УДК 536.24

DOI:10.18324/2077-5415-2021-1-55-58

Приближенный метод определения суммы некоторых бесконечных рядов

Ю.В. Видин[1], В.С. Злобин[1], А.А. Федяев[2]

[1]Сибирский федеральный университет, пр. Свободный, 79, Красноярск, Россия
[2]Братский государственный университет, ул. Макаренко, 40, Братск, Россия
[a]vidinsfu@mail.ru, [b]zlobinsfu@mail.ru, [c]vends1@mail.ru
[a]https://orcid.org/0000-0002-3777-6676; [b]https://orcid.org/0000-0002-4281-3857;
[c]https://orcid.org/0000-0001-6233-3757
Статья поступила 05.02.2021, принята 20.02.2021

Изучение тепловых процессов в технических устройствах является одним из основных направлений современных научных исследований. Практически все процессы энергетической, химической и других отраслей промышленности связаны с распространением тепла и, следовательно, с определением распределения температуры в материалах и элементах конструкций. Аналитическое решение таких задач получают в виде бесконечных рядов, сходимость которых зачастую бывает слишком медленной. Такая форма решения не может быть использована для практических расчетов именно из-за сложности суммирования рядов и вычисления их отдельных слагаемых, т.к. на каждом шаге вычислений требуется дополнительно решать характеристическое уравнение и определять собственные числа. В настоящее время аналитическими методами в форме рядов получено огромное количество решений практически важных теплофизических задач. Но их доступность в качестве аппарата инженерных теплофизических расчетов в значительной мере ограничена именно свойствами медленносходящихся рядов. В статье представлен метод, позволяющий существенно улучшить сходимость таких рядов. Для этого используются родственные, но значительно более быстросходящиеся ряды, а также особенности поведения собственных чисел характеристических уравнений.

Ключевые слова: тепловые процессы, теплофизические задачи, аналитическое решение, бесконечные ряды, функции Бесселя, собственные числа.

Approximate method for determining the amount some infinite rows

Yu. V. Vidin[1], V. S. Zlobin[1], A. A. Fedyaev[2]

[1]Siberian federal University, пр. Свободный, 79, Красноярск, Россия
[2]Bratsk state University, ул. Макаренко, 40, Братск, Россия
[a]vidinsfu@mail.ru, [b]zlobinsfu@mail.ru, [c]vends1@mail.ru
[a]https://orcid.org/0000-0002-3777-6676; [b]https://orcid.org/0000-0002-4281-3857;
[c]https://orcid.org/0000-0001-6233-3757
Received 05.02.2021, accepted 20.02.2021

The study of thermal processes in technical devices is one of the main directions of modern scientific research. Almost all processes in the energy, chemical and other industries are associated with the spread of heat and, consequently, with the determination of the temperature distribution in materials and structural elements. The analytical solution of such problems is obtained in the form of infinite series, the convergence of which is often too slow. This kind of solution cannot be used for practical calculations precisely because of the complexity of summing the series and calculating their individual terms, since at each step of the calculations, it is required to additionally solve the characteristic equation and determine the eigenvalues. At present, a huge number of solutions of practically important thermophysical problems have been obtained by analytical methods in the form of series. But, their availability as an apparatus for engineering thermophysical calculations is largely limited precisely by the properties of slowly converging series. The article presents a method for significantly improving the convergence of such series. Here much more rapidly converging series are used, as well as features of the behavior of the eigenvalues of the characteristic equations.

Keywords: thermal processes; thermophysical problems; analytical solution; infinite series; Bessel functions; eigenvalues.

Введение. С вопросами теплопроводности тел, в том числе и многослойных, в инженерной практике приходится встречаться весьма часто. Приведем лишь несколько примеров. Так при проектировании теплозащиты современного летательного аппарата появляется необходимость в исследовании температурного режима сопряженной конструкции. Аналогичная задача возникает при изучении теплопоглощения кладкой металлургических печей. Нужно отметить, что при этом тепловой поток на поверхности такой системы обычно связан с температурой этой поверхности нелинейными зависимостями [6,7].

В настоящее время аналитическая теория теплопроводности располагает большим количеством методов решения разнообразнейших задач, встречающихся в инженерной практике. Причем число их продолжает быстро увеличиваться в связи с общим ускорением научных исследований.

Значительные успехи в развитии методов численного интегрирования отнюдь не преуменьшают важности поисков новых приближенных аналитических способов решения задач теплопроводности, а даже наоборот, создают благоприятные предпосылки для их создания. Достоинством любого приближенного аналитического метода, наряду с его простотой, служит точность. Это качество приближенных аналитических методов и удается наиболее полно выявить с помощью численных приемов интегрирования. Методы численного анализа также позволяют учитывать многие факторы, в частности, переменность физических свойств среды, наличие скрытой теплоты фазовых превращений, нелинейность и несимметричность граничных условий и др. [6].

При проведении исследований многих теплофизических задач приходится использовать аналитические решения в виде бесконечных рядов [1–5]. Анализ литературных источников показал, что решение основных задач теплопроводности представлено в виде ряда по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля. Такая форма решения не всегда удобна для использования практических расчетов из-за медленной сходимости рядов и сложности расчета его слагаемых. Для получения заданной точности решения требуется учитывать значительное число членов ряда, что зачастую просто невозможно. Особенно явно это проявляется при расчетах процессов в начальный период времени, соответствующий малым значениям числа Фурье, когда для получения результата требуется учитывать большое число слагаемых ряда.

Следует заметить, что в некоторых случаях, например при быстропротекающих тепловых процессах, сходимость функциональных сумм, входящих в решения рассматриваемых задач, также оказывается слишком медленной, что существенно затрудняет их использование в инженерной практике [6,7]. В данном случае важное значение приобретают методы улучшающие сходимость таких рядов. Также могут быть случаи, когда сходимость одного ряда удается значительно усилить за счет родственного, но более быстро решаемого [8–10].

Суммирование рядов. Несмотря на сложности использования рядов в качестве решения задач нестационарной теплопроводности, они обладают несомненными ценными свойствами, в частности, позволяют определить влияние отдельных параметров как на общее решение тепловой задачи, так и на кинетику развития самого процесса нагрева (или охлаждения). Большинство задач нестационарного теплообмена в настоящее время решается численными методами с применением различных специализированных пакетов программ. Однако оценка точности и достоверности получаемого решения производится, как правило, с помощью аналитического решения некоторой модельной задачи, достаточно близкой к исходной постановке.

В настоящее время аналитическими методами получено огромное количество решений теплофизических задач, имеющих важное практическое значение. Подавляющее их количество представлено в форме рядов. Именно поэтому важной практической задачей является сделать этот банк решений более доступным для использования в повседневной инженерной практике, а также расширить спектр решаемых теплофизических задач, где основной трудностью является суммирование бесконечных рядов. Продемонстрируем предлагаемую идею на конкретном примере.

При исследовании задачи нестационарной теплопроводности цилиндрического тела при действии на его поверхности заданного теплового потока, т.е. при граничных условиях второго рода приходится использовать бесконечный ряд вида [1,4,6]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2}\,, \tag{1}$$

где собственные числа μ_n являются корнями характеристического уравнения

$$J_1(\mu) = 0\,. \tag{2}$$

Здесь $J_1(\mu)$ - нечетная функция Бесселя первого рода первого порядка [11–14]. Она имеет бесчисленное множество корней. Первые десять корней зависимости (2) приведены, в частности, в широко известной монографии А.В. Лыкова [1] и они воспроизведены в табл.1 данной статьи. Следует отметить, что при больших значениях порядкового номера n разность $\mu_{n+1} - \mu_n$ близка к π.

Таблица 1. Первые десять корней характеристического уравнения $J_1(\mu) = 0$

n	$J_1(\mu)=0$	n	$J_1(\mu)=0$
1	3,831705970210	6	19,615858510500
2	7,015586669820	7	22,760084380600
3	10,173468135100	8	25,903672087600
4	13,323691936300	9	29,046828534900
5	16,470630050900	10	32,189679911000

Из анализа данной таблицы видно, что шаг изменений μ_n при различных значениях номера n разный. Однако, при больших значениях номера n этот шаг стабилизируется и приближается к величине π. В табл. 2 приведены значения μ_n для номеров n равных 41–50.

Таблица 2. Корни характеристического уравнения $J_1(\mu) = 0$ μ_{41-50}

n	$J_1(\mu)=0$	n	$J_1(\mu)=0$
41	129,5878032450	46	145,2960793450
42	132,7294643880	47	148,4377266200
43	135,8711223650	48	151,5793716310
44	139,0127773890	49	154,7210145160
45	142,1544296560	50	157,8626554020

Вычислим разность табличных значений $\mu_{n+1} - \mu_n$.

$$\mu_{42} - \mu_{41} = 132{,}7295 - 129{,}5878 = 3{,}1417$$
$$\mu_{43} - \mu_{42} = 135{,}8711 - 132{,}7295 = 3{,}1416$$
$$\mu_{44} - \mu_{43} = 139{,}0128 - 135{,}8711 = 3{,}1417$$
$$\mu_{45} - \mu_{44} = 142{,}1544 - 139{,}0128 = 3{,}1416$$
$$\mu_{46} - \mu_{45} = 145{,}2961 - 142{,}1544 = 3{,}1417$$
$$\mu_{47} - \mu_{46} = 148{,}4377 - 145{,}2961 = 3{,}1416$$
$$\mu_{48} - \mu_{47} = 151{,}5794 - 148{,}4377 = 3{,}1417$$
$$\mu_{49} - \mu_{48} = 154{,}7210 - 151{,}5794 = 3{,}1416$$
$$\mu_{50} - \mu_{49} = 157{,}8627 - 154{,}7210 = 3{,}1417$$

Эта особенность поведения чисел μ_n уравнения (2) может быть использована для ускорения процедуры нахождения конечной суммы ряда (1) при $n \to \infty$. Для этого целесообразно рассмотреть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_n^2} = 0, \tag{3}$$

где величины собственных чисел β_n являются корнями функции

$$\cos\beta = 0, \tag{4}$$

т.е. они равны [15]

$$\beta_n = m\pi. \tag{5}$$

Подставляя (5) в (3), получим

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2\pi^2} = \frac{1}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2}. \tag{6}$$

Учитывая, что числовой ряд, входящий в правую часть зависимости (6) равен [9,15]

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}, \tag{7}$$

следующая величина суммы (6) будет равна

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2\pi^2} = \frac{1}{6}. \tag{8}$$

Если рассчитать некоторую начальную часть ряда (6) $\sum_{m=1}^{m=m^*} \frac{1}{m^2\pi^2}$, то очевидно, остаток будет равен

$$\sum_{m=m^*}^{\infty} \frac{1}{m^2\pi^2} = \frac{1}{6} - \sum_{m=1}^{m=m^*} \frac{1}{m^2\pi^2}. \tag{9}$$

Используя эту остаточную величину ряда (6), можно сравнительно просто вычислить бесконечную сумму (1) на основе рекомендуемого выражения

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2} = \sum_{n=1}^{n=n^*} \frac{1}{\mu_n^2} - \sum_{m=1}^{m^*=n^*} \frac{1}{m^2\pi^2} + \frac{1}{6}. \tag{10}$$

Определение приемлемой величины порядкового номера n^* обусловлено требуемой точностью расчета суммы (1) и может быть предложена ориентировочная оценка следующего характера

$$J_1(\mu_{n+1}) - J_1(\mu_n) \approx \pi. \tag{11}$$

Из анализа поведения функции $J_1(\mu)$ можно сделать вывод, что условие (11) начинает иметь место при $n > 20$. Ниже приведены результаты расчетов по формуле (10) для вариантов, когда $n^* = 20$ и $n^* = 30$

При $n^* = 20$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2} = \sum_{n=1}^{n=20} \frac{1}{\mu_n^2} - \sum_{m=1}^{m^*=20} \frac{1}{m^2\pi^2} + \frac{1}{6} = 0{,}124554$$

при $n^* = 30$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2} = \sum_{n=1}^{n=30} \frac{1}{\mu_n^2} - \sum_{m=1}^{m^*=30} \frac{1}{m^2\pi^2} + \frac{1}{6} = 0{,}124521$$

Видно, что отличие конечных результатов незначительное. При этом нужно отметить, что действительная сумма (1) при $n \to \infty$ равняется 0,125 [15].

Выводы. Аналитические методы нестационарной теплопроводности обладают высокой точностью и наглядностью. Широкий класс задач, как линейных так и нелинейных, успешно решается аналитическими методами в форме бесконечных рядов. Применение данного метода позволяет расширить спектр решаемых теплофизических задач, где основной трудностью является суммирование бесконечных рядов. Следует отметить, что предлагаемый метод может быть распространен на более сложные функциональные ряды. Так, например, при рассмотрении некоторых задач, связанных с необходимостью определения неустановившегося температурного поля цилиндрического тела, приходится использовать бесконечные суммы более общего вида, чем (1), а именно $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2 - a}$, где a – некоторый параметр изучаемого процесса [16–19].

Литература

1. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая шк., 1967. 600 с.
2. Тихонов А.Н, Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука,1969. С. 742.
3. Беляев Н.М., Рядно А.А. Методы теории теплопроводности. В 2-х ч. М.: Высшая шк., 1982. Ч. 1. С. 327.
4. Цой П.В. Методы расчета отдельных задач тепломассопереноса. М.: Энергия, 1971. С. 383.

5. Видин Ю.В., Злобин В.С., Иванов Д.И. Нестационарный теплоперенос в неоднородных конструкциях криволинейной конфигурации. Красноярск: СФУ, 2016. С. 167.
6. Федяев А.А., Видин Ю.В., Злобин В.С. Нелинейные процессы переноса тепла в многослойных конструкциях. Братск: Изд-во БрГУ, 2020. С. 217.
7. Коздоба Л.А. Методы решения нелинейных задач теплопроводности. М.: Наука, 1975. С. 227.
8. Демидович Б.П., Марон А.А. Основы вычислительной математики. М.: Наука, 1970. С. 664.
9. Воробьев Н.Н. Теория рядов. М.: Наука, 1975. С. 368.
10. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М.: Наука, 1989. С. 432.
11. Коренев Б.Г. Введение в теорию Бесселевых функций. М.: Наука, 1971. 288 с.
12. Ватсон Г.Н. Теория Бесселевых функций. М.: ИЛ, 1949. Т. 1, 2. С. 219.
13. Грей Э., Мэтьюз Г.Б. Функции Бесселя и их приложение к физике и механике. М.: Изд-во иностранной лит., 1953. 372 с.
14. Чистова Э.А. Таблицы функций Бесселя от действительного аргумента и интегралов от них. М.: Изд-во Акад. Наук СССР, 1958. С. 524.
15. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справ. по математике. М.: Наука, 1965. С. 608.
16. Петухов Б.С. Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах. М.: Энергия, 1967. С. 411.
17. Дульнев Г.Н., Тарновский Н.Н. Тепловые режимы электронной аппаратуры. Л.: Энергия, 1971. С. 248.
18. Логинов В.С. Приближенные методы теплового расчета активных элементов электрофизических установок. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. С. 272.
19. Федик И.И., Колесов В.С., Михайлов В.Н. Температурные поля и термонапряжения в ядерных реакторах. М.: Энергоатомиздат, 1985. С. 280.

References

1. Lykov A.V. Theory of thermal conductivity. M.: Higher school. 1967. 600 p.
2. Tikhonov A.N., Samarsky A.A. Equations of mathematical physics. 1969. P. 742.
3. Belyaev N.M., Ryadno A.A. Methods of the theory of thermal conductivity. Textbook for universities. In 2 parts. M.: Vysshaya shkola, 1982. Part 1. P. 327.
4. Tsoi P.V. Methods for calculating individual problems of heat and mass transfer. M.: Energiya, 1971. P. 383.
5. Vidin Yu.V., Zlobin V.S., Ivanov D.I. Nonstationary heat transfer in inhomogeneous structures of curved configuration. Krasnoyarsk: SFU, 2016. P. 167.
6. Fedyaev A.A., Vidin Yu.V., Zlobin V S. Nonlinear heat transfer processes in multilayer systems. Bratsk: BrSU, 2020. P. 217.
7. Kozdoba L.A. Methods for solving nonlinear problems of heat conduction. M.: Nauka, 1975. P. 227.
8. Demidovich B.P., Maron A.A. Fundamentals of computational mathematics. M.: Nauka, 1970. P. 664.
9. Vorob'ev N.N. The theory of series. M.: Nauka, 1975. P. 368.
10. Samarsky A.A., Gulin A.V. Numerical methods. M.: Nauka, 1989. P. 432.
11. Korenev B.G. Introduction to the theory of Bessel functions. M.: Nauka, 1971. 288 p.
12. Watson G.N. Theory of Bessel functions.. M.: IL, 1949. V. 1, 2. P. 219.
13. Gray E., Mathews G.B. Bessel functions and their application to physics and mechanics. M.: Foreign Literature Publishing House, 1953. 372 p.
14. Chistova E.A. Tables of Bessel functions from a real argument and integrals from them. M.: Akkad Publishing House. Of Sciences of the USSR, 1958. P. 524.
15. Bronshtein I.N., Semendyaev K.A. Handbook of Mathematics. M.: Nauka, 1965. P. 608.
16. Petukhov B.S. Heat transfer and resistance in the laminar flow of liquid in pipes. M.: Energiya, 1967. P. 411.
17. Dulnev G.N., Tarnovsky N.N. Thermal modes of electronic equipment. L.: Energiya, 1971. P. 248.
18. Loginov V.S. Approximate methods of thermal calculation of active elements of electrophysical installations. M.: FIZMATLIT, 2009. P. 272.
19. Fedik I.I., Kolesov V.S., Mikhailov V.N. Temperature fields and thermal stresses in nuclear reactors. M.: Energoatomizdat, 1985. P. 280.