. Тем самым, удары с начальной скоростью  $V_- \leq V_{-*}$  будут холостыми, а при  $V_- > V_{-*}$  — эффективными, приводящими к прониканию с начальной скоростью  $\dot{x}_0 = V_- - V_{-*}$ . После начала проникания, когда противодействие верхнего упругого слоя грунта будет преодолено, для нижележащих слоев упругие силы считаются пренебрежимо малыми, и дифференциальное уравнение проникания для ударника запишется в таком виде:

$$m\ddot{x} = -\pi\sigma_1 h^2 \sin^2 \gamma t g^2 \gamma (1 + \mu_1 ct g \gamma) (2 - e^{-\alpha x}) \frac{\dot{x} + \Delta}{\dot{x} + bV_- + \Delta},$$

где силы трения бокового трения не принимались во внимание, ввиду того, что  $d \ll 1$ .

**Пример проникания в горизонтально расположенную среду-преграду** (рис. 2). В этом примере моделирования процесса проникания (рис. 2), в отличие от предыдущего, считается, что ударник обладает уже не столь малой массой  $m$ , но его вес все-таки уступает силе упругости верхнего слоя горизонтальной среды-преграды:  $mg < \hat{\eta}U$ . Данный случай очень похож на предыдущий, отличия заключаются только в учете веса ударника и расположении среды-преграды. Заметим, что аналогичный случай моделирования процесса, только без учета упругих сил, был приведен ранее в работе [18]. Приведем лишь основные моменты моделирования.



**Рис. 2.** Предельно-равновесное положение ударника перед началом проникания, когда  $\hat{\eta}U > mg$

Из условия равновесия ударника и без учета действия удара на грунт определим на наклонных площадках оголовка статическое напряжение:

$$\sigma_\gamma = \frac{\sigma_0(\eta U - 1)}{1 + \mu_1 ct g \gamma}. \text{ Здесь } \eta = \frac{\hat{\eta}}{mg} \text{ — приведенный коэффициент жесткости упругого верхнего слоя грунта;}$$

$\sigma_0 = \frac{mg}{S_{\pi/2}}$  — нормальное напряжение, возникающее в

грунте только под действием силы тяжести ударника, если бы оголовок был с плоским сечением, равным поперечному сечению цилиндрической части ударника. Под действием ударника с конусообразным оголовком на площадках грунта, ориентированных под прямым углом к направлению проникания, возникающее напряжение будет равно:

$$\sigma_{\pi/2} = \frac{\sigma_0(\eta U - 1)}{\sin^2 \gamma (1 + \mu_1 ct g \gamma)}.$$

Для определения динамического нормального напряжения рассмотрим равновесие ударника в предельно-равновесном положении, с учетом изменившейся прочности грунта под действием удара:

$$F_c = mg(\eta U - 1) \Rightarrow F_0 \frac{1}{k} = mg(\eta U - 1) \Rightarrow$$

$$F_0 = kmg(\eta U - 1).$$

После деления на площадь торцевого сечения  $S_{\pi/2}$ :

$$k \frac{\sigma}{k} = \sigma \Rightarrow \sigma_\delta = \frac{\sigma}{k} \Rightarrow \sigma_{\delta 1} = \frac{\sigma_1}{k_*}.$$

Здесь  $\sigma = \frac{mg(\eta U - 1)}{S_{\pi/2}}$  — статическое нормальное

напряжение грунта, возникающее под действием ударника при наличии упругих сил верхнего слоя грунта. Предельно-равновесное состояние тела, которое предшествует началу проникания, определится из условия:

$$\sigma_{\delta 1} = \sigma_{\pi/2},$$

что позволит определить критическое значение начальной скорости удара, который принимается за эталонный:

$$V_{-*} = \frac{\Delta}{b} \left[ \frac{n_1 \sin^2 \gamma (1 + \mu_1 ct g \gamma)}{\eta U - 1} - 1 \right],$$

и критическое значение силы лобового сопротивления:

$$F_{0*} = k_* mg(\hat{\eta}U - 1) = n_1 mg \sin^2 \gamma (1 + \mu_1 ct g \gamma),$$

где  $n_1 = \frac{\sigma_1}{\sigma_0}$  — запас прочности грунта под действием

силы тяжести данного ударника, если бы у него был не конусообразный оголовок, а плоский, как у цилиндрической хвостовой части. Удары при  $V_- \leq V_{-*}$  считаются холостыми, а при  $V_- > V_{-*}$  будут эффективными, приводящими к прониканию с начальной скоростью  $\dot{x}_0 = V_- - V_{-*}$ . Дифференциальное уравнение для этого случая проникания запишется так:

$$\ddot{x} = g - n_1 g \sin^2 \gamma (1 + \mu_1 ct g \gamma) (2 - e^{-\alpha x}) \frac{\dot{x} + \Delta}{\dot{x} + bV_- + \Delta},$$

где силы бокового трения также не принимались во внимание, так как  $d \ll 1$ .

Случай, когда  $mg > \hat{\eta}U$  здесь не рассматривается, т.к. случай, когда влияние силы тяжести ударника существенно, рассмотрен был ранее в работе [18].

**Заключение.** Для описания процессов проникания абсолютно твердого тела в грунтовые среды вновь созданная элементарная теория, по мнению автора, более реалистична в сравнении с другими методами — инженерными и ударно-волновыми, включая МЛВ. Как следует из содержания данной статьи и работ [17–19], такие различия свелись к следующему.

1) В выборе модели реального грунта:

- в элементарной теории это твердая среда, надежная прочностными свойствами;

- в инженерных методах модель среды не оговаривается, хотя силу сопротивления ищут по аналогии с воздушными, а для МЛВ — это пластический газ.

2) Об учете упругих свойств верхнего слоя грунта:

- в элементарной теории они учтены,
- в других методах упругие свойства не принимаются во внимание.

3) В выборе определяющих характеристик грунта:



- в элементарной теории это прочность, которая уменьшается при увеличении силы удара, и возможность потерять свою целостность в результате появления трещин;

- в других методах это плотность и способность сохранять свою целостность независимо от силы удара.

4) В определении силы лобового сопротивления со стороны грунта:

- в элементарной теории это нелинейная зависимость от скорости проникания первой степени, ограниченная по максимуму и учитывающая потерю прочности среды в зависимости от силы удара;

- в других методах это обычная квадратичная зависимость от скорости, не ограниченная по максимуму и зависящая от плотности среды; прочностная составляющая, если и вводится, то без учета влияния удара.

5) В описании волновых явлений, возникающих в грунте:

- в элементарной теории — необходимости в этом нет, что значительно упрощает математическое описание;

- в ударно-волновых методах, в частности в МЛВ, это делается в предположении сохранения целостности среды, а на возникающие трещины в реальных грунтах внимание не обращалось.

6) О затухании прочностных свойств среды под влиянием удара:

- в элементарной теории это учитывается на основании экспериментальных данных эмпирически, путем подбора аналитической функции;

- в других методах никак не учитывается.

7) В применении стереомеханической теории удара:

- в элементарной теории — преодолены ограничения стереомеханической теории благодаря сравнению текущих ударов с эталонным;

- в других методах — существующие ограничения стереомеханической теории приводят к количественным и качественным ошибкам моделирования.

8) В разделении фаз удара и начала проникания:

- в элементарной теории — фаза удара предшествует начальной фазе проникания, они отделены друг от друга во времени, а сам удар создает условия для начала проникания, уменьшая прочность среды;

- в других методах — фаза удара и начальная фаза проникания совмещены друг с другом лишь для того, чтобы избежать необходимости поиска начальной скорости проникания.

9) В определении начальной скорости проникания:

- в элементарной теории — она равна разности начальных скоростей текущего и эталонного ударов;

- в других методах — она равна начальной скорости текущего удара, что является ошибкой.

10) В разделении холостых и эффективных ударов:

- в элементарной теории — такое различие делается через сравнение текущего удара с эталонным;

- в других методах — считается, что всякий текущий удар приводит к началу проникания.

11) В диапазонах допустимых ударов:

- в элементарной теории — это удары, как малой, так и большой силы; главное, чтобы удар не приводил к заметным деформациям или разрушению реального ударника;

- в инженерных методах — удары малой силы, а в МЛВ — удары большой силы; правильность этих методов, как показано в данной статье, вызывают большие сомнения.

Все это говорит не в пользу существующих методов, в том числе и МЛВ. По мнению автора, элементарная теория проникания дает веские основания для пересмотра прежних принципов и подходов в вопросах моделирования процесса проникания абсолютно твердого тела в грунт, причем независимо от силы удара. Допущения, что грунтовые среды можно описывать по аналогии с пластической газовой средой при моделировании высокоскоростного проникания, как представляется автору, весьма сомнительны. Такое моделирование должно приводить к большим ошибкам.

### Литература

1. Resal H.A. Sur la penetration dun projectile dans les semi-fluides et les solides, C. R. Acad. Sci. Paris, 120, 1895, 397.
2. Poncelet J.V. Traite de mecanique industrielle. 2nd Edition. Bruges, J. Schiwell, 1844.
3. Euler L. Neue Grundsätze der Artillerie. Reprinted as Eulers Opera Omnia, Berlin, V.G. Teubner, 1922.
4. Сагомоян А.Я. Проникание. М.: Изд-во МГУ, 1974. 299 с.
5. Баженов В.Г., Котов В.Л. Математическое моделирование нестационарных процессов удара и проникания осесимметричных тел и идентификация свойств грунтовых сред. М.: Физматлит, 2011. 208 с.
6. Баженов В.Г., Брагов А.М., Константинов А.Ю., Котов В.Л. Сравнительный анализ методов моделирования проникания и плоскопараллельного движения конических ударников в грунтовой среде // Прикладная механика и техническая физика. 2015. Т. 56. № 3 (331). С. 44-54.
7. Баженов В.Г., Котов В.Л. Численно-аналитический метод исследования устойчивости движения тел вращения в мягких грунтовых средах // Прикладная математика и механика. 2017. Т. 81. Вып. 6. С. 688-698.
8. Линник Е.Ю. Оценка контактных напряжений при внедрении ударника в прочный грунт // Проблемы прочности и пластичности. 2020. Т. 82. № 1. С. 52-63.
9. Зукас Дж.А., Николас Т., Свифт Х.Ф. Динамика удара. М.: Мир, 1985. 286 с.
10. Теория оптимальных аэродинамических форм / под ред. А. Миеле. М.: Мир, 1969. 507 с.
11. Крайко А.Н., Пудовиков Д.Е., Якунина Г.Е. Теория аэродинамических форм, близких к оптимальным: моногр. М.: Янус-К, 2001. 132 с.
12. Якунина Г.Е. Особенности высокоскоростного движения тел в плотных средах // Прикладная математика и механика. 2012. Т. 76. Вып. 3. С. 429-449.
13. Forrestal M.J., Luk V.K. Dynamic spherical cavity-expansion in a compressible elastic-plastic solid // J. Appl. Mech. 1988. V. 55. № 2. P. 275-279.
14. Forrestal M.J., Tzou D.Y. A spherical cavity-expansion penetration model for concrete targets // Intern. J. Solids Structures. 1997. V. 34. P. 4127-4146.
15. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. Ballistic impact: recent advances in analytical modeling of plate penetration dynamics - A review // Appl. Mech. Rev. 2005. V. 58. P. 355-371.
16. Остапенко Н.А. Тела вращения минимального сопротивления при движении в плотных средах // Успехи механики. 2002. № 2. С. 105-149.
17. Корнатов В.А. Элементарная теория проникания ударника в твердые грунтовые среды при однократном ударе,

- с учетом возникающих трещин // Системы. Методы. Технологии. 2021. № 1 (49). С. 25-33.
18. Коронатов В.А. Дополнения к элементарной теории проникания твердого тела в грунтовые среды при однократном и многократном ударе // Системы Методы Технологии. 2021. № 2 (50). С. 42-50.
  19. Коронатов В.А. Моделирование погружения сваи и процесса уплотнения грунтовых сред при многократном ударе // Системы. Методы. Технологии. 2021. № 1 (49). С. 34-40.
  20. Велданов В.А., Марков В.А., Пусев В.И., Ручко А.М., Сотский М.Ю., Федоров С.В. Расчет проникания недеформируемых ударников в малопрочные преграды с использованием данных пьезоакселерометрии // Журнал технической физики. 2011. Т. 81. № 7. С. 94-104.
  21. Дубинский А.В. Формулы для расчета глубины проникания ударников различной формы в анизотропные преграды // Вестн. Пермского ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2020. № 3 (50). С. 34-40.
  22. Dubinsky A.V. Explicit formula for depth of penetration of cone-nosed impactor into anisotropic shields // Проблемы прочности и пластичности. 2020. Т. 82. № 1. С. 100-106.
  23. Бивин Ю.К., Симонов И.В. Механика динамического проникания в грунтовую среду // Изв. Рос. Акад. наук. Механика твердого тела. 2010. № 6. С. 157-191.
  24. Гольдсмит В. Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел. М.: Изд-во лит. по строительству, 1985. 448 с.
  25. Пановко Я.Г. Основы прикладной теории колебаний и удара. Л.: Машиностроение (Ленингр. отд-ние), 1976. 320 с.
  26. Тарасов В.Н., Бояркина И.В., Коваленко М.В. Теория удара в строительстве и машиностроении. М.: Изд-во АСВ, 2006. 336 с.
  27. Велданов В.А., Федоров С.В. Особенности поведения грунта на границе контакта с недеформируемым ударником при проникании // Прикладная механика и техническая физика. 2005. Т. 46. № 6 (274). С. 116-127.
  28. Allen W.A., Mayfield E.B. Morrison H.L. Dynamics of a projectile penetrating sand // J. Appl.Phys. 1957. V. 28. № 3. P. 370-376.
  29. Коняев А.А., Герасимов А.В., Платова Т.М., Пашков С.В. Экспериментально-теоретическое исследование проникания компактных и удлиненных ударников в мягкий и прочный грунт // Изв. высш. учеб. заведений. Физика. 2012. Т. 55. № 9/3. С. 60-66.
  9. Zukas Dzh.A., Nikolas T., Svift H.F. Dynamics of impact. M.: Mir, 1985. 286 p.
  10. Theory of optimal aerodynamic forms / pod red. A. Miele. M.: Mir, 1969. 507 p.
  11. Krajko A.N., Pudovikov D.E., YAKunina G.E. Theory of aerodynamic forms close to optimal: monogr. M.: YAnus-K, 2001. 132 p.
  12. YAKunina G.E. Features of high-speed motion of bodies in dense media // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2012. V. 76. Vyp. 3. P. 429-449.
  13. Forrestal M.J., Luk V.K. Dynamic spherical cavity-expansion in a compressible elastic-plastic solid // J. Appl. Mech. 1988. V. 55. № 2. P. 275-279.
  14. Forrestal M.J., Tzou D.Y. A spherical cavity-expansion penetration model for concrete targets // Intern. J. Solids Structures. 1997. V. 34. P. 4127-4146.
  15. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. Ballistic impact: recent advances in analytical modeling of plate penetration dynamics - A review // Appl. Mech. Rev. 2005. V. 58. P. 355-371.
  16. Ostapenko N.A. Bodies of revolution of minimum resistance when moving in dense media // Uspekhi mekhaniki. 2002. № 2. P. 105-149.
  17. Koronotov V.A. An elementary theory of the penetration of a striker into solid soil media with a single impact, taking into account the emerging cracks // Systems. Methods. Technologies. 2021. № 1 (49). P. 25-33.
  18. Koronotov V.A. Additions to the elementary theory of solid body penetration into soil media under single and multiple impact // Systems. Methods. Technologies. 2021. № 2 (50). P. 42-50.
  19. Koronotov V.A. Simulation of pile sinking and the process of compaction of soil media with multiple impact // Systems. Methods. Technologies. 2021. № 1 (49). P. 34-40.
  20. Veldanov V.A., Markov V.A., Pusev V.I., Ruchko A.M., Sotskij M.YU., Fedorov S.V. Calculation of the penetration of non-deformable strikers into low-strength obstacles using piezoaccelerometry data // Technical Physics. 2011. V. 81. № 7. P. 94-104.
  21. Dubinskij A.V. Formulas for calculating the depth of penetration of strikers of various shapes into anisotropic barriers // Bulletin of Perm state university. Mathematics. Mechanics. Information science. 2020. № 3 (50). P. 34-40.
  22. Dubinsky A.V. Explicit formula for depth of penetration of cone-nosed impactor into anisotropic shields // Problems of Strength and Plasticity. 2020. V. 82. № 1. P. 100-106.
  23. Bivin YU.K., Simonov I.V. Mechanics of dynamic penetration into the soil environment // Mechanics of Solids. 2010. № 6. P. 157-191.
  24. Gold'smit V. Impact. Theory and physical properties of colliding bodies. M.: Izd-vo lit. po stroitel'stvu, 1985. 448 p.
  25. Panovko YA.G. Foundations of the applied theory of vibrations and impact. L.: Mashinostroenie (Leningr. otd-nie), 1976. 320 p.
  26. Tarasov V.N., Boyarkina I.V., Kovalenko M.V. The theory of blow in construction and mechanical engineering. M.: Izd-vo ASV, 2006. 336 p.
  27. Veldanov V.A., Fedorov S.V. Peculiarities of soil behavior at the boundary of contact with a non-deformable striker during penetration // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2005. V. 46. № 6 (274). P. 116-127.
  28. Allen W.A., Mayfield E.B. Morrison H.L. Dynamics of a projectile penetrating sand // J. Appl.Phys. 1957. V. 28. № 3. P. 370-376.
  29. Konyayev A.A., Gerasimov A.V., Platova T.M., Pashkov S.V. Experimental and theoretical study of the penetration of compact and elongated strikers into soft and durable soil // Russian Physics Journal. 2012. V. 55. № 9/3. P. 60-66.

#### References

1. Resal H.A. Sur la penetration dun projectile dans les semi-fluides et les solides, C. R. Acad. Sci. Paris, 120, 1895, 397.
2. Poncelet J.V. Traite de mecanique industrielle. 2nd Edition. Bruges, J. Schiwell, 1844.
3. Euler L. Neue Grundsätze der Artillerie. Reprinted as Eulers Opera Omnia, Berlin, B.G. Teubner, 1922.
4. Sagomonyan A.YA. Penetration. M.: Izd-vo MGU, 1974. 299 p.
5. Bazhenov V.G., Kotov V.L. Mathematical modeling of non-stationary processes of impact and penetration of axisymmetric bodies and identification of properties of soil media. M.: Fizmatlit, 2011. 208 p.
6. Bazhenov V.G., Bragov A.M., Konstantinov A.YU., Kotov V.L. Comparative analysis of methods for modeling penetration and plane-parallel motion of conical strikers in a soil environment // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2015. V. 56. № 3 (331). P. 44-54.
7. Bazhenov V.G., Kotov V.L. A numerical-analytical method for studying the stability of the motion of bodies of revolution in soft soil media // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2017. V. 81. Vyp. 6. P. 688-698.
8. Linnik E.YU. Assessment of contact stresses during the penetration of a striker into a solid soil // Problems of Strength and Plasticity. 2020. V. 82. № 1. P. 52-63.