УДК 536.2 DOI:10.18324/2077-5415-2020-4-75-79

К исследованию теплообмена на начальном термическом участке пленки жидкости

Ю.В. Видин[1a], А.А. Федяев[2b], Р.В. Казаков[1c], В.Н. Федяева[2d]

[1] Политехнический институт Сибирского федерального университета, ул. Киренского, 26, Красноярск, Россия
[2] Братский государственный университет, ул. Макаренко, 40, Братск, Россия
[a] zlobinsfu@mail.ru, [b, d] vends1@mail.ru , [c] roman.v.kazakov@gmail.com
[a] https://orcid.org/0000-0002-3777-6676, [b] https://orcid.org/0000-0001-6233-3757,
[c] https://orcid.org/0000-0001-7861-0253, [d] https://orcid.org/0000-0001-7320-9727
Статья поступила 11.11.2020, принята 18.11.2020

В статье рассмотрен аналитический метод расчета температурного поля в плоском ламинарном слое жидкости на начальном термическом участке ее движения. В практической деятельности такие участки различных конструкций широко распространены во многих отраслях промышленности. Это различные канальные течения в металлургических агрегатах, многочисленные виды трубопроводов, элементы ядерных реакторов и двигателей внутреннего сгорания, летательных аппаратов и т. д. Математическое исследование данной задачи представляет собой сложную проблему. Согласно предлагаемому методу многослойная конструкция заменяется эквивалентным замещающим телом с линейной зависимостью коэффициентов переноса от пространственной координаты. Решение данной задачи основано на использовании хорошо изученных функций Бесселя, которые в табличном виде широко представлены во многих известных научных отечественных и зарубежных источниках. Кроме того, они, как правило, имеют сравнительно доступные асимптотические представления для разных диапазонов аргументов. С использованием аппарата функций Бесселя были получены достаточно простые и удобные для аналитических расчетов характеристические уравнения для определения собственных чисел. Полученные характеристические уравнения обладают высокой точностью, вполне достаточной для инженерных расчетов. Показано, что с помощью различных функций Бесселя могут быть аналитически решены многие задачи математической физики, имеющие важное прикладное значение.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение энергии; эквивалентное замещающее тело; температурное поле; теплофизические свойства; коэффициенты переноса; аналитическое решение; собственные функции; собственные числа; функции Бесселя.

On the study of heat transfer at the initial thermal section of a liquid film

Yu.V. Vidin[1a], A.A. Fedyaev[2b], R.V. Kazakov[1c], V.N. Fedyaeva[2d]

[1] Polytechnical Institute of Siberian Federal University; 26a, Kirensky St., Krasnoyarsk, Russia
[2] Bratsk State University; 40, Makarenko St., Bratsk, Russia
[a] zlobinsfu@mail.ru, [b, d] vends1@mail.ru , [c] roman.v.kazakov@gmail.com
[a] https://orcid.org/0000-0002-3777-6676, [b] https://orcid.org/0000-0001-6233-3757,
[c] https://orcid.org/0000-0001-7861-0253, [d] https://orcid.org/0000-0001-7320-9727
Received 11.11.2020, accepted 18.11.2020

The article considers an analytical method for calculating the temperature field in a flat laminar layer of a liquid at the initial thermal section of its movement. In practice, such sections of various structures are widely distributed in various industries. These can be various channel flows in metallurgical units, numerous types of pipelines, elements of nuclear reactors, internal combustion engines, aircraft, etc. The mathematical study of this problem is a complex problem. According to the proposed method, the multilayer structure is replaced by an equivalent replacement body with a linear dependence of the transfer coefficients on the spatial coordinate. The solution of this problem is based on the use of well-studied Bessel functions, which are widely presented in tabular form in many well-known scientific domestic and foreign sources. In addition, they also tend to have relatively accessible asymptotic representations for different ranges of arguments. Using the Bessel function apparatus, quite simple and convenient for analytical calculations characteristic equations for determining eigenvalues have been obtained. The resulting characteristic equations have high accuracy, which is quite sufficient for engineering calculations. It is shown that with the help of various Bessel functions, many problems of mathematical physics, which are of great applied importance, can be analytically solved.

Keywords: differential energy equation; equivalent substitutive body; temperature field; thermophysical properties; transfer coefficients; analytical solution; eigenfunctions; eigenvalues; Bessel functions.

Введение. В статье [1] предложен аналитический метод расчета температурного поля в плоском ламинарном слое жидкости на начальном термическом участке ее движения. При этом за основу было принято дифференциальное уравнение энергии, представленное в форме безразмерного соотношения:

$$\varphi(Y)\frac{\partial\vartheta}{\partial X}=\frac{\partial^2\vartheta}{\partial Y^2}, \qquad (1)$$

где функция изменения скорости по толщине пленки $\varphi(Y)$ обычно аппроксимируется квадратичной параболой [2; 3]:

$$\varphi(Y)=2Y-Y^2. \qquad (2)$$

Постановка и решение задачи. Для получения сравнительно простого инженерного решения сформулированной задачи в [1–3] было принято допущение, что вместо выражения (2) целесообразно использовать условие:

$$\varphi(Y)=Y. \qquad (3)$$

При такой аппроксимации функции $\varphi(Y)$ полученное решение рассматриваемой задачи [2] является граничной оценкой по отношению к фактическому температурному полю $\vartheta(X,Y)$.

Для повышения степени точности расчета искомого распределения температуры при одновременном сохранении доступности математических выражений целесообразно вместо условия (3) ввести соотношение:

$$\varphi(Y)=\sqrt{Y}. \qquad (4)$$

Аппроксимация вида (4) существенно ближе соответствует формуле (2), чем (3).

При этом формальный вид аналитического решения задачи остается без изменений, т. е.:

$$\vartheta(X,Y)=\sum_{n=1}^{\infty}A_nK_n(Y)\exp(-\mu_n^2X) \qquad (5)$$

Однако для нахождения собственных функций $K_n(Y)$ и собственных значений μ_n тогда приходится исследовать несколько иную задачу Штурма – Лиувилля, а именно:

$$K''+\mu^2\sqrt{Y}K=0, \qquad (6)$$

$$K'=0 \text{ при } Y=0, \qquad (7)$$

$$K'=-BiY \text{ при } Y=1. \qquad (8)$$

Для решения дифференциального уравнения (6) так же, как и в работе [1], можно использовать специальные функции Бесселя подходящего дробного порядка [4–6], а конкретно:

$$K(Y)=\sqrt{Y}[BJ_{\frac{2}{5}}(\frac{4\mu}{5}Y^{\frac{5}{4}})+J_{-\frac{2}{5}}(\frac{4\mu}{5}Y^{\frac{5}{4}})], \qquad (9)$$

где $J_{\frac{2}{5}}(\frac{4\mu}{5}Y^{\frac{5}{4}})$ и $J_{-\frac{2}{5}}(\frac{4\mu}{5}Y^{\frac{5}{4}})$ функции Бесселя 1-го рода и порядка 2\5 и –2\5 соответственно.

К сожалению, табличных значений таких функций пока нет. Если принять постоянную $B=0$, то формула (9) будет удовлетворять условию (7). Следовательно, собственные функции задачи (6) – (8) тогда принимают более простой вид:

$$K_n(Y)=\sqrt{Y}J_{-\frac{2}{5}}(\frac{4\mu}{5}Y^{\frac{5}{4}}). \qquad (10)$$

При этом в случае порядка –2/5 можно записать выражение [5]:

$$J_{-\frac{2}{5}}(Z)=\frac{(\frac{Z}{2})^{-\frac{2}{5}}}{\Gamma(\frac{3}{5})}-\frac{(\frac{Z}{2})^{\frac{8}{5}}}{\Gamma(\frac{8}{5})}+\frac{(\frac{Z}{2})^{\frac{18}{5}}}{2\Gamma(\frac{13}{5})}-\frac{(\frac{Z}{2})^{\frac{28}{5}}}{6\Gamma(\frac{18}{5})}+\ldots, \qquad (11)$$

где:

$$Z=\frac{4\mu}{5}Y^{\frac{5}{4}}, \qquad (12)$$

а $\Gamma(\frac{3}{5}),\Gamma(\frac{8}{5}),\Gamma(\frac{13}{5}),\Gamma(\frac{18}{5})$ и т. д. гамма-функции [3], для которых, как известно, существует рекуррентное соотношение [5], $\Gamma(X+1)=X\Gamma(X)$, т. е.:

$$\Gamma(\frac{8}{5})=\frac{3}{5}\Gamma(\frac{3}{5}),$$

$$\Gamma(\frac{13}{5})=\frac{8}{5}\Gamma(\frac{8}{5})=\frac{24}{25}\Gamma(\frac{3}{5}),$$

$$\Gamma(\frac{18}{5})=\frac{13}{5}\Gamma(\frac{13}{5})=\frac{312}{125}\Gamma(\frac{3}{5})$$

и аналогично далее.

Тогда зависимость (11) с учетом (12) примет вид:

$$J_{-\frac{2}{5}}(\frac{4\mu}{5}Y^{\frac{5}{4}})=\frac{1}{\Gamma(\frac{3}{5})(\frac{2\mu}{5})^{\frac{2}{5}}}\frac{1}{\sqrt{Y}}[1-\frac{5(\frac{2\mu}{5}Y^{\frac{5}{4}})^2}{3}+\frac{25(\frac{2\mu}{5}Y^{\frac{5}{4}})^4}{48}-\frac{125(\frac{2\mu}{5}Y^{\frac{5}{4}})^6}{1872}+\ldots]. \qquad (13)$$

Если сомножитель $\frac{1}{\Gamma(\frac{3}{5})(\frac{2\mu}{5})^{\frac{2}{5}}}$ ввести в коэффициент A_n ряда (5), то окончательное выражение (10) собственной функции исследуемой задачи с учетом (13) запишется в форме бесконечного степенного ряда:

$$K(Y)=1-\frac{4}{15}\mu^2Y^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{75}\mu^4Y^5-\frac{4}{14625}\mu^6Y^{\frac{15}{2}}+\ldots \qquad (14)$$

Это соотношение удовлетворяет как дифференциальному уравнению (6),так и условию (7).

Подставляя зависимость (14) в граничное условие (8), получим выражение для определения собственных значений μ:

$$\frac{2}{3}\mu^2-\frac{1}{15}\mu^4+\frac{2}{975}\mu^6-\ldots=Bi(1-\frac{4}{15}\mu^2+\frac{1}{75}\mu^4-\frac{4}{14625}\mu^6+\ldots). \qquad (15)$$

Для частного случая $Bi \Rightarrow \infty$ уравнение (15) принимает более простой вид:

$$1-\frac{4}{15}\mu^2+\frac{1}{75}\mu^4-\frac{4}{14625}\mu^6+...=0. \quad (16)$$

Зависимости (15) и (16) позволяют определить первое собственное значение μ_1 с достаточной точностью. Для нахождения корней μ_n(n = 2, 3…) они должны быть существенно расширены за счет учета последующих членов бесконечных сумм, что, естественно, серьезно усложнит расчеты.

Усеченные ряды в формуле (15) сравнительно быстро сходятся при небольших величинах μ_1. Так, если допустить, что $\mu_1 = 1$, то тогда соответствующее число Bi будет равно $Bi = 0{,}807$. Поэтому при умеренных Bi($Bi \le 1$) расчет μ_1 можно вести по упрощенной формуле:

$$\mu_1^2=\frac{10Bi+25}{Bi+5}-\sqrt{(\frac{10Bi+25}{Bi+5})^2-\frac{75Bi}{Bi+5}} \quad (17)$$

При больших значениях Bi нужно зависимость (15) преобразовать к алгебраическому уравнению 3-й степени, для решения которого могут быть применены методы, рекомендуемые в справочном пособии [7; 8].

Из уравнения (16) можно получить значение первого корня μ_1 при $Bi \Rightarrow \infty$, которое будет равно μ_1 = 2,1865. Таким образом, для интервала:

$$0 \le Bi < \infty \;\; 0 \le \mu_1 \le 2{,}1865.$$

С целью увеличения вычислительных возможностей предлагаемого в статье метода целесообразно при больших величинах аргумента $\frac{4\mu}{5}Y^{\frac{5}{4}}$ использовать для выбранной дробной функции Бесселя следующее математическое приближенное выражение [3]:

$$J_{-\frac{2}{5}}(Z)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi Z}}\cos(Z-\frac{\pi}{20}), \quad (18)$$

где под Z нужно в рассматриваемом случае понимать комплекс (12), но удовлетворяющий требованию:

$$Z=\frac{4\mu}{5}Y^{\frac{5}{4}}>3. \quad (19)$$

На основе соотношения (18) может быть выведено дополнительное характеристическое уравнение, необходимое для определения корней μ_n высокого порядка ($n \ge 2{,}3$).

Выполняя с этой целью ряд математических операций, удается получить сравнительно несложное уравнение для нахождения искомых собственных чисел μ_n ($n \ge 2$):

$$\mu\,\mathrm{tg}(\frac{16\mu-\pi}{20})=Bi-\frac{3}{4}. \quad (20)$$

Отсюда, в частности, следует, что при $Bi=\frac{3}{4}$ корни μ_n легко рассчитываются по весьма простой зависимости:

$$\mu_n=\frac{20n-19}{16}\pi, \quad (21)$$

где n = 2,3… и т. д.

Если же $Bi \Rightarrow \infty$, то корни уравнения (20) будут равны:

$$\mu_n=\frac{20n-9}{16}\pi. \quad (22)$$

Значения первых трех корней характеристических уравнений (15) и (20)

Bi	μ_1	μ_2	μ_3
0	0	3,8850	7,9325
0,5	0,8159	4,0462	8,0113
0,75	0,9717	4,1233	8,0503
1,0	1,0901	4,1977	8,0890
2,0	1,3943	4,4646	8,2386
5,0	1,7563	5,0035	8,6228
10	1,9400	5,4239	9,0460
50	2,1332	5,9369	9,7691
∞	2,1865	6,0868	10,0138

Коэффициент An решения (5) могут быть с учетом ортогональности $K_n(Y)$ рассчитаны из условия $\vartheta(0,Y)=1$, т. е.:

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_nK_n(Y)=1 \quad (23)$$

на интервале $0 \le Y \le 1$.

Выводы. Необходимо отметить, что более широкое применение дробных функций Бесселя позволяет осуществлять с помощью сравнительно простых аналитических зависимостей исследования многих современных задач математической физики, и в частности теплофизических [9–11]. При использовании рекомендуемых математических решений появляется возможность производить теоретические расчеты как на инерционной, так и на регулярной стадиях течения пленки жидкости на поверхности [12–14], т. е. как при малых значениях продольной координаты X, так и в случае, когда $X \ge 0{,}5$.

Заключение. В работе предложен аналитический метод расчета теплообмена на начальном термическом участке пленки жидкости.

В дополнение к разработанному приближенному аналитическому методу определения собственных функция изменения скорости по толщине пленки $\varphi(Y)$ можно предложить более строгие математические выражения для расчета $K_1(Y)$ и μ_1 рассматриваемой задачи. Для этого целесообразно представить искомое решение в форме полинома:

$$K_1(Y)=1+aY+bY^2+cY^3+dY^4+eY^5+fY^6+gY^7+hY^7+iY^9 \quad (24)$$

Неопределенные коэффициенты которого *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *i* находятся из условия его частичного удовлетворения дифференциальному уравнению:

$$K_1'' + \mu_1^2(2Y - Y^2)K_1 = 0 \qquad (25)$$

Осуществляя эту несложную операцию легко получить искомые коэффициенты:

$$a = b = c = 0;\ c = -\frac{\mu_1^2}{3};\ d = \frac{\mu_1^2}{12};\ f = \frac{\mu_1^4}{45};$$

$$g = -\frac{\mu_1^4}{84};\ h = \frac{\mu_1^4}{672};\ i = -\frac{\mu^6}{1620}.$$

Тогда первая собственная функция $K_1(Y)$ может быть записана в виде сравнительно простого усеченного степенного ряда.

$$K_1(Y) = 1 - \frac{\mu_1^2}{3}Y^3 + \frac{\mu_1^2}{12}Y^5 + \frac{\mu_1^4}{45}Y^6 - \frac{\mu_1^4}{84}Y^7 + \frac{\mu_1^4}{672}Y^8 - \frac{\mu_1^6}{1620}Y^9 \qquad (26)$$

Эта формула удовлетворяет условию (7). Подставляя (26) в зависимость (8), выводим характеристическое уравнение для расчета первого собственного числа μ_1:

$$\frac{2}{3}\mu_1^2 - \frac{13}{210}\mu_1^4 + \frac{\mu_1^6}{180} = Bi(1 - \frac{\mu_1^2}{4} + \frac{119}{10080}\mu_1^4 - \frac{\mu_1^6}{1620}) \qquad (27)$$

Очевидно, что при $Bi \Rightarrow 0$ выражение (27) упрощается:

$$1 - \frac{\mu_1^2}{4} + \frac{119}{10080}\mu_1^4 - \frac{\mu_1^6}{1620} = 0 \qquad (28)$$

Из (28) следует, что максимальна величина первого корня μ_1 равняется $\mu_1 = 2{,}1956$, т. е. имеет место вполне удовлетворительное согласование между выражениями (16) и (28).

Это сопоставление в определенной степени подтверждает допустимость рекомендуемой аппроксимации типа (4).

Также рекомендуемый аналитический метод позволяет с помощью разных типов известных функций Бесселя эффективно исследовать весьма многочисленные теплофизические задачи, которые часто встречаются в инженерной практике. При этом могут быть охвачены разнообразные типы граничных условий, в том числе и нелинейные.

Литература

1. Видин Ю.В., Иванов В.В., Казаков Р.В. Инженерные методы расчета задач теплообмена. Красноярск, СФУ, 2014. 167 с.
2. Видин Ю.В., Колосов В.В., Журавлева Л.В. Теплообмен и гидродинамика. Красноярск, Изд-во Красноярского политехнического ин-та, 1981. С. 75–80.
3. Собин В.М. Теплообмен в стекающей пленке жидкости на термическом начальном участке // Инженерно-физический журнал. 1980. Т. 39. № 4. С. 592–596.
4. Корнеев Б.Г. Введение в теорию Бесселевых функций. М.: Наука, 1971. 283 с.
5. Корнеев Б.Г. Некоторые задачи теории упругости и теплопроводности, решаемые в Бесселевых функциях. М.: Гос. изд-во физ-мат. лит., 1960. 458 с.
6. Ватсон Г.Н. Теория Бесселевых функций: в 2 т. М.: ИЛ, 1949. 219 с.
7. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. М.: Наука, 1977. 342 с.
8. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике. М.: Наука, 1965. 608 с.
9. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
10. Карслоу Г.С.,Егер Д.К. Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 487 с.
11. Беляев Н.М., Рядно А.А. Методы нестационарной теплопроводности. М.: Высшая школа, 1978. 328 с.
12. Видин Ю.В., Злобин В.С., Федяев А.А. Аналитический метод расчета нестационарного температурного поля при переменном коэффициенте теплопроводности // Системы. Методы. Технологии. 2019. № 1 (41). С. 57–60.
13. Видин Ю.В., Злобин В.С., Федяев А.А. К расчету нестационарного температурного поля плоского тела при экспоненциальной зависимости коэффициента теплопроводности от координаты // Системы. Методы. Технологии. 2019. № 2 (42). С. 55–59.
14. Видин Ю.В. Инженерные методы расчета процессов теплопереноса. Красноярск: Изд-во Красноярского политехнического ин-та, 1974. 144 с.

References

1. Vidin Yu.V., Ivanov V.V., Kazakov R.V. Engineering methods of calculation of heat transfer problems. Krasnoyarsk, SFU, 2014. 167 p.
2. Vidin Yu.V., Kolosov V.V., ZHuravleva L.V. Heat transfer and hydrodynamics. Krasnoyarsk, Izd-vo Krasnoyarskogo politekhnicheskogo in-ta, 1981. P. 75–80.
3. Sobin V.M. Heat transfer in a flowing liquid film at the thermal initial stage // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. 1980. V. 39. № 4. P. 592–596.
4. Korneev B.G. Iintroduction to the theory of Bessel functions. M.: Nauka, 1971. 283 p.
5. Korneev B.G. Some problems of the theory of elasticity and thermal conductivity solved in Bessel functions. M.: Gos. izd-vo fiz-mat. lit., 1960. 458 p.
6. Vatson G.N. Theory of Bessel functions: v 2 t. M.: IL, 1949. 219 p.
7. Yanke E., Emde F., Lyosh F. Special functions. M.: Nauka, 1977. 342 p.
8. Bronshtejn I.N., Semendyaev K.A. Handbook of mathematics. M.: Nauka, 1965. 608 p.
9. Lykov A.V. Theory of thermal conductivity. M.: Vysshaya shkola, 1967. 600 p.
10. Karslou G.S., Eger D.K. The thermal Conductivity of solids. M.: Nauka, 1964. 487 p.
11. Belyaev N.M., Ryadno A.A. Methods of unsteady thermal conductivity. M.: Vysshaya shkola, 1978. 328 p.
12. Vidin Yu.V., Zlobin V.S., Fedyaev A.A. Analytical method of calculation of non-stationary temperature field at variable coefficient of thermal conductivity // Sistemy. Metody. Tekhnologii. 2019. № 1 (41). P. 57–60.

13. Vidin Yu.V., Zlobin V.S., Fedyaev A.A. To the calculation of the non-stationary temperature field of a flat body at the exponential dependence of the thermal conductivity coefficient on the coordinate // Sistemy. Metody. Tekhnologii. 2019. № 2 (42). P. 55–59.
14. Vidin Yu.V. Engineering methods of calculation of heat transfer processes. Krasnoyarsk: Izd-vo Krasnoyarskogo politekhnicheskogo in-ta, 1974. 144 p.