

## Дополнения к элементарной теории проникания твердого тела в грунтовые среды при однократном и многократном ударе

В.А. Коронатов

Братский государственный университет, ул. Макаренко, 40, Братск, Россия

kortavik@mail.ru

<https://orcid.org/0000-0002-1331-213X>

Статья поступила 08.05.2021, принята 17.05.2021

*Теория проникания ударника или сваи в грунт названа элементарной из-за упрощенного подхода в рамках стереомеханической теории удара, когда не учитываются волновые явления. Отличительной чертой данной теории является новый нелинейный вид для силы лобового сопротивления в зависимости от скорости проникания первой степени с учетом изменения прочности грунта в результате образования трещин, возникающих вследствие ударов. Мерой влияния ударов на грунт, приводящей к потере прочности, принимается произведение начальной скорости удара на их число. Выбранный аналитический вид для силы лобового сопротивления позволяет находить связь между динамическими и статическими напряжениями грунта без использования эмпирических соотношений. Это дает возможность определять критическую начальную скорость удара, превышение которой приводит к прониканию тела в грунт. Удар с такой критической скоростью принимается за эталонный, позволяющий путем сравнения его с текущим решать такие вопросы, где стереомеханическая теория Ньютона ответы не дает. Так, для текущего удара без нахождения его силы стало возможным предопределять, когда погружение тела в грунт может происходить, а когда нет, и находить начальную скорость проникания. Для ранее введенной гипотезы о распространении трещин дано уточнение: при ударах телом с плоским или не столь острым оголовком возникают трещины, близкие по величине как в направлении удара, так и в поперечных направлениях, а с острым наконечником в направлении удара образуется преобладающая трещина, влияние которой на изменение прочности грунта будет наиболее заметным. Для свай при виброударном воздействии дано объяснение уменьшению бокового трения в сравнении с расчетным. Приведены примеры моделирования проникания ударника с конусообразным наконечником и сваи с пирамидальным наконечником при виброударном воздействии. Элементарная теория проникания обобщена и для мягких грунтовых сред.*

**Ключевые слова:** ударник, свая, шпунт, грунт, проникание, погружение, многократный удар, забивка сваи, вибрационное погружение, виброударное погружение, теория удара, динамическое напряжение, лобовое сопротивление.

## Supplements to the elementary theory of solid body penetration into ground media with a single and multiple impact

V.A. Koronotov

Bratsk State University; 40, Makarenko St., Bratsk, Russia

kortavik@mail.ru

<https://orcid.org/0000-0002-1331-213X>

Received 08.05.2021, accepted 17.05.2021

*The theory of penetration of the drummer or pile in the soil is named elementary due to the simplified approach in the framework of the stereomechanical impact theory, when wave phenomena are not taken into account. A distinctive feature of this theory is a new non-linear view for the windscreen strength, depending on the speed of penetration of the first degree, taking into account the change in the strength of the soil as a result of the formation of cracks arising from the blows. The measure of the effect of blows on the ground, leading to loss of strength, the work of the initial speed of impact of their number is taken. The selected analytical view for the force of the windshield makes it possible to find a link between dynamic and static soil stresses without using empirical ratios. It allows determining the critical initial impact speed, the excess of which leads to the penetration of the body into the ground. The blow with such a critical speed, if compare it to the current blow, allows solving the problems to which the Newton stereomechanical theory does not give answers. So, for the current blow, without finding its strength, it is possible to predetermine when the immersion of the body into the ground can occur and find the initial speed of penetration. For the previously introduced hypothesis about the propagation of cracks, the correction is given: when the body with a flat or not very sharp head, cracks, close in magnitude, both in the direction of impact and in transverse directions, and with a sharp tip in the direction of the blow, the prevailing crack is formed. Its impact on changing the strength of the soil is more noticeable. For piles, exposed to a vibrational blow, an explanation is given for the reduction of lateral friction in comparison with the calculated one. Examples of modeling of penetration of the drummer with a cone-shaped tip and piles with a pyramidal tip with a vibrational exposure are given. Elementary penetration theory is generalized for soft soil media.*

**Keywords:** drummer; pile; sheet pile; ground; penetration; immersion; multiple impact; pile driving; vibration immersion; vibration impact immersion; impact theory; dynamic stress; drag.

**Введение.** Элементарная теория проникания (погружения) твердого тела в грунтовые среды при однократном [1] и многократном ударе [2] строится на основных допущениях стереомеханической теории Ньютона [3-5]. Под твердым телом подразумевается ударник, если речь идет об однократном ударе, или свая если обсуждается многократный удар. Эти тела считаются абсолютно твердыми, в отличие от упругопластического грунта, для которого учитываются прочностные свойства. Теория названа элементарной из-за пренебрежения волновыми процессами. В сравнении с классическим подходом [5-8], сила лобового сопротивления берется не как линейная комбинация скоростей первой, второй и нулевой степени, а в виде нелинейной зависимости от скорости первой степени [1]. Помимо этого, считается, что сила сопротивления зависит как от прочности грунта, так и от возможности ее изменения при силовом воздействии. Физическое обоснование такого подхода строится на следующих известных фактах [9-11]: в твердых грунтах при однократном или многократном ударе возникают микро- и макротрещины, а появление трещин говорит о нарушении связей и появлении пустот в грунте, что приводит к снижению его прочности. Мерой влияния ударов на грунт, приводящей к потере прочности, принимается произведение начальной скорости удара на их число. В случае многократности все удары предполагаются одинаковой силы. Введен эталонный удар, который определяется через критическую начальную скорость удара, превышение которой приводит к началу погружения ударника в грунт. А нахождение силы текущего удара заменяется сравнением его с эталонным ударом. Что дало возможность находить решения в таких вопросах, где стереомеханическая теория Ньютона ответы дать не может: предопределять для текущего удара, когда погружения тела в грунт может происходить, а когда нет, и находить начальную скорость проникания. Элементарная теория основана на следующей гипотезе: в результате нанесения ударов, однократного или многократного, на поверхности грунта возникают микро- и макротрещины, приводящие к потере его прочности и, как следствие, к уменьшению силы лобового сопротивления для тела проникания; размеры и число трещин уменьшаются по мере удаления от места произведенных ударов. Сказанное определяет главные отличия элементарной теории проникания от существующих подходов.

**Уточнение гипотезы о потере прочности грунта.** Различие в геометрии формы оголовка должно складываться и на направленности образования трещин при ударе. Поэтому для ранее введенной гипотезы о распространении трещин [1] следует сделать уточнение, отражающее влияние формы оголовка тела, а именно: при ударах телом с плоским или не столь острым оголовком возникают трещины, близкие по величине как в направлении удара, так и в поперечных направлениях, а с острым наконечником в направлении удара образуется преобладающая трещина, влияние которой на изменение прочности грунта будет наиболее заметным. Последнее будет близко к истине, когда острый оголовок тонкий, а грунт наделен определенной пластичностью.

В элементарной теории проникания потеря прочности грунта отражалась лишь при нахождении лобового сопротивления, а при определении бокового трения нет. Тем самым как бы предполагалось, что по направленности трещины образуются только в направлении удара, что никак не отражалось при нахождении бокового трения. Однако наблюдения говорят о том, что при вибрационном и виброударном погружении сваи боковое трение меньше [12] в сравнении с тем, что дают расчеты. Это явилось дополнительной причиной для сделанного обобщения ранее введенной гипотезы. Формула для нахождения бокового трения в случае ударов тел с не столь острым оголовком тоже должна учитывать изменение прочности и плотности грунта, что будет сделано ниже.

**О силах сопротивления со стороны грунтовых сред.** Различаются силы лобового сопротивления и бокового трения, действующие на тело проникания. Лобовое сопротивление – это сила, которая приложена к торцевому сечению (оголовку) тела, а боковое – это сила трения, приходящаяся на боковую поверхность тела.

Для силы лобового сопротивления  $F_c$  со стороны грунта для ударника и сваи были введены формулы [1] с необходимыми обоснованиями качественного характера, соответственно при однократном и многократном ударе совместно с вибрационной силой

$$F_c = F_0 \left( 2 - e^{-\alpha x} \right) \frac{\dot{x} + \Delta}{\dot{x} + bV_- + \Delta}; \quad (1)$$

$$F_c = F_0 \left( 2 - e^{-\alpha(x-x_0)} \right) \times \frac{\dot{x} + \Delta}{\dot{x} + b_1 R \omega^2 (t - t_0) + bV_- \left[ \frac{N}{T} (t - t_0) \right] + \Delta}; \quad (2)$$

Здесь  $F_0$  - максимальная сила лобового сопротивления, подлежащая определению в каждом конкретном случае;  $\omega$  - частота вибрационной силы;  $R$  - смещение центра масс дебаланса у вибровозбудителя;  $\frac{N}{T}$  - определяет целое число ударов  $N$  за известный промежуток времени  $T$ ;  $V_-$  - скорость тела в начале удара;  $q = \left[ \frac{N}{T} (t - t_0) \right]$  - определяет целое число произведенных ударов  $q$ , что соответствует целому числу выражения, записанного внутри квадратных скобок на текущий момент времени  $t$  при виброударном воздействии (для сваи при многократном ударе  $t_0$  - начальный момент такого воздействия: либо момент времени окончания очередного погружения перед кратковременной остановкой, либо нулевое значение, если погружение только начинается);  $b$  - коэффициент пропорциональности, определяемый экспериментально;  $x$  - координата углубления сваи; точкой  $\langle \cdot \rangle$  обозначается дифференцирование по времени  $t$ . Функциями  $2 - e^{-\alpha x}$  и  $2 - e^{-\alpha(x-x_0)}$  учитывается, что для нижеле-

жащих слоев от места удара уменьшение прочности грунта будет проявляться в меньшей степени, где  $\alpha$  - параметр, подбираемый из экспериментальных данных для данного грунта;  $x_0 = x(t_0)$  - начальная координата погружения.

Приведенные формулы (1) и (2) говорят о том, что для сил классического вида:  $F_c = AV^2 + BV + C$  - выражающие линейную зависимость от скорости  $V$  проникания второй, первой и нулевой степени были введены нелинейные зависимости:  $F_c = F_0 \frac{V + \Delta}{V + \Delta_1}$  - от скорости только первой степени. Здесь  $A, B, C, \Delta, \Delta_1$  - коэффициенты аппроксимации, причем необходимо для соблюдения прямой пропорциональной зависимости от скорости  $V$ , чтобы  $\Delta_1 > \Delta$ . Такой вид нелинейной зависимости впервые был введен автором для задач бурения [13-15], где надо было также учитывать потерю прочности грунта. Введение новой нелинейной зависимости для нахождения  $F_c$  в сравнении с классическим видом дает следующие преимущества:

1. Учитывать не только зависимость от скорости проникания, но и потерю прочности грунта вследствие произведенного удара, что при записи силы сопротивления в классическом виде было затруднительно.

2. Задавать силу более реалистично - она не бесконечно нарастающая функция от скорости, как это следует из классического вида, а имеет ограничение по максимуму через  $F_0$ . Это, в частности, дает возможность избегать возникновения противоречивых ситуаций, когда при больших скоростях проникания, согласно расчетам, должны возникать динамические напряжения, многократно превышающие предельно-допустимые напряжения грунта [16]. Может, опять же согласно расчетам, происходить чрезмерно сильный фрикционный нагрев оголовка ударника [16], значительно превышающий нагрев сопловой части реактивных двигателей. Такого, конечно же, не должно происходить, и эксперименты подтверждают это [17].

3. Выражать возникающие динамические напряжения грунта через статические, не прибегая к эмпирическим соотношениям, что ранее не удавалось делать.

4. Вводить эталонный удар, сравнение с которым позволяет избежать необходимости вычислять силу текущего удара.

5. Находить более точную аппроксимацию для реальной характеристики сил сопротивления, что в настоящее время принято делать через описание волновых явлений в грунте [18-20].

Сила бокового трения  $F_+$  для ударника или сваи определялась [2, 21] по формуле  $F_+ = f\tilde{a}x$ , где  $f$  - погонная сила трения, приходящаяся на единицу площади боковой поверхности, а  $\tilde{a}$  - периметр поперечного сечения у тела проникания. По аналогии с нахождением коэффициента сухого трения считалось, что

$$f = \begin{cases} [-f_1; f_1], npu \dot{x} \equiv 0; \\ f_0 npu \dot{x} > 0 (\varepsilon = f_1 / f_0 > 1), \end{cases} \quad (3)$$

где величина  $f_0$ , которая, как правило, принимается постоянной, хотя может и не быть таковой - все определяется законом изменения силы бокового давления грунта на ударник при проникании. Здесь увеличение площади боковой поверхности приводит к увеличению силы давления, а значит и силы трения, в том числе и при постоянном  $f_0$ . При обычном скольжении тела вдоль горизонтальной поверхности обычно это не так, так как сила давления на тело, как правило, постоянна. В предыдущих работах [2,21] при нахождении силы бокового трения автором утверждалось, что это делается по известной формуле Амонтона-Кулона. Но вид приведенной формулы  $F_+ = f\tilde{a}x$ , которая здесь также используется, не соответствует общепринятой форме записи закона о трении. Допущенная небрежность в сделанной формулировке в данной статье устраняется. Сама используемая формула для нахождения  $F_+$  не противоречит закону о трении, и ее применение в ранее рассмотренных работах как и в данной, будет уместно. При определении погонной силы трения при виброударном воздействии для тел с острым оголовком следует использовать формулу (3), а с не острым оголовком с учетом обобщенной гипотезы об образовании трещин - формулу

$$f = \frac{1}{k} \begin{cases} [-f_1; f_1], npu \dot{x} \equiv 0; \\ f_0 npu \dot{x} > 0 (\varepsilon = f_1 / f_0 > 1). \end{cases} \quad (4)$$

Здесь величина

$$k = \frac{b_1}{\Delta} R\omega^2(t-t_0) + \frac{b}{\Delta} V - \left[ \frac{N}{T}(t-t_0) \right] + 1, \text{ как будет пока-}$$

зано ниже, определяет коэффициент динамичности, определяющий виброударное воздействие сваи на грунт, он будет количественно характеризовать уменьшение бокового трения вследствие появления трещин;  $f_0$  будем считать постоянной величиной.

**Отличия элементарной теории от существующих подходов.** До сих пор было принято начало удара и проникания совмещать по времени [4, 18-20, 22-27], то есть они начинались одновременно и с одной и той же начальной скоростью [4, 18-20, 22-27], которая соответствовала начальной скорости удара. Этого не может быть: удар должен предшествовать началу погружения и создавать нужные условия для возникновения возможности проникания. Такие условия могут создаваться через уменьшение прочности грунта, вследствие образования микро- и макротрещин. А значит, проникание должно начинаться только после завершения удара и с начальной скоростью, отличной от начальной скорости удара. Уменьшение прочности грунта, вообще говоря, может и не достичь нужной величины, необходимой для начала проникания, из-за малой силы удара и высокой начальной прочности грунта. Стерео-

механическая теория удара и основанная на ней классическая теория проникания не дают возможности учесть указанное, в том числе и определение начальной скорости проникания, что, по-видимому, и служит причиной существующего упрощенного подхода. И этот подход нельзя назвать правильным.

Еще раз отметим отличия элементарной теории проникания от классической:

- в классической теории считается, что момент времени начала проникания тела в грунт совпадает с моментом нанесения удара, в элементарной теории – нет;
- в классической теории начальная скорость удара и проникания одна и та же, в элементарной теории – нет;
- в классической теории всякий удар приводит к началу проникания, в элементарной теории – не всякий.

Существенно, что элементарная теория проникания дает возможность рассматривать моделирование проникания ударника в грунт и погружения сваи с единых позиций. До сих пор эти очень похожие друг на друга задачи описывались, вообще говоря, по-разному, используя разные принципиальные основы: для свай вводились силы сухого трения при определении лобового сопротивления [12], а для ударника – классические зависимости от скорости проникания напрямую или косвенно через возникающие напряжения со стороны грунта [18-20, 22-25].

Заметим также, что ранее в работе автора [2] была введена гипотеза, что для мягких грунтов при воздействии на них не очень сильными ударами будет наблюдаться обратная картина – грунтовая среда не разрушается, а уплотняется путем ликвидации имеющихся пустот, то есть связи между отдельными частями будут укрепляться, а прочностные свойства возрастать. Для таких случаев при нахождении силы лобового сопротивления вместо формул (1) и (2) следует принять

$$F_c = F_0 \left( 1 + \frac{b_1}{\Delta_1} V_- \right); \quad (5)$$

$$F_c = F_0 \left( 1 + \frac{b_1}{\Delta_1} q V_- \right), \quad (6)$$

соответственно для однократного и многократного удара, где  $\Delta_1, b_1$  – коэффициенты аппроксимации.

**Проникание ударника с острым конусообразным наконечником в твердый грунт.** В качестве проникающего тела (рис. 1) – ударника, взят круглый цилиндр массы  $m$  с коническим острым оголовком высотой  $h$  и углом полураствора  $\gamma$ ;  $d$  – длина цилиндрической хвостовой части. На боковых поверхностях конического оголовка, ориентация которых определяется углом  $\gamma$ , будут возникать нормальные  $\sigma_\gamma$  и касательные напряжения  $\tau_\gamma$ .  $f$  – погонная сила бокового трения, определяющая силу трения, приходящуюся на единицу площади цилиндрической части ударника.

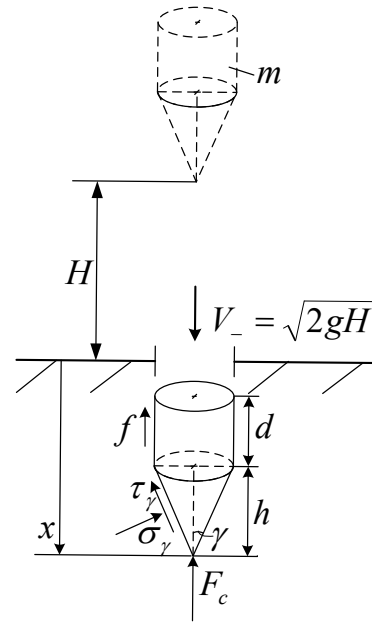


Рис. 1. Конусообразный ударник при однократном ударе

Для описания процесса проникания в рассматриваемом случае будем считать, что предельно-равновесное положение ударника определяется полным погружением острого конусообразного оголовка в преобладающую по размерам трещину, что согласуется с только что уточненной гипотезой о распространении трещин. Предположение об остром оголовке ударника означает, что изменение прочности грунта в поперечных направлениях несущественно и им можно пренебречь.

Примем во внимание, что на основании закона о трении  $\tau_\gamma = \mu \sigma_\gamma$ , где  $\mu$  – коэффициент трения, а  $\sigma_x = \sigma_\gamma \sin \gamma (1 + \mu \cot \gamma)$  определяют возникшее напряжение на конусообразном наконечнике в проекции на ось  $x$ ;  $\sigma_0 = \frac{mg}{\pi h^2 t g^2 \gamma}$  – нормальное напряжение, возникающее в грунте от силы тяжести ударника с плоским основанием, радиус которого соответствует радиусу хвостовой цилиндрической части. Из условия статического равновесия ударника конусного оголовка, когда он полностью погружен в грунт, и отсутствии удара следует, что

$$\sigma_\gamma = \frac{\sigma_0}{1 + \mu \cot \gamma} \Rightarrow \sigma_{\pi/2} = \frac{\sigma_0}{\sin^2 \gamma (1 + \mu \cot \gamma)},$$

где  $\sigma_{\pi/2}$  – нормальные напряжения в грунте для площадок, перпендикулярных к направлению оси  $x$ .

Для определения критической начальной скорости удара  $V_{-*}$  теперь рассмотрим предельно-равновесное состояние ударника сразу после удара (рис. 1), считая, что удар был недостаточной силы для начала проникания, то есть когда  $x \equiv h$ ,  $\dot{x} \equiv 0$  и начальная скорость удара меньше критической  $V_- < V_{-*}$ :

$$mg - F_0 \frac{\Delta}{b V_- + \Delta} = 0; \Rightarrow$$

$$mg - F_0 \frac{1}{k} = 0; \Rightarrow F_0 = kmg.$$

Здесь  $k = 1 + \frac{b}{\Delta} V_-$  - коэффициент динамичности, определяющий влияние удара на прочность грунта. Уравнение равновесия после деления на площадь торцевого сечения ( $S = \pi h^2 tg^2 \gamma$ ) примет вид

$$\sigma - k \frac{\sigma}{k} = 0 \Rightarrow \sigma_0 = \frac{\sigma}{k} \Rightarrow \sigma_{01} = \frac{\sigma_1}{k_*}.$$

Здесь  $\sigma = \frac{mg}{S}$  - статическое нормальное напряжение грунта, возникающее под действием силы тяжести ударника;  $\sigma_1$  - предельное статическое нормальное напряжение для данного грунта, определяемое экспериментально;  $\sigma_0$ ;  $\sigma_{01}$  - соответственно динамическое и предельно допустимое динамические напряжения, возникающие в грунте в результате произведенного удара;  $k_* = 1 + \frac{b}{\Delta} V_{-*}$  - критическое значение коэффициента динамичности. Предельно-равновесное состояние тела определится из условия

$$\sigma_{01} = \sigma,$$

где  $\sigma = \sigma_{\pi/2} = \frac{\sigma_0}{\sin^2 \gamma (1 + \mu ctg \gamma)}$ , что позволит определить критическое значение начальной скорости удара

$$V_{-*} = \frac{\Delta}{b} [n_1 \sin^2 \gamma (1 + \mu ctg \gamma) - 1],$$

где  $n_1 = \frac{\sigma_1}{\sigma_0}$  - запас прочности грунта, под действием силы тяжести данного ударника, если бы у него был не конусообразный оголовок, а - плоский, радиус которого соответствует радиусу хвостовой цилиндрической части. Удар с критической начальной скоростью  $V_{-*}$  принимается за эталонный, который приводит к предельно-равновесному состоянию ударника после удара, когда проникание не может начаться при отсутствии начальной скорости. Тем самым удары с начальной скоростью  $V_- \leq V_{-*}$  не будут приводить к началу погружения тела, а при  $V_- > V_{-*}$  следует ожидать проникание ударника в грунт с начальной скоростью  $V_0 = V_- - V_{-*}$ . Приведенная формула для нахождения начальной скорости проникания  $V_0$  была получена в [1] путем сравнения эталонного удара с текущим и с учетом теории Герца. Заметим, что начальную скорость можно было найти и без использования теории Герца чисто логически: разность между начальными скоростями текущего и эталонного ударов должна реализовываться в виде начальной скорости проникания тела в грунт, вследствие превышения порогового значения силы удара, необходимого для начала проникания.

Рассмотрим теперь случай, когда  $V_- \gg V_{-*}$ , то есть при ударе, превосходящем эталонный и тем самым

приводящем к прониканию тела в грунт. Силу бокового трения для ударника определяем по формуле  $F_+ = f \tilde{a} x$ , где  $f$  - погонная сила трения, которая для тел с острым оголовком находится согласно (3), а  $\tilde{a} = 2\pi h t g \gamma$ .

Обозначив через  $d, a$  соответственно длину и приведенный периметр ( $a = \tilde{a} / mg$ ) поперечного сечения хвостовой цилиндрической части ударника, запишем дифференциальное уравнение проникания ударника в грунт сначала до его полного погружения ( $h \leq x < d + h$ ):

$$\ddot{x} = g(1 - f_0 a x) - n_1 g \sin^2 \gamma (1 + \mu ctg \gamma) (2 - e^{-\alpha x}) \frac{\dot{x} + \Delta}{\dot{x} + b V_- + \Delta}, \quad (7)$$

а затем после ( $x \geq d + h$ ):

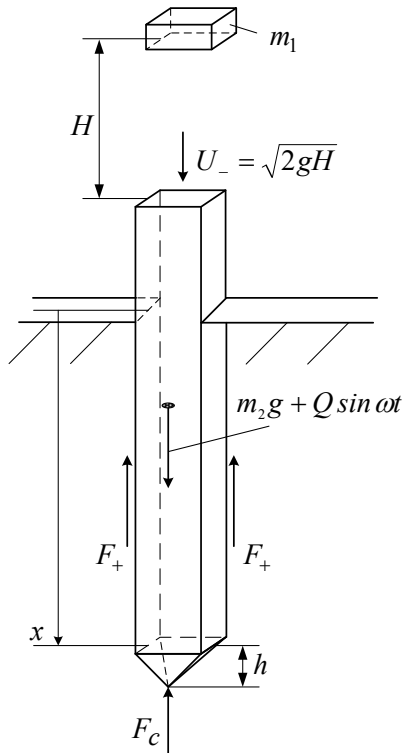
$$\ddot{x} = g(1 - f_0 a d) - n_1 g \sin^2 \gamma (1 + \mu ctg \gamma) (2 - e^{-\alpha x}) \frac{\dot{x} + \Delta}{\dot{x} + b V_- + \Delta}. \quad (8)$$

Здесь было учтено, что предельное значение для  $F_0$  определяется как  $F_{0*} = k_* mg = n_1 \sin^2 \gamma (1 + \mu ctg \gamma) mg$ .

Записанное дифференциальное уравнение (7), с начальными условиями:  $x_0 = h$ ;  $\dot{x}_0 = V_- - V_{-*}$  и уравнение (8) будут определять процесс проникания ударника в грунт при однократном ударе. Заметим, что при  $\gamma = \pi/2$  записанные уравнения движения ударника (7) и (8) будут соответствовать ранее полученным в [1] уравнениям движения ударника с плоским оголовком. Прежняя модель ударника, описанная в [1], является частным случаем рассматриваемого здесь случая.

**Моделирование процесса погружения сваи при виброударном воздействии.** Рассмотрим сваю с квадратным поперечным сечением и с оголовком, выполненном в виде правильной пирамиды (рис.2), высота которой  $h$ , а угол ее наклона к апофеме - высоте боковой грани, равен  $\gamma$ . Предполагается, что на сваю, кроме ее веса  $m_2 g$ , действует вибрационная сила  $Q \sin \omega t$  с постоянной частотой  $\omega$  и амплитудой  $Q = m_3 R \omega^2$ , где  $m_3, R$  - соответственно масса дебаланса (она включена в массу сваи) у вибровозбудителя и размер, определяющий смещение его центра масс. Кроме того, по верхнему торцевому сечению сваи наносятся многократные удары молотом массы  $m_1$  с одной и той же начальной скоростью  $U_-$  в моменты удара; частота таких ударов постоянна и равна  $\frac{N}{T}$ , а сами удары считаются абсолютно неупругими. Будем рассматривать наиболее простой случай, когда амплитуда вибрационного воздействия не превышает общий вес сваи с молотом, то есть когда  $Q < (m_2 + m_1) g$ . В этом случае кратковременные отрывы сваи от поверхности грунта исключаются. Начальная скорость удара сваи совместно с молотом определяется по формуле

$V_- = U_- \frac{m_1}{m_1 + m_2}$ , и для дальнейшего примем обозначение  $m = m_2 + m_1$ .



**Рис. 2.** Свая при виброударном воздействии

Со стороны грунта на сваю будут действовать сила лобового сопротивления  $F_c$ , которая при таком силовом воздействии определяется по формуле (2), и сила бокового трения  $F_+ = \tilde{a} f x$ , где  $\tilde{a} = 4htg\gamma$  - периметр поперечного сечения. Пирамидальный наконечник сваи естественно будем считать не столь острым, что означает, согласно выше принятой обобщенной гипотезе погонную силу трения  $f$  следует определять по формуле (4).

Как и в примере с ударником, будем считать, что начальное предельно-равновесное состояние сваи определяется полным погружением в грунт оголовка. На боковых гранях, ориентация которых определяется углом  $\gamma$ , будут возникать нормальные  $\sigma_\gamma$  и касательные напряжения  $\tau_\gamma$ . Предполагается, что виброударное воздействие для грунта данной прочности не столь велико, чтобы вызвать погружения сваи сразу, без предварительной обработки грунтовой среды. Случай безостановочного погружения сваи здесь не рассматривается. Как и в работе [2, 21], процесс погружения будем считать почти периодическим с последовательным повторением фаз упругого взаимодействия, во время которых грунтом теряются упругие и частично прочностные свойства, приводящие к кратковременным остановкам, и пластических деформаций, когда свая погружается в грунт. Окончание очередного погружения сваи будет говорить о том, что оголовок сваи перешел к очередному слою, где начальные прочностные свой-

ства грунта еще не нарушены, а для дальнейшего погружения необходима предварительная обработка этого слоя. Глубина слоя грунта, ослабленного виброударными силами, заранее неизвестна, она определяется в процессе моделирования через глубину очередного этапа погружения. С учетом сделанных замечаний и формул (2) и (4) опишем более подробно протикающие процессы.

1. Фаза упругого взаимодействия:

$$\dot{x} \equiv 0, f \in [-f_1; f_1]: \quad x_0 = \begin{cases} 0, & n\pi t = 0; \\ x_{**}, & n\pi t > 0; \end{cases}$$

$$t_0 = \begin{cases} 0, & n\pi x = 0; \\ t_{**}, & n\pi x > 0. \end{cases}$$

Здесь  $t_{**}, x_{**}$  - соответственно время и координата погружения в конце фазы пластических деформаций, если она уже состоялась, что может быть, если эта фаза упругого взаимодействия не самая первая. Свая удерживается силами сопротивления грунта, когда выполняется (рис. 1)

$$mg + m_3 R \omega^2 \sin \omega t - F_+ - F_c = 0 \Rightarrow$$

$$mg(1 + q \sin \omega t) - (F_0 + f a x_0) \frac{1}{k} = 0,$$

где  $k = \frac{b_1}{\Delta} R \omega^2 (t - t_0) + \frac{b}{\Delta} V_- \left[ \frac{N}{T} (t - t_0) \right] + 1$  - коэффициент динамичности, характеризующий влияние виброударного воздействия на прочность грунта. С учетом того что  $\sigma_x = \frac{F_c}{S_\gamma}$ , проводя аналогичные рассуждения,

какие были сделаны при описании проникания ударника, получим

$$\sigma_x = \sigma_0 \sin \gamma \left( 1 + q \sin \omega t - \frac{f a x_0}{k} \right);$$

$$\sigma_\gamma = \frac{\sigma_0 \sin \gamma \left( 1 + q \sin \omega t - \frac{f a x_0}{k} \right)}{1 + \mu c t g \gamma};$$

$$\sigma_{\pi/2} = \frac{\sigma_\gamma}{\sin^2 \gamma} = \frac{\sigma_0 \sin \gamma \left( 1 + q \sin \omega t - \frac{f a x_0}{k} \right)}{\sin^2 \gamma (1 + \mu c t g \gamma)};$$

где индексы  $x, \gamma$  и  $\pi/2$  означают соответственно направление оси и углы наклона выделяемых площадок грунта к направлению этой оси;

$$\sigma_0 = \frac{mg}{S_0}; S_0 = 4h^2 t g^2 \gamma; a = \frac{\hat{a}}{mg}; S_\gamma = \frac{S_0}{\sin \gamma}$$

- соответственно нормальное напряжение, создаваемое общим весом сваи и молота, площадь и приведенный периметр квадратного поперечного сечения сваи, площадь боковой поверхности пирамидального наконечника. Вводя динамическое и предельно-допустимое динамическое напряжения, возникающее в грунте

$$\sigma_d = \frac{\sigma}{k} \Rightarrow \sigma_{d1} = \frac{\sigma_1}{k_*},$$

получим условие для нахождения предельно-равновесного состояния сваи перед прониканием

$$\begin{cases} \frac{\sigma_1}{k_*} = \sigma_{\pi/2}; \\ f = f_1 \end{cases},$$

которое приводит к следующему уравнению:

$$n_1 \sin^2 \gamma (1 + \mu c t g \gamma) = k_* \left( 1 + q \sin \alpha t - \frac{f_1 a x_0}{k_*} \right) \quad (9)$$

для определения момента времени  $t_*$  начала проникания и нахождения критического значения коэффициента динамичности  $k_* = k|_{t=t_*}$ , а также для нахождения:

$$F_{0*} = n_1 m g \sin^2 \gamma (1 + \mu c t g \gamma); \text{ здесь } n_1 = \frac{\sigma_1}{\sigma_0} - \text{запас проч-$$

ности грунта от действия силы общей силы тяжести сваи с молотом с плоским оголовком. Уравнение (9) решается только численным методом.

При переходе к описанию погружения сваи – фазы пластических деформаций, следует вначале найти начальную скорость проникания  $V_0$ . Эта скорость, определяющая начальное условие для дифференциального уравнения проникания, находится аналогично тому, как это делалось в работе [2] через начальную критическую скорость удара  $V_{*}$ , превышение которой будет приводить к началу погружению сваи:

$$V_{*} = \frac{\Delta}{b \left[ \frac{N}{T} (t_* - t_0) \right]} \times \left( \frac{n_1 \sin^2 \gamma (1 + \mu c t g \gamma)}{1 + q \sin \alpha t_* - \frac{f_1 a x_0}{k_*}} - \frac{b_1}{\Delta} R \omega^2 (t_* - t_0) - 1 \right);$$

$$V_0 = V_- - V_{*}.$$

2. Фаза пластических деформаций (погружения):

$$\dot{x} > 0; \quad \dot{x}_0 = V_0; \quad f = f_0 = f_1 / \varepsilon.$$

С учетом сделанных выше замечаний о силах сопротивления дифференциальное уравнение движения сваи запишется так:

$$\ddot{x} = g \left( 1 + q \sin \alpha t - \frac{f_1 a x}{\varepsilon k} \right) - \frac{n_1 g \sin^2 \gamma (1 + \mu c t g \gamma) \left( 2 - e^{-\alpha(x-x_0)} \right) \times}{\dot{x} + \Delta} \quad (10)$$

$$\frac{\dot{x} + b_1 R \omega^2 (t_* - t_0) + b V_- \left[ \frac{N}{T} (t - t_0) \right] + \Delta}{\dot{x} + \Delta},$$

которое подразумевает нахождение решений только численными методами. Окончание погружения, а значит и первых двух фаз, нужно ожидать, когда  $\dot{x} = 0$ . В момент окончания погружения следует принять, что  $t_{**} = t$  и  $x_{**} = x$ , и перейти в начало описанного алгоритма.

Заметим, что полученные уравнения для сваи при  $\omega \equiv 0$  или  $V_- \equiv 0$  и  $\gamma \equiv 0$  будут соответствовать уравнениям, приведенным в работах [2, 21], при моделировании погружения сваи при многократном ударе и вибрационном воздействии, когда оголовок был плоским.

**О проникании в мягкие грунтовые среды.** Здесь необходимо принять следующие допущения:

1. мягкий грунт не может быть одинаковой мягкости (плотности) на всю глубину залегания;

2. нижележащие слои грунта уплотнены за счет статического давления, создаваемого вышележащими слоями;

3. с определенной глубины начинается грунт, который достиг своего предельного уплотнения.

Удар тела о мягкие грунтовые среды можно разделить на две фазы: фазу уплотнения, когда формируется подвижная пробка перед оголовком ударника, где грунт уплотняется, и фазы разуплотнения (разрушения), когда в сформированной пробке и, возможно, в нижележащих уплотненных слоях грунта образуются микро- и макротрещины, приводящие к возможности проникания. Для образования пробки оголовка тела должен быть плоским или не столь острым, а для возникновения возможности проникания тела прочность образовавшейся пробки должна достигнуть своего наибольшего значения для данного грунта. Иначе фаза уплотнения не закончится, а тело просто остановится вследствие сил сопротивления, без резкого изменения начальной скорости удара до нулевого значения, то есть сам удар в этом случае фактически не состоится. Образование подвижной пробки можно объяснить тем, что в своем движении ударник вовлекает близлежащие частицы грунта перед собой в движение в том же направлении, но с меньшей скоростью за счет существующих связей между этими частицами. Сила сопротивления  $F_c$  для фазы уплотнения определяется по формуле (5) или (6) в зависимости от того, однократный или многократный наносится удар, а для фазы разуплотнения – по формуле (1) или (2), как для твердых грунтов. Если обозначить через  $V_{**}, V_{*}$  - соответственно критические скорости необходимые для формирования пробки максимальной плотности и начала проникания тела через сформированную пробку, то начальную скорость проникания ударника в мягкие грунты следует производить по формуле  $V_0 = V_- - V_{**} - V_{*}$ . Нахождение скорости  $V_{**}$  показано в работе [2] для случая уплотнения грунта, а  $V_{*}$  определяется обычным образом, как в случае твердых грунтов. Учтено также, что разность  $V_- - V_{**}$  идет на создание подвижной пробки уплотнения, а оставшаяся скорость – на разуплотнение пробки и начальную скорость, если проникание станет возможным. Формула для определения  $V_0$  говорит о том, что удар с прониканием в мягкие грунты возможен только когда  $V_- > V_{**} + V_{*}$ , в противном случае резкого уменьшения скорости тела не произойдет и удара как такового не будет, будет лишь замедленное движение тела в мягком грунте. Для получения наглядности описанной здесь теории автор проводил наблюдения за проника-

нием обычного снежка и других тел в мягкий, слегка увлажненный сугроб снега, что было доступно весной, на момент написания данной статьи.

### Заключение

Элементарная теория проникания и дополнения к ней, позволяют:

1. Силу лобового сопротивления выражать в нелинейном виде от скорости проникания первой степени и в обратно-пропорциональной зависимости от кинематических параметров, определяющих влияние силового воздействия на грунт для снижения его прочности.

2. Приспособить теорию стереомеханического удара Ньютона для рассматриваемых задач, не выходя за рамки принятых допущений этой теории.

3. Упростить принимаемые динамические модели и тем самым облегчить моделирование процессов проникания тела в грунт с одновременным улучшением понимания физики происходящих процессов.

### Литература

1. Коронатов В.А. Элементарная теория проникания ударника в твердые грунтовые среды при однократном ударе, с учетом возникающих трещин // Системы Методы Технологии. 2021. № 1 (49). С. 25-33.
2. Коронатов В.А. Моделирование погружения сваи и процесса уплотнения грунтовых сред при многократном ударе // Системы Методы Технологии. 2021. № 1 (49). С. 34-40.
3. Пановко Я.Г. Основы прикладной теории колебаний и удара. Л.: Машиностроение (Ленингр. отд-ние), 1976. 320 с.
4. Тарасов В.Н., Бояркина И.В., Коваленко М.В. Теория удара в строительстве и машиностроении. М.: Изд-во АСВ, 2006. 336 с.
5. Гольдсмит В. Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел. М.: Изд-во лит-ры по строительству, 1985. 448 с.
6. Сагомоян А.Я. Проникание. М.: Изд-во МГУ, 1974. 299 с.
7. Euler L. Neue Grundsätze der Artillerie. Reprinted as Eulers Opera Omnia, Berlin, B.G. Teubner, 1922.
8. Resal H.A. Sur la penetration dun projectile dans les semi-fluides et les solides, C.R. Acad. Sci. Paris, 120, 1895, 397.
9. Зукас Дж.А., Николас Т., Свифт Х.Ф. Динамика удара. М.: Мир, 1985. 286 с.
10. Коняев А.А., Герасимов А.В., Платова Т.М., Пашков С.В. Экспериментально-теоретическое исследование проникания компактных и удлиненных ударников в мягкий и прочный грунт // Изв. высш. учеб. заведений. Физика. 2012. Т. 55. № 9/3. С. 60-66.
11. Бивин Ю.К., Симонов И.В. Механика динамического проникания в грунтовую среду // Изв. Рос. Академии наук. Механика твердого тела. 2010. № 6. С. 157-191.
12. Блехман И.И. Вибрационная техника. М.: Физматлит, 1994. 400 с.
13. Коронатов В.А. Начала построения строгой теории бурения // Системы Методы Технологии. 2016. № 4 (32). С. 83-94.
14. Коронатов В.А. Основы строгой теории глубокого бурения // Системы Методы Технологии. 2020. № 2 (46). С. 23-29.
15. Коронатов В.А. Элементы строгой теории бурения // Математика, ее приложения и математическое образование (МПМО 17): материалы VI Междунар. конф. (26 июня 2017 г.). Улан-Удэ, 2017. С. 221-226.
16. Велданов В.А., Федоров С.В. Особенности поведения грунта на границе контакта с недеформируемым ударником при проникании // Прикладная механика и техническая физика. 2005. Т. 46. № 6 (274). С. 116-127.
17. Allen W.A., Mayfield E.B. Morrison H.L. Dynamics of a projectile penetrating sand // J. Appl. Phys. 1957. V. 28. № 3. P. 370-376.
18. Баженов В.Г., Котов В.Л. Математическое моделирование нестационарных процессов удара и проникания осесимметричных тел и идентификация свойств грунтовых сред. М.: Физматлит, 2011. 208 с.
19. Баженов В.Г., Брагов А.М., Константинов А.Ю., Котов В.Л. Сравнительный анализ методов моделирования проникания и плоскопараллельного движения конических ударников в грунтовой среде // Прикладная механика и техническая физика. 2015. Т. 56. № 3 (331). С. 44-54.
20. Линник Е.Ю. Оценка контактных напряжений при внедрении ударника в прочный грунт // Проблемы прочности и пластичности. 2020. Т. 82. № 1. С. 52-63.
21. Коронатов В.А., Герасимов С.Н., Дудина И.В. Теория погружения сваи в грунт при продольно-вибрационном воздействии // Системы Методы Технологии. 2020. № 4 (48). С. 26-31.
22. Дубинский А.В. Формулы для расчета глубины проникания ударников различной формы в анизотропные преграды // Вестн. Пермского ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2020. № 3 (50). С. 34-40.
23. Dubinsky A.V. Explicit formula for depth of penetration of cone-nosed impactor into anisotropic shields // Проблемы прочности и пластичности. 2020. Т. 82. № 1. С. 100-106.
24. Дубинский А.В. Обзор некоторых нетрадиционных приложений инженерной теории высокоскоростного проникания // Вестн. Пермского нац. исслед. политехнического ун-та. Механика. 2019. № 3. С. 125-139.
25. Велданов В.А., Марков В.А., Пусев В.И., Ручко А.М., Сотский М.Ю., Федоров С.В. Расчет проникания недеформируемых ударников в малопрочные преграды с использованием данных пьезоакселерометрии // Журнал технической физики. 2011. Т. 81. № 7. С. 94-104.
26. Аптуков В.Н., Фонарев А.В. Приближенная оценка глубины проникания сваи в грунт при многократном ударе // Вестн. Пермского ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2010. Вып. 2 (2). С. 41-45.
27. Цейтлин М.Г., Верстов В.В., Азбель Г.Г. Вибрационная техника и технология в свайных и буровых работах. Л.: Стройиздат (Ленингр. отд-ние), 1987. 263 с.



## References

1. Koronotov V.A. An elementary theory of the penetration of a striker into solid soil media with a single impact, taking into account the emerging cracks // *Systems Methods Technologies*. 2021. № 1 (49). P. 25-33.
2. Koronotov V.A. Simulation of pile sinking and the process of compaction of soil media with multiple impact // *Systems Methods Technologies*. 2021. № 1 (49). P. 34-40.
3. Panovko YA.G. Foundations of the applied theory of vibrations and impact. L.: Mashinostroenie (Leningr. otd-nie), 1976. 320 p.
4. Tarasov V.N., Boyarkina I.V., Kovalenko M.V. The theory of blow in construction and mechanical engineering. M.: Izd-vo ASV, 2006. 336 p.
5. Gol'dsmit V. Blow. Theory and physical properties of colliding bodies. M.: Izd-vo lit-ry po stroitel'stvu, 1985. 448 p.
6. Sagomyan A.YA. Penetration. M.: Izd-vo MGU, 1974. 299 p.
7. Euler L. Neue Grundsätze der Artillerie. Reprinted as *Eulers Opera Omnia*, Berlin, B.G. Teubner, 1922.
8. Resal H.A. Sur la penetration dun projectile dans les semi-fluides et les solides, C.R. Acad. Sci. Paris, 120, 1895, 397.
9. Zukas Dzh.A., Nikolas T., Swift H.F. Dynamics of impact. M.: Mir, 1985. 286 p.
10. Konyaev A.A., Gerasimov A.V., Platova T.M., Pashkov S.V. Experimental and theoretical study of the penetration of compact and elongated strikers into soft and durable soil // *Russian Physics Journal*. 2012. V. 55. № 9/3. P. 60-66.
11. Bivin YU.K., Simonov I.V. Mechanics of dynamic penetration into the soil environment // *Mechanics of Solids*. 2010. № 6. P. 157-191.
12. Blekhman I.I. Vibration technology. M.: Fizmatlit, 1994. 400 p.
13. Koronotov V.A. Beginning of constructing a rigorous theory of drilling // *Systems Methods Technologies*. 2016. № 4 (32). P. 83-94.
14. Koronotov V.A. Fundamentals of the rigorous theory of deep drilling // *Systems Methods Technologies*. 2020. № 2 (46). P. 23-29.
15. Koronotov V.A. Elements of a rigorous drilling theory // *Matematika, ee prilozheniya i matematicheskoe obrazovanie (MPMO 17): materialy VI Mezhdunar. konf. (26 iyunya 2017 g.)*. Ulan-Ude, 2017. P. 221-226.
16. Veldanov V.A., Fedorov S.V. Peculiarities of soil behavior at the boundary of contact with a non-deformable striker during penetration // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2005. V. 46. № 6 (274). P. 116-127.
17. Allen W.A., Mayfield E.B. Morrison H.L. Dynamics of a projectile penetrating sand // *J. Appl.Phys.* 1957. V. 28. № 3. P. 370-376.
18. Bazhenov V.G., Kotov V.L. Mathematical modeling of non-stationary processes of impact and penetration of axisymmetric bodies and identification of properties of soil media M.: Fizmatlit, 2011. 208 p.
19. Bazhenov V.G., Bragov A.M., Konstantinov A.YU., Kotov V.L. Comparative analysis of methods for modeling penetration and plane-parallel motion of conical strikers in a soil medium // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2015. V. 56. № 3 (331). P. 44-54.
20. Linnik E.YU. Assessment of contact stresses during the penetration of a striker into a solid soil // *Problems of strength and plasticity*. 2020. V. 82. № 1. P. 52-63.
21. Koronotov V.A., Gerasimov S.N., Dudina I.V. The theory of pile immersion in soil under longitudinal vibration action // *Systems Methods Technologies*. 2020. № 4 (48). P. 26-31.
22. Dubinskij A.V. Formulas for calculating the depth of penetration of strikers of various shapes into anisotropic barriers // *Bulletin of Perm state university. Mathematics. Mechanics. Information science*. 2020. № 3 (50). P. 34-40.
23. Dubinsky A.V. Explicit formula for depth of penetration of cone-nosed impactor into anisotropic shields // *Problems of strength and plasticity*. 2020. V. 82. № 1. P. 100-106.
24. Dubinskij A.V. Review of some unconventional applications of the engineering theory of high-speed penetration // *Bulletin of the Perm National Research Polytechnic University. Mechanics*. 2019. № 3. P. 125-139.
25. Veldanov V.A., Markov V.A., Pusev V.I., Ruchko A.M., Sotskij M.YU., Fedorov S.V. Calculation of penetration of non-deformable strikers into low-strength obstacles using piezoaccelerometry data // *Journal of technical physics*. 2011. V. 81. № 7. P. 94-104.
26. Aptukov V.N., Fonarev A.V. An approximate estimate of the depth of pile penetration into the ground under multiple impacts // *Bulletin of Perm state university. Mathematics. Mechanics. Information science*. 2010. Vyp. 2 (2). P. 41-45.
27. Cejtlin M.G., Verstov V.V., Azbel' G.G. Vibration equipment and technology in piling and drilling operations. L.: Strojizdat (Lenigr. otd-nie), 1987. 263 p.