

Некоторые предложения о расширении возможностей системного анализа в задачах динамики механических колебательных систем

А.В. Елисеев^{1а}, А.С. Миронов^{2б}, С.В. Елисеев^{3с}

Иркутский государственный университет путей сообщения, Чернышевского, 15, Иркутск, Россия

^а eavsh@ya.ru, ^б art.s.mironov@mail.ru, ^с eliseev_s@inbox.ru

^а <https://orcid.org/0000-0003-0222-2507> ^б <https://orcid.org/0000-0002-0921-0915>; ^с <https://orcid.org/0000-0001-6876-8786>

Статья поступила 29.01.2021, принята 05.02.2021

Предлагается расширение методологического базиса системного анализа динамики механических колебательных структур на основе частотных функций и функций демпфирования, аргументом которых является коэффициент связности форм движений массоинерционных элементов. Коэффициент связности отражает рычажную связь параметров обобщенных координат. Для построения частотной функции и функции демпфирования используются механические колебательные системы, совершающие движения в фазе безопорного движения, образованные двумя массоинерционными элементами, соединенными пружиной с учетом вязкого трения. Целью исследования является разработка метода построения частотных функций и функций демпфирования для системной оценки динамических и структурных свойств механических колебательных структур. Метод построения частотных функций и функций демпфирования основан на введении коэффициента связности форм движений и использовании энергетического соотношения, связывающего кинетическую, потенциальную энергию и значения функции рассеяния энергии. Математические модели строятся на основе формализма Лагранжа, матричных методов, элементов теории функций комплексной переменной. Для определения форм частотных функций и функций демпфирования семейств механических колебательных систем используется параметризующая функция. Для механических колебательных систем, не связанных с опорными поверхностями, проведена графоаналитическая оценка экстремальных свойств частотных функций и функций демпфирования. Показана возможность существования четырех экстремальных значений у частотных функций. Предложен топологический критерий классификации форм графиков частотных функций и функций демпфирования, соответствующих механическим колебательным системам рассматриваемого семейства. Разработанный метод построения частотных функций и функций демпфирования может быть использован для отображения динамических особенностей механических колебательных систем, включающих в свой состав устройства для преобразования движений.

Ключевые слова: механическая система; динамические связи; частотная функция; функция демпфирования; связность движений; экстремальные свойства; колебание; вязкое трение.

Some proposals for expanding the capabilities of system analysis in problems of dynamics of mechanical oscillatory systems

A.V. Eliseev^{1а}, A.S. Mironov^{2б}, S.V. Eliseev^{3с}

Irkutsk State Transport University; 15, Chernyshevsky St., Irkutsk, Russia

^а eavsh@ya.ru, ^б art.s.mironov@mail.ru, ^с eliseev_s@inbox.ru

^а <https://orcid.org/0000-0003-0222-2507> ^б <https://orcid.org/0000-0002-0921-0915>; ^с <https://orcid.org/0000-0001-6876-8786>

Received 29.01.2021, accepted 05.02.2021

It is proposed to expand the methodological basis of the system analysis of the dynamics of mechanical vibrational structures based on frequency and damping functions. The argument of the functions is the coefficient of connectivity of the forms of motion of mass-inertial elements. The connectivity coefficient reflects the linkage of the parameters of the generalized coordinates. To construct the frequency function and the damping function, mechanical oscillatory systems are used that move in the phase of unsupported motion, formed by two mass-inertial elements connected by a spring, taking into account viscous friction. The aim of the study is to develop a method for constructing frequency functions and damping functions for a systematic assessment of the dynamic and structural properties of mechanical vibrational structures. The method of constructing the frequency functions and damping functions is based on the introduction of the connectivity coefficient of the forms of motion and the use of the energy ratio connecting the kinetic, potential energy and the values of the energy dissipation function. Mathematical models are built on the basis of the Lagrange formalism, matrix methods, elements of the theory of functions of a complex variable. To determine the forms of frequency functions and damping functions of families of mechanical oscillatory systems, a parameterizing function is used. For mechanical oscillatory systems that are not associated with support surfaces, a graph-analytical assessment of the extreme properties of the constructed frequency functions and damping functions is carried out. The possibility of the existence of four extreme values for frequency functions is shown. A topological criterion for classifying the shapes of the graphs of frequency functions and damping functions corresponding to mechanical oscillatory systems of the family under consideration is proposed. The developed method for constructing frequency functions and damping functions can be used to display the dynamic features of mechanical oscillatory systems, which include devices for transforming movements.

Keywords: mechanical system; dynamic constraints; frequency function; damping function; motion connectivity; extreme properties; vibration; viscous friction.

Введение. Технические объекты, находящиеся под действием интенсивных вибрационных нагрузений, характерны для транспортных отраслей, отраслей промышленности, в частности, машиностроения, металлообработки и др. [1–3]. Разнообразие динамических эффектов, реализуемых технологическими вибрационными процессами и машинами, инициирует поиск соответствующих методов математического моделирования, которые отражают наиболее существенные особенности технических систем, подверженных периодическим воздействиям [4–10]. Усложнение как самих технических систем, так и методов контроля за их динамическим состоянием, по существу, предопределяет поиск новых системных подходов, связанных с оценкой динамических состояний технических объектов [11–13].

Применение в инженерной практике механических колебательных систем в качестве расчетных схем для оценки динамических свойств технических объектов, работающих в условиях интенсивных вибрационных взаимодействий, получило широкое распространение [14–16]. К числу наиболее известных подходов к оценке динамических свойств механических колебательных систем можно отнести методы на основе энергетических соотношений [17–18]. В свою очередь, подходы использования экстремальных свойств отношения потенциальной энергии к кинетической получили развитие в понятии частотной энергетической функции аргумента коэффициента связности форм движений элементов механических колебательных систем, применяемом для детализации представлений об особенностях динамики механических колебательных систем [19].

Вместе с тем, методы оценки динамических свойств механических колебательных систем с учетом сил вязкого трения на основе частотной функции требуют подробного рассмотрения, что связано, в частности, с тем, что для систем с вязким трением характер движения становится более сложным [20].

Предлагаемая работа посвящена развитию методов оценки свойств механических колебательных систем с вязким трением с помощью частотной функции и функции демпфирования, отражающих в экстремальных значениях существенные динамические характеристики системы.

I. Некоторые исходные положения. Постановка задачи. Рассматривается механическая упруго-диссипативная система с двумя степенями свободы. Принципиальная схема системы представлена на рис. 1. Предполагается, что система совершает свободные движения под действием начальных условий.

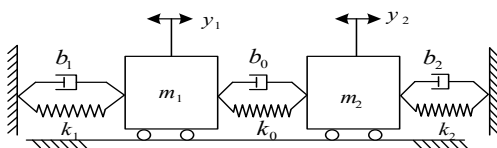


Рис. 1. Механическая колебательная система с учетом вязкого трения

В качестве обобщенных координат y_1, y_2 выбраны смещения массоинерционных элементов m_1, m_2 относительно положений статического равновесия. Кинетическая энергия T , потенциальная энергия Π и функция рассеяния F имеют вид:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}_2^2, \quad (1)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} k_1 y_1^2 + \frac{1}{2} k_2 y_2^2 + \frac{1}{2} k_0 (y_2 - y_1)^2, \quad (2)$$

$$F = \frac{1}{2} b_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} b_0 (\dot{y}_2 - \dot{y}_1)^2 + \frac{1}{2} b_2 \dot{y}_2^2. \quad (3)$$

Система уравнений Лагранжа 2-го рода для функций (1) – (3) принимает вид:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{y}_1 + (b_0 + b_1) \dot{y}_1 - b_0 \dot{y}_2 + (k_0 + k_1) y_1 - k_0 y_2 = 0; \\ m_2 \ddot{y}_2 + (b_0 + b_2) \dot{y}_2 - b_0 \dot{y}_1 + (k_0 + k_2) y_2 - k_0 y_1 = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Формы свободных движений, совершаемые системой (4), в общем случае определяются характеристическими числами с учетом их кратности. В случае простых корней решение $y_1 = y_1(t), y_2 = y_2(t)$ системы (4) может быть найдено в виде:

$$\vec{y} = \vec{Y} e^{pt}, \quad (5)$$

где $\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$ — вектор-решение; $\vec{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}$ — вектор начальных смещений; $p = \sigma + j\omega$ — комплексный параметр, характеризующий форму движений; t — переменная времени. Полагается, что начальные условия согласованы с видом искомого решения (5):

$$\vec{y}(0) = \vec{Y}, \dot{\vec{y}}(0) = p \vec{Y}. \quad (6)$$

Задача заключается в разработке метода оценки динамических свойств механических колебательных систем с учетом сил вязкого трения на основе свойств частотной функции и функции демпфирования.

II. Определение частотной функции и функции диссипации на основе энергетического соотношения. Система (4) в обозначениях (5) имеет вид:

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} m_1 p^2 + \\ + (b_0 + b_1) p + \\ + k_0 + k_1 \end{pmatrix} & (-b_0 p - k_0) \\ (-b_0 p - k_0) & \begin{pmatrix} m_2 p^2 + \\ + (b_0 + b_2) p + \\ + k_0 + k_2 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = 0. \quad (7)$$

Рассмотрим матрицы A, B, C :

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} b_0 + b_1 & -b_0 \\ -b_0 & b_0 + b_2 \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} k_0 + k_1 & -k_0 \\ -k_0 & k_0 + k_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (8)$$

В обозначениях (8) система (4) может быть представлена в виде:

$$(p^2 A + pB + C)\bar{Y} = 0. \quad (9)$$

Умножим равенство (9) скалярно на вектор \bar{Y} :

$$p^2 \langle A\bar{Y}, \bar{Y} \rangle + p \langle B\bar{Y}, \bar{Y} \rangle + \langle C\bar{Y}, \bar{Y} \rangle = 0. \quad (10)$$

После подстановки $p = \sigma + j\omega$ (10) примет вид энергетического отношения:

$$(\sigma^2 - \omega^2 + 2j\sigma\omega) \langle A\bar{Y}, \bar{Y} \rangle + (\sigma + j\omega) \langle B\bar{Y}, \bar{Y} \rangle + \langle C\bar{Y}, \bar{Y} \rangle = 0' \quad (11)$$

Введем в рассмотрение коэффициент α , отражающий рычажный характер связи между обобщенными координатам системы:

$$Y_2 = \alpha Y_1. \quad (12)$$

Вектор \bar{Y} может быть представлен в виде:

$$\bar{Y} = Y_1 \bar{\alpha}, \quad (13)$$

где $\bar{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix}$. После подстановки (13) выражение (11)

принимает вид комплексного выражения:

$$(\sigma^2 - \omega^2 + 2j\sigma\omega)A_\alpha + (\sigma + j\omega)B_\alpha + C_\alpha = 0, \quad (14)$$

где $A_\alpha = \langle A\bar{\alpha}, \bar{\alpha} \rangle$, $B_\alpha = \langle B\bar{\alpha}, \bar{\alpha} \rangle$, $C_\alpha = \langle C\bar{\alpha}, \bar{\alpha} \rangle$ — вещественные функции аргумента коэффициента связности форм α . Равенство (14) может быть представлено в виде двух выражений для мнимой и комплексной частей:

$$\begin{cases} \omega^2 A_\alpha = \sigma^2 A_\alpha + \sigma B_\alpha + C_\alpha; \\ 2\sigma\omega A_\alpha + \omega B_\alpha = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Система (15) рассматривается как форма определения вещественной частотной функции $\omega(\alpha)$ и вещественной функции демпфирования $\sigma(\alpha)$ аргумента α . Особенности решения системы (15), в частности, количество независимых решений, определяются корнями квадратного уравнения $\sigma^2 A_\alpha + \sigma B_\alpha + C_\alpha = 0$, дискриминант $B_\alpha^2 - 4A_\alpha C_\alpha$ которого может интерпретирован как база для оценки особенностей сил трения в системе.

При условии «малости» сил трения:

$$B_\alpha^2 < 4A_\alpha C_\alpha \quad (16)$$

решение системы (15) может быть представлено в виде:

$$\begin{cases} \omega^2 = \frac{C_\alpha}{A_\alpha} - \left(\frac{B_\alpha}{2A_\alpha}\right)^2; \\ \sigma = -\frac{B_\alpha}{2A_\alpha}. \end{cases} \quad (17)$$

При выполнении (16) для решения (17) справедливо равенство:

$$\omega^2 + \sigma^2 = \frac{C_\alpha}{A_\alpha}. \quad (18)$$

При условии «больших» сил вязкого трения:

$$B_\alpha^2 > 4A_\alpha C_\alpha \quad (19)$$

решение системы (15) может быть представлено в виде:

$$\omega = 0, \quad (20)$$

$$\sigma_1(\alpha) = -\frac{B_\alpha}{2A_\alpha} - \sqrt{\left(\frac{B_\alpha}{2A_\alpha}\right)^2 - \frac{C_\alpha}{A_\alpha}}, \quad (21)$$

$$\sigma_2(\alpha) = -\frac{B_\alpha}{2A_\alpha} + \sqrt{\left(\frac{B_\alpha}{2A_\alpha}\right)^2 - \frac{C_\alpha}{A_\alpha}}.$$

Вместе с тем, для компонент $\sigma_1(\alpha)$, $\sigma_2(\alpha)$ выполнено:

$$\begin{cases} \sigma_1(\alpha) + \sigma_2(\alpha) = -\frac{B_\alpha}{A_\alpha}, \\ \sigma_1(\alpha) \cdot \sigma_2(\alpha) = \frac{C_\alpha}{A_\alpha} \end{cases} \quad (22)$$

Конкретные аналитические выражения частотной функции, функции демпфирования определяются параметрами.

III. Частотные функции и функции демпфирования механических систем. Рассматривается механическая система, представленная на рис. 1. Значения величин $A_\alpha, B_\alpha, C_\alpha$ определяются выражениями:

$$A_\alpha = m_1 + m_2 \alpha^2, \quad (23)$$

$$B_\alpha = (b_0 + b_2) \alpha^2 - 2\alpha b_0 + b_0 + b_1, \quad (24)$$

$$C_\alpha = (k_0 + k_2) \alpha^2 - 2\alpha k_0 + k_0 + k_1. \quad (25)$$

Для «малых» сил вязкого трения частотная функция $\omega^2(\alpha)$ и функция демпфирования $\sigma(\alpha)$ принимают вид:

$$\begin{cases} \omega^2(\alpha) = \frac{(k_0 + k_2) \alpha^2 - 2\alpha k_0 + k_0 + k_1}{m_1 + m_2 \alpha^2} - \\ - \left(\frac{1}{2} \frac{(b_0 + b_2) \alpha^2 - 2\alpha b_0 + b_0 + b_1}{m_1 + m_2 \alpha^2} \right)^2 \\ \sigma(\alpha) = -\frac{1}{2} \frac{(b_0 + b_2) \alpha^2 - 2\alpha b_0 + b_0 + b_1}{m_1 + m_2 \alpha^2} \end{cases} \quad (26)$$

При «больших» силах вязкого трения частотная функция $\omega^2(\alpha)$ и функция демпфирования $\sigma(\alpha)$ принимают вид:

$$\begin{cases} \sigma_1(\alpha) = -\frac{1}{2} \frac{(b_0 + b_2) \alpha^2 - 2\alpha b_0 + b_0 + b_1}{m_1 + m_2 \alpha^2} - \\ - \sqrt{\left(\frac{1}{2} \frac{(b_0 + b_2) \alpha^2 - 2\alpha b_0 + b_0 + b_1}{m_1 + m_2 \alpha^2} \right)^2 - \\ - \frac{(k_0 + k_2) \alpha^2 - 2\alpha k_0 + k_0 + k_1}{m_1 + m_2 \alpha^2}}; \\ \sigma_2(\alpha) = -\frac{1}{2} \frac{(b_0 + b_2) \alpha^2 - 2\alpha b_0 + b_0 + b_1}{m_1 + m_2 \alpha^2} + \\ + \sqrt{\left(\frac{1}{2} \frac{(b_0 + b_2) \alpha^2 - 2\alpha b_0 + b_0 + b_1}{m_1 + m_2 \alpha^2} \right)^2 - \\ - \frac{(k_0 + k_2) \alpha^2 - 2\alpha k_0 + k_0 + k_1}{m_1 + m_2 \alpha^2}}; \\ \omega^2 = 0. \end{cases} \quad (27)$$

Система (27) определяет функцию демпфирования как двузначную функцию, сопоставляющую коэффициенту связности форм α два значения, $\sigma_1(\alpha)$ и

$\sigma_2(\alpha)$. Выбор конкретных значений массоинерционных коэффициентов, коэффициентов жесткости и коэффициентов сил вязкого трения определяет экстремальные значения частотной функции ω^2 и функции демпфирования $\sigma(\alpha)$.

IV. Экстремальные формы частотных функций и функций демпфирования для систем, не связанных с опорными поверхностями, в зависимости от параметризующей функции. Для оценки экстремальных свойств частотной функции и функции демпфирования рассматривается семейство систем с параметрами $b_1=0, b_2=0, k_1=0, k_2=0$. Принципиальная схема механической системы представлена на рис. 2. Существенной особенностью рассматриваемой системы является отсутствие связи массоинерционных элементов с опорными поверхностями, при условии, что массоинерционные элементы связаны между собой упругим элементом и демпфером. Такую систему будем называть «диадой».

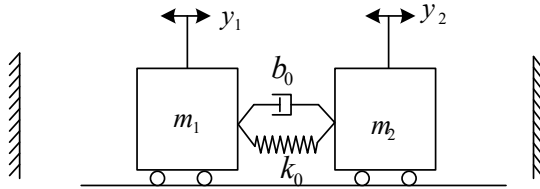


Рис. 2. Диада, не взаимодействующая с опорными поверхностями

Соответствующие величины $A_\alpha, B_\alpha, C_\alpha$ имеют вид:

$$A_\alpha = m_1 + m_2 \alpha^2, \tag{28}$$

$$B_\alpha = b_0(\alpha - 1)^2, \tag{29}$$

$$C_\alpha = k_0(\alpha - 1)^2. \tag{30}$$

Критические значения параметров, разделяющие области «малых» и «больших» сил вязкого трения, могут быть представлены выражением:

$$\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{b_0(\alpha - 1)^2}{m_1 + m_2 \alpha^2} \right)^2 = \frac{k_0(\alpha - 1)^2}{m_1 + m_2 \alpha^2}. \tag{31}$$

В свою очередь, равенство (31) может быть использовано для выбора области «малых» и «больших» сил вязкого трения для коэффициента связности форм движения α . На рис. 3 представлен график функции $b_0 = b_0(\alpha)$ заданной выражением (31).

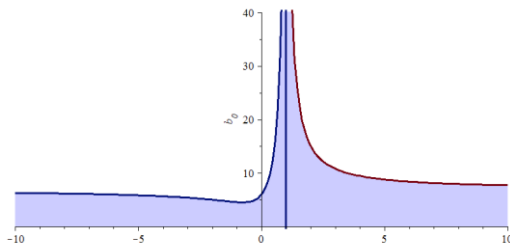


Рис. 3. Область коэффициентов вязкого трения в зависимости от коэффициента формы связности

Для каждого значения b_0 область подграфика определяет множество коэффициентов α , для которых выполнено условие «малости» сил трения:

$$\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{b_0(\alpha - 1)^2}{m_1 + m_2 \alpha^2} \right)^2 < \frac{k_0(\alpha - 1)^2}{m_1 + m_2 \alpha^2}. \tag{32}$$

Вместе с тем, условие «малых» сил трения может быть преобразовано к неравенству:

$$\gamma_0 < M(\alpha), \tag{33}$$

где величина $\gamma_0 = \frac{b_0^2}{4k_0}$ отражает приведенные характе-

ристики системы, а величина $M(\alpha) = \frac{m_1 + m_2 \alpha^2}{(\alpha - 1)^2}$, име-

ющая размерность массы, зависит от коэффициента α и называется параметризующей функцией.

Такая форма представления позволяет в зависимости от величины γ_0 определить критические значения коэффициентов связности форм, разделяющих области «малых» и «больших» сил трения.

На рис. 4 изображена параметризующая функция $M(\alpha)$, для которой корни уравнения $M(\alpha) = \gamma_0$ определяют границы интервалов выполнения условий малых сил трения.

На интервалах α , где выполнены условия «малых» сил трений, частотная функция и функция демпфирования имеют вид:

$$\begin{cases} \omega^2(\alpha) = \frac{k_0(\alpha - 1)^2}{m_1 + m_2 \alpha^2} - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{b_0(\alpha - 1)^2}{m_1 + m_2 \alpha^2} \right)^2; \\ \sigma(\alpha) = -\frac{1}{2} \frac{b_0(\alpha - 1)^2}{m_1 + m_2 \alpha^2}. \end{cases} \tag{34}$$

Частотная функция (34) имеет локальные экстремумы ω_1^2, ω_2^2 в точках α_1, α_2 :

$$\alpha_1 = 1, \omega_1^2 = 0; \tag{35}$$

$$\alpha_2 = -\frac{m_1}{m_2}, \omega_2^2 = \frac{k_0}{\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} - \left(\frac{\frac{b_0}{2}}{\frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2}} \right)^2}. \tag{36}$$

Вместе с тем, при условии $\frac{b_0^2}{2k_0} \geq \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)}$ форми-

руются две дополнительные критические точки α_3, α_4 , в которых производная квадрата частотной функции обращается в ноль $(\omega^2(\alpha))' = 0$, а частотная функция достигает значения k_0/b_0 :

$$\alpha_3 = \frac{b_0^2 + \sqrt{2b_0^2 k_0(m_1 + m_2) - 4k_0^2 m_1 m_2}}{b_0^2 - k_0 m_2}, \tag{37}$$

$$\omega_3^2 = \left(\frac{k_0}{b_0} \right)^2$$

$$\alpha_4 = \frac{b_0^2 - \sqrt{2b_0^2 k_0(m_1 + m_2) - 4k_0^2 m_1 m_2}}{b_0^2 - k_0 m_2}, \tag{38}$$

$$\omega_4^2 = \left(\frac{k_0}{b_0} \right)^2$$

При условии «больших» сил трения частотная функция равна нулю, функция демпфирования принимает два значения:

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_1(\alpha) &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{b_0(\alpha-1)^2}{m_1+m_2\alpha^2} - \\ & - \sqrt{\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{b_0(\alpha-1)^2}{m_1+m_2\alpha^2}\right)^2 - \frac{k_0(\alpha-1)^2}{m_1+m_2\alpha^2}}; \\ \sigma_2(\alpha) &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{b_0(\alpha-1)^2}{m_1+m_2\alpha^2} + \\ & + \sqrt{\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{b_0(\alpha-1)^2}{m_1+m_2\alpha^2}\right)^2 - \frac{k_0(\alpha-1)^2}{m_1+m_2\alpha^2}}. \end{aligned} \right. \quad (39)$$

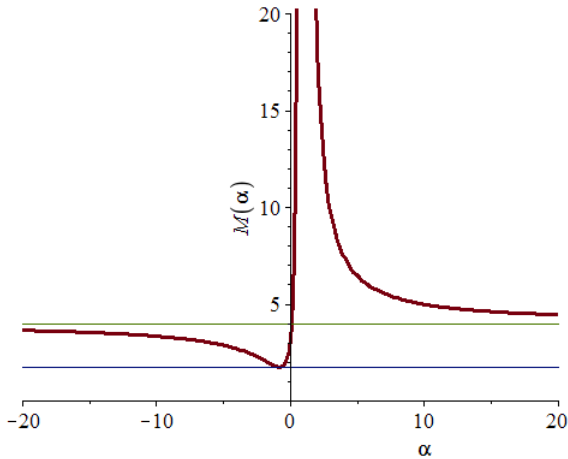


Рис. 4. Параметризирующая функция

В частности, непрерывное изменение параметра γ_0 от нуля определяет варианты промежутков коэффициентов связности форм α .

1. На интервале $0 < \gamma_0 < \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ условия «малости» сил трения выполняются для всех вещественных коэффициентов связности форм α .

2. На интервале $m_2 > \gamma_0 \geq \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ условия «малости» сил трения нарушаются на интервале $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2)$,

где $\alpha_1 = \frac{-\gamma_0 - \sqrt{(m_1 + m_2)\gamma_0 - m_1 m_2}}{m_2 - \gamma_0}$,

$$\alpha_2 = \frac{-\gamma_0 + \sqrt{(m_1 + m_2)\gamma_0 - m_1 m_2}}{m_2 - \gamma_0}.$$

3. Если $\gamma_0 = m_2$, то условие реализации «малости» сил трения нарушается на интервале $\alpha \in (-\infty, \alpha_0)$, где

$$\alpha_0 = \frac{m_2 - m_1}{2m_2}.$$

4. На интервале $\infty > \gamma_0 > m_2$ условия реализации «малости» сил трения нарушаются на интервале

$$\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2), \quad \text{где} \quad \alpha_1 = \frac{\gamma_0 - \sqrt{(m_1 + m_2)\gamma_0 - m_1 m_2}}{\gamma_0 - m_2},$$

$$\alpha_2 = \frac{\gamma_0 + \sqrt{(m_1 + m_2)\gamma_0 - m_1 m_2}}{\gamma_0 - m_2}.$$

На рис. 5 и 6 представлены графики семейства частотных функций и функций демпфирования для параметра γ_0 при выполнении условий:

$$0 \leq \gamma_0 < \frac{1}{2} \cdot \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (40)$$

Форма частотной функции с двумя экстремумами.

На рис. 7 и 8 представлены графики семейства частотных функций и функций демпфирования при выполнении условий:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} < \gamma_0 < \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (41)$$

Форма частотной функции с четырьмя локальными экстремумами. Частотная функция имеет четыре локальных экстремума, два из которых равны между собой и составляют величину k_0/b_0 , а другие два равны нулю и частоте собственных колебаний соответственно.

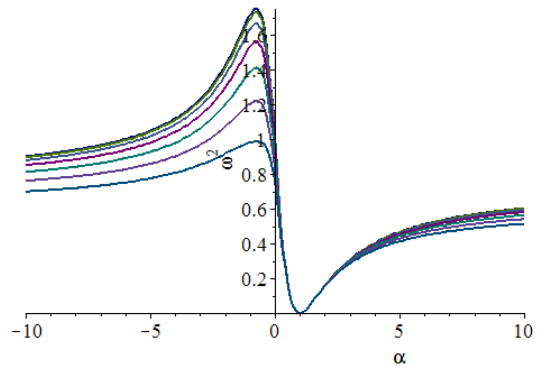


Рис. 5. Частотная функция $k_0 = 3, m_1 = 3, m_2 = 4, b_0 = 0 \dots 3$, шаг $h = 0.5$

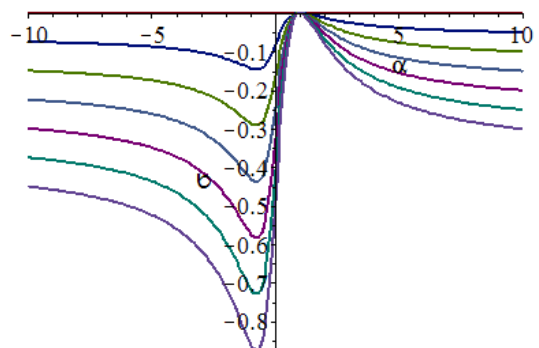


Рис. 6. Функция демпфирования. $k_0 = 3, m_1 = 3, m_2 = 4, b_0 = 0 \dots 3$, шаг $h = 0.5$

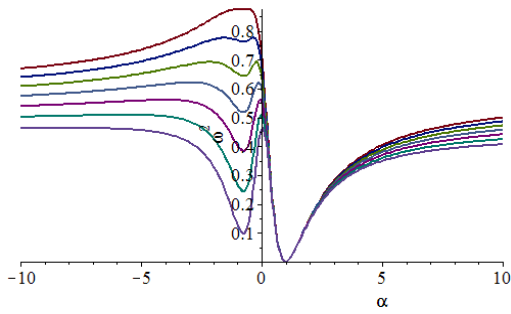


Рис. 7. Частотная функция. $k_0 = 3$, $m_1 = 3$, $m_2 = 4$, $b_0 = 3.2 \dots 4.6$, шаг $h = 0.2$

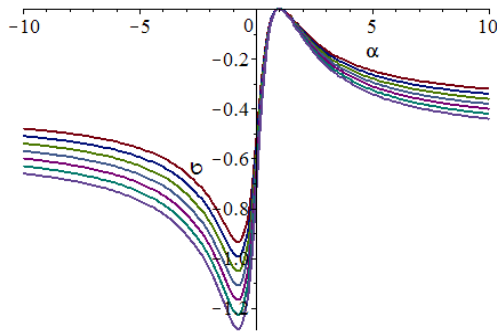


Рис. 8. Функция демпфирования $k_0 = 3$, $m_1 = 3$, $m_2 = 4$, $b_0 = 3.2 \dots 4.6$, шаг $h = 0.2$

V. Топологические особенности характерных графиков частотной функции и функции демпфирования.

1. $0 \leq \gamma_0 < \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$. Рассматривается пример $\gamma_0 \approx 0.1$. В этом случае для любого коэффициента формы $\alpha \in (-\infty, \infty)$ выполнены условия «малости» сил трения. На рис. 9 и 10 представлены частотная функция $\omega^2(\alpha)$ и функция затухания $\sigma(\alpha)$ для механической системы с параметрами $b = 1$, $m_1 = 3$, $m_2 = 4$, $k_0 = 3$. Корни уравнения, представляющего собой равенство нулю определителя:

$$|Ap^2 + Bp + C| = 0 \tag{42}$$

составляют $p_i = \omega_i + j\sigma_i$, $i = 1..4$, где вещественные части $\sigma_1 \approx 0$, $\sigma_2 \approx 0$, $\sigma_3 \approx -0.29$, $\sigma_4 \approx -0.29$, комплексные части $\omega_1 \approx 0$, $\omega_2 \approx 0$, $\omega_3 \approx 1.29$, $\omega_4 \approx -1.29$. На рис. 9 частотная функция достигает экстремальных значений, равных квадратам частот $\omega_2^2 \approx 1.67$ и $\omega_1^2 \approx 0$ в точках $\alpha_1^* = -0.75$ и $\alpha_2^* = 1$ соответственно. На рис. 10 функция демпфирования достигает экстремальных значений, которые составляют $\sigma_3 \approx -0.29$ и $\sigma_1 \approx 0$ в точках $\alpha_1^* = -0.75$ и $\alpha_2^* = 1$.

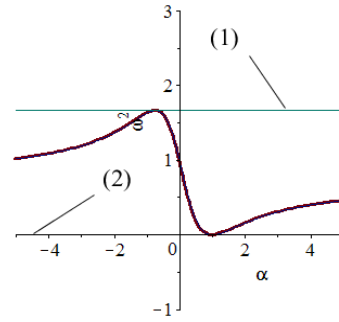


Рис. 9. Частотная функция. (1) и (2) — экстремальные уровни

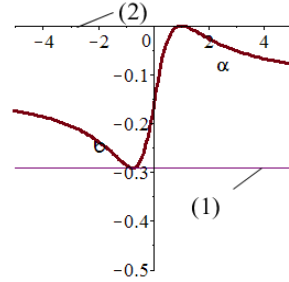


Рис. 10. Функция демпфирования. (1) и (2) — экстремальные уровни

2. $m_2 > \gamma_0 \geq \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$. Рассматриваются параметры

$b_0 = 5$, $\gamma_0 \approx 2.08$. Условие малости сил трения нарушаются на интервале $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2)$, где $\alpha_1 = -0.25$, $\alpha_2 = -1.93$. Для параметров $b_0 = 5$, $m_1 = 3$, $m_2 = 4$, $k_0 = 3$ корни уравнения (42) имеют вещественные части $\sigma_1 \approx 0$, $\sigma_2 \approx 0$, $\sigma_3 \approx -0.85$, $\sigma_4 \approx -2.07$ и мнимые части $\omega_1 \approx 0$, $\omega_2 \approx 0$, $\omega_3 \approx 0$, $\omega_4 \approx 0$. Соответствующие частотная функция и функция затухания приведены на рис. 11 и 12. На интервале (α_1, α_2) частотная функция равна нулю. В свою очередь, функция демпфирования в интервале (α_1, α_2) двузначна и достигает одновременно двух экстремальных значений в точке α_1^* , которые составляют $\sigma_3 \approx -0.85$ и $\sigma_2 \approx -2.07$. В области $(-\infty, \alpha_1) \cup (\alpha_2, \infty)$ функция демпфирования однозначна и имеет один локальный экстремум $\sigma_1 \approx 0$ в точке α_2^* .

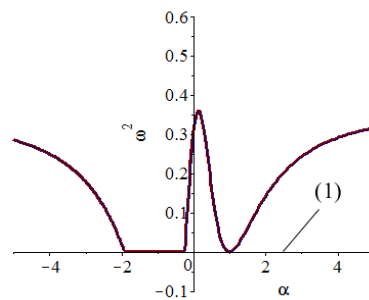


Рис. 11. Частотная функция. (1) — экстремальный уровень

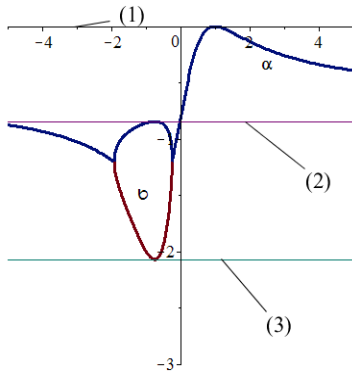


Рис. 12. Функция демпфирования. (1), (2), (3) — экстремальные уровни

3. $\gamma_0 \approx m_2$. Пусть $b_0 = 6.93$, $\gamma_0 \approx 4$. Условия реализации малости сил трения нарушаются на интервале $\alpha \in (-\infty, \alpha_1)$, где $\alpha_1 = 0.125$. Для параметров $b_0 = 6.93$, $m_1 = 3$, $m_2 = 4$, $k_0 = 3$ корни уравнения (42) имеют вещественные $\sigma_1 \approx 0$, $\sigma_2 \approx 0$, $\sigma_3 \approx -0.49$, $\sigma_4 \approx -3.54$ и мнимые части $\omega_1 \approx 0$, $\omega_2 \approx 0$, $\omega_3 \approx 0$, $\omega_4 \approx 0$. Соответствующие частотная функция и функция затухания приведены на рис. 13 и 14. На интервале $(-\infty, \alpha_1)$ частотная функция равна нулю. В свою очередь, функция затухания в интервале $(-\infty, \alpha_1)$ двузначна и достигает одновременно двух экстремальных значений в точке α_1^* , которые составляют $\sigma_3 \approx -0.49$, $\sigma_4 \approx -3.54$. В области (α_1, ∞) функция демпфирования однозначна и имеет один локальный экстремум $\sigma_1 = 0$ в точке α_2^* .

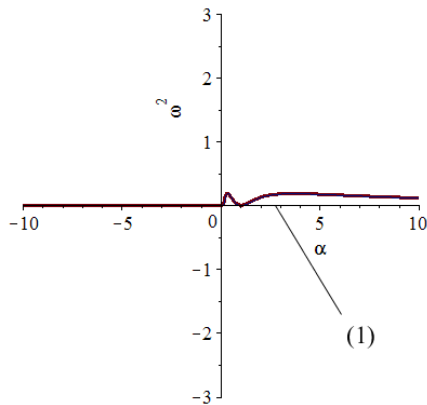


Рис. 13. Частотная функция. (1) — экстремальный уровень.

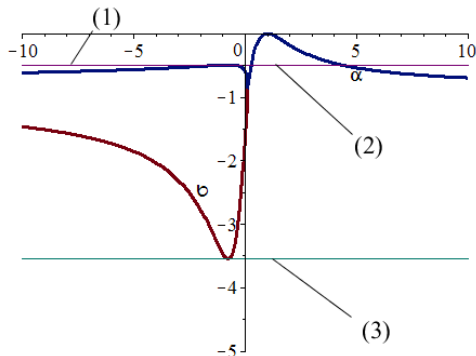


Рис. 14. Функция демпфирования: (1), (2), (3) — экстремальные уровни

4. $\gamma_0 > m_2$. Пусть $b_0 = 12$, $\gamma_0 \approx 12$. Условия реализации малости колебаний нарушаются на интервале $\alpha \in (-\infty, \alpha_1) \cup (\alpha_2, \infty)$, где $\alpha_1 = 0.44$, $\alpha_2 = 2.56$. Для параметров $b_0 = 12$, $m_1 = 3$, $m_2 = 4$, $k_0 = 3$ корни уравнения (42) имеют соответствующие вещественные $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 \approx -0.26$, $\sigma_4 \approx -6.74$ и мнимые части $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$, $\omega_3 = 0$, $\omega_4 = 0$. Соответствующие частотная функция и функция демпфирования приведены на рис. 15 и 16.

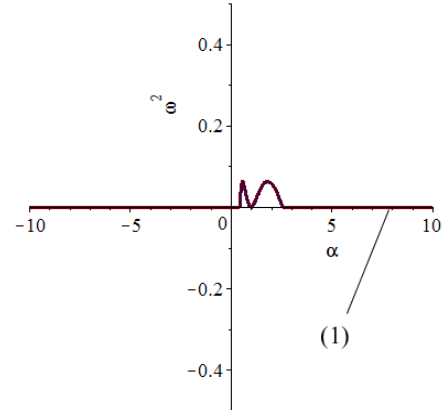


Рис. 15. Частотная функция. (1) — экстремальный уровень

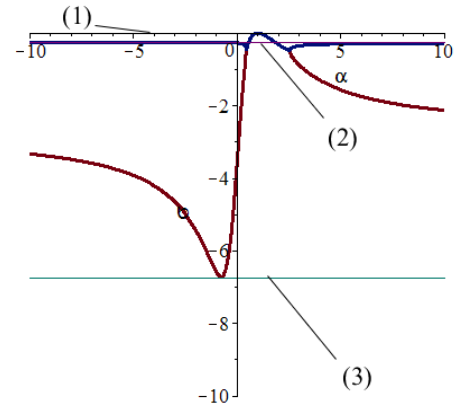


Рис. 16. Функция демпфирования. (1), (2), (3) — экстремальные уровни

На интервале $(-\infty, \alpha_1) \cup (\alpha_2, \infty)$ частотная функция равна нулю. В свою очередь, функция затухания в интервале (α_1, α_2) однозначна и достигает одного экстремального значения в точке α_2^* , которые составляют $\sigma_1 = 0$. В области $(-\infty, \alpha_1)$ функция затухания двузначна и достигает одновременно двух экстремальных значений $\sigma_3 \approx -0.26$, $\sigma_4 \approx -6.74$ в точке α_1^* . В области (α_2, ∞) функция двузначна, но внутренних экстремумов не имеет.

5. На рис. 17 и 18 представлены вырожденные случаи, когда $b_0 = 50$, $\gamma_0 \approx 208$. Для параметров $b_0 = 50$, $m_1 = 3$, $m_2 = 4$, $k_0 = 3$ корни уравнения (42) имеют соответствующие вещественные $\sigma_1 \approx 0$, $\sigma_2 \approx 0$, $\sigma_3 \approx -0.06$, $\sigma_4 \approx -29.10$ и мнимые части $\omega_1 \approx 0$, $\omega_2 \approx 0$, $\omega_3 \approx 0$, $\omega_4 \approx 0$.

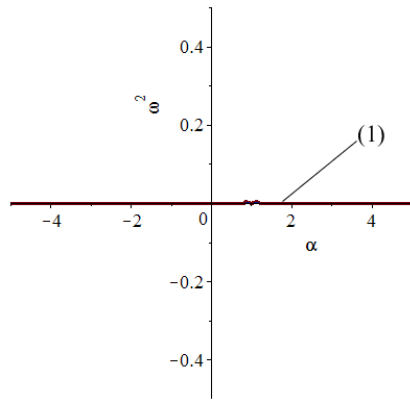


Рис. 17. Частотная функция. (1) — экстремальный уровень

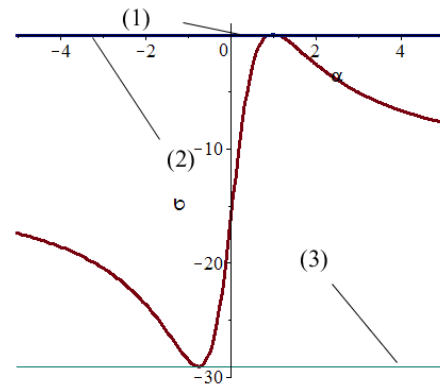


Рис. 18. Функция демпфирования. (1), (2), (3) — экстремальные уровни

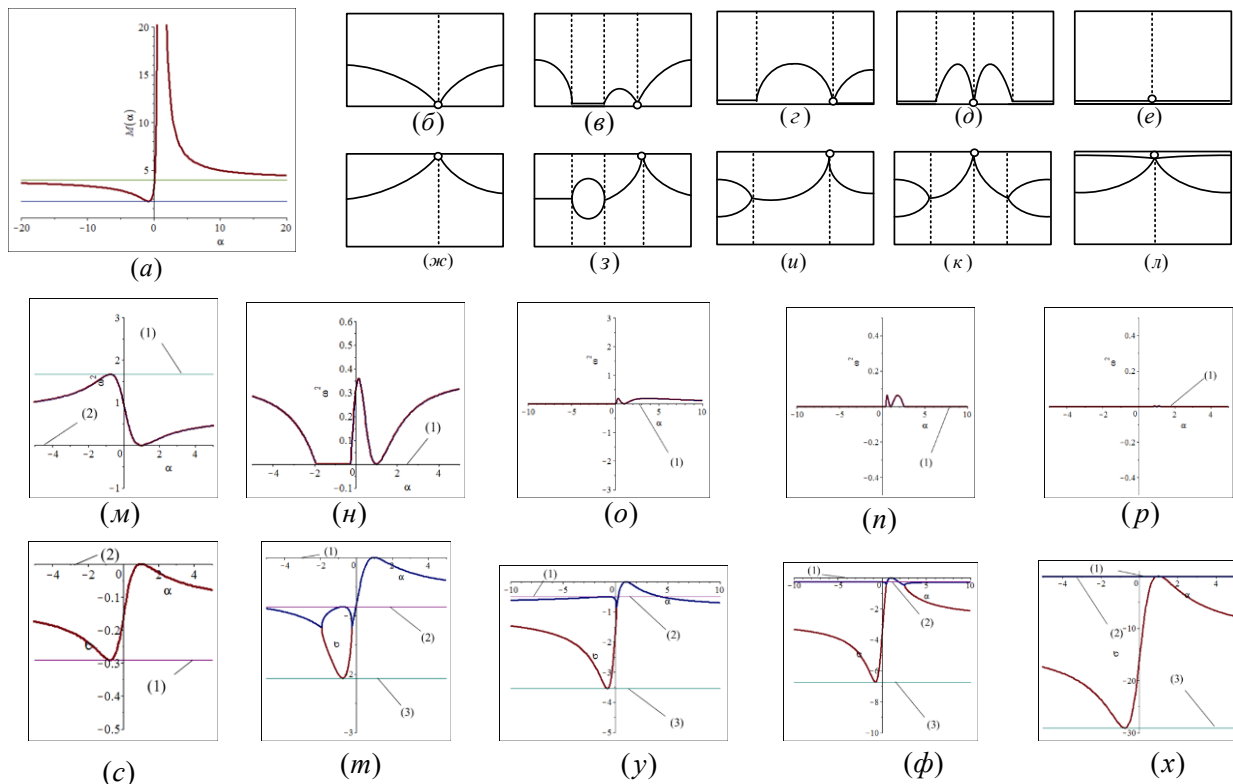


Рис. 19. Особенности частотных функций и функций демпфирования: а — график параметризующей функции; б-е — пиктограммы частотных функций $m-p$; ж-л — пиктограммы функций демпфирования $c-x$; м-р — графики частотных функций; с-х — графики функций демпфирования

Таким образом, частотная функция $\omega^2(\alpha)$ и функции демпфирования $\sigma(\alpha)$, существенным образом зависят от выполнения условия «малости» сил трения, которые разделяют области определения соответствующих функций на специальные множества коэффициентов форм.

Представленные пиктограммы на рис. 19 (б) – (л), сопоставленные графикам функций на рис. 19 (м) – (х), отражают топологические особенности графиков частотной функции и функции демпфирования, в частности, в виде одной непрерывной гладкой кривой с единственным нулевым значением, наличия точек раздвоявания одной кривой на две, двух не пересекающихся кривых или «кольца», касания графика граничной точки области (равенство функции нулю в точке или на интервале) и др.

Таким образом, формы частотной функции и функции демпфирования, в частности, экстремальные значения, нулевые значения, определяются особенностями собственных частот и диссипативных коэффициентов форм движений механической колебательной системы, образованной двумя массоинерционными элементами, соединенными пружиной с учетом сил вязкого трения.

Заключение. В качестве результатов исследований особенностей частотных функций и функций демпфирования для механических колебательных систем, образованных двумя массоинерционными элементами, соединенными пружиной, с учетом сил вязкого трения, можно сделать ряд выводов.

1. Разработан метод построения частотной функции и функции демпфирования аргумента коэффициента связности форм движений. На основе разработанного

метода показано, что формы графиков частотной функции и функции демпфирования отражают в своих экстремальных значениях собственные частоты и диссипативные коэффициенты движений механических колебательных систем с учетом сил вязкого трения. В частности, для механических колебательных систем, образованных двумя массоинерционными элементами, соединенными пружиной, с учетом сил вязкого трения, частотная функция и функция демпфирования имеют нулевые экстремальные значения, что соответствует существованию одной нулевой собственной частоты колебания.

2. Показано, что частотная функция и функции демпфирования аргумента коэффициента связности форм движений могут быть представлены в двух видах, а именно для «малых» и «больших» сил вязкого трения соответственно. В частности, для «малых» сил вязкого трения частотная функция принимает положительные значения, а функция демпфирования имеет одну отрицательную компоненту, вместе с тем, для «больших» сил вязкого трения частотная функция принимает нулевые значения, а функция демпфирования имеет две отрицательные компоненты.

3. Показано, что форма частотной функции и функции демпфирования аргумента коэффициента связности форм движений определяется параметрами механической колебательной системы. Для определения вариантов форм частотных функций и функций демп-

фирования, соответствующих семейству механических систем заданной структуры, предложен метод параметризующей функции, сопоставляющий параметрами системы формы частотных функций и функций демпфирования, обладающих топологическими особенностями, представляющими собой критерий классификации механических колебательных систем.

4. Показано, что формы частотных функций и функций демпфирования, сопоставленные семейству механических колебательных систем из двух массоинерционных элементов, соединенных упругим элементом с учетом сил вязкого трения, определяются наличием одного ненулевого и одного нулевого экстремального значения, что соответствует одной ненулевой и одной нулевой частоте собственных колебаний исходной системы. Вместе с тем, существуют такие механические колебательные системы заданной структуры, что соответствующие им частотные функции и функции демпфирования для двух различных дополнительных коэффициентов связности форм движения имеют два совпадающих между собой и отличных от остальных экстремальных значения.

5. Разработанный метод построения частотных функций и функций демпфирования может быть обобщен на механические колебательные системы, включающие в свой состав устройства для преобразования движений.

Литература

1. Clarence W. de Silva. Vibration. Fundamentals and Practice. Boca Raton, London, New York, Washington, D.C.: CRC Press, 2000. 957 p.
2. Harris C.M., Crede C.E. Shock and Vibration Handbook. New York: McGraw-Hill Book Co, 2002. 1457 p.
3. Iwnicki Simon. Handbook of railway vehicle dynamics. CRC Press Taylor & Francis Group, 2006. 527 p.
4. Ганиев Р.Ф., Кононенко В.О. Колебания твердых тел. М.: Наука, 1976. 432 с.
5. Хохлов А.А. Динамика сложных механических систем. М.: МИИТ, 2002. 172 с.
6. Banakh L., Kempner M. Vibrations of Mechanical Systems with Regular Structure, Berlin; Heidelberg: Springer, 2010. 262 p.
7. Karnovsky I.A., Lebed E. Theory of Vibration Protection, Springer International Publishing, Switzerland, 2016. 708 p.
8. Kolovsky M.Z. Nonlinear Dynamics of Active and Passive Systems of Vibration Protection-Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1999. 429 p.
9. Rocard Y. Dynamique generale des vibrations. Paris: Masson, 1949. 179 p.
10. Eliseev S.V., Eliseev A.V. Theory of Oscillations. Structural Mathematical Modeling in Problems of Dynamics of Technical Objects. Series: Studies in Systems, Decision and Control, V. 252, Springer International Publishing, Cham, 2020. 521 p.
11. Хэммонд П. Теория обратной связи и её применения. М.: Физматгиз, 1961. 423 с.
12. Емельянов С.В., Коровин С.К. Новые типы обратной связи: Управление при неопределенности. М.: Наука, 1997. 352 с.
13. Елисеев А.В., Кузнецов Н.К., Московских А.О. Динамика машин. Системные представления, структурные схемы и фазовые диаграммы. М.: Наука, 2018. 381 с.
14. Cheng Zeng, Shan Liang, Yongsheng Sun, Yingying Su. Discrete dynamics analysis for nonlinear collocated multivariable mass-damper-spring intelligent mechanical vibration systems // Journal of Vibroengineering. 2014. V. 16, Issue 2. P. 633-644.
15. Wang Xuan, Zhang Jiafan, Ouyang Huajiang, Zheng Xiao, Ye Jianping. Vibration analyses of linear isolators incorporating a quasi-zero stiffness and an inerter simultaneously // Vibroengineering PROCEDIA. 2020. V. 32. P. 69-74.
16. Martin Sturm. Modification of the motion characteristics of a one-mass linear vibratory conveyor // Vibroengineering PROCEDIA. 2018. V. 19. P. 17-21.
17. Стретт Дж.В. Теория звука. М.: ГИТТЛ, 1955. Т. 1. 503 с.
18. Елисеев С.В. Прикладной системный анализ и структурное математическое моделирование (динамика транспортных и технологических машин: связность движений, вибрационные взаимодействия, рычажные связи): моногр. Иркутск: ИрГУПС, 2018. 692 с.
19. Хоменко А.П., Елисеев С.В. Развитие энергетического метода определения частот свободных колебаний механических систем // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2016. № 1 (49). С. 8-19.
20. Елисеев А.В. Частотная функция и функция демпфирования в оценке динамических процессов в механических колебательных системах с симметрией // Advanced Engineering Research. 2020. V. 20. № 4. P. 360-369.

References

1. Clarence W. de Silva. Vibration. Fundamentals and Practice. Boca Raton, London, New York, Washington, D.C.: CRC Press, 2000. 957 p.
2. Harris S.M., Cred C.E. Shock and Vibration Handbook. New York: McGraw-Hill books, 2002, 1457 p.

3. Iwnicki Simon. Handbook of railway vehicle dynamics. CRC Press Taylor & Francis Group, 2006. 527 p.
4. Ganiev R.F., Kononenko V.O. Vibrations of solids. M.: Nauka, 1976. 432 p.
5. Khokhlov A.A. Dynamics of complex mechanical systems. M.: MIIT, 2002. 172 p.
6. Banakh L., Kempner M. Vibrations of Mechanical Systems with Regular Structure, Berlin; Heidelberg: Springer, 2010. 262 p.
7. Karnovsky I.A., Lebed E. Theory of Vibration Protection, Springer International Publishing, Switzerland, 2016. 708 p.
8. Kolovsky M.Z. Nonlinear Dynamics of Active and Passive Systems of Vibration Protection-Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1999. 429 p.
9. Rocard Y. Dynamique generale des vibrations. Paris: Masson, 1949. 179 p.
10. Eliseev S.V., Eliseev A.V. Theory of Oscillations. Structural Mathematical Modeling in Problems of Dynamics of Technical Objects. Series: Studies in Systems, Decision and Control, V. 252, Springer International Publishing, Cham, 2020. 521 p.
11. Hammond P. Feedback Theory and its applications. M.: Fizmatgiz, 1961. 423 p.
12. Emelyanov S.V., Korovin S.K. New types of feedback: Control under uncertainty. M.: Nauka, 1997. 352 p.
13. Eliseev A.V., Kuznetsov N.K., Moskovskikh A.O. Dynamics of machines. System representations, structural schemes and connections of elements: monograph. M.: Innovacionnoe mashinostroenie, 2019. 381 p.
14. Cheng Zeng, Shan Liang, Yongsheng Sun, Yingying Su. Discrete dynamics analysis for nonlinear collocated multivariable mass-damper-spring intelligent mechanical vibration systems // Journal of Vibroengineering. 2014. V. 16, Issue 2. P. 633-644.
15. Wang Xuan, Zhang Jiafan, Ouyang Huajiang, Zheng Xiao, Ye Jianping. Vibration analyses of linear isolators incorporating a quasi-zero stiffness and an inerter simultaneously. Vibroengineering PROCEDIA. 2020. V. 32. P. 69-74.
16. Martin Sturm. Modification of the motion characteristics of a one-mass linear vibratory conveyor. Vibroengineering PROCEDIA. 2018. V. 19. P. 17-21.
17. Strett J.V. Theory of sound. M.: GITTL, 1955. V. 1. 503 p.
18. Eliseev S.V. Applied system analysis and structural mathematical modeling (dynamics of transport and technological machines: connectivity of movements, vibration interactions, lever connections): monogr. Irkutsk: IrGUPS, 2018. 692 p.
19. Khomenko A.P., Eliseev S.V. Development of the energy method for determining the frequencies of free vibrations of mechanical systems // Sovremennye tehnologii. Sistemnyj analiz. Modelirovanie. 2016. № 1 (49). P. 8-19.
20. Eliseev A.V. Frequency function and damping function in the evaluation of dynamic processes in mechanical oscillatory systems with symmetry // Advanced Engineering Research. 2020. V. 20. № 4. P. 360-369.