

## Особенности динамики вибрационных технологических машин: системный анализ, структурное моделирование, рычажные связи

С.В. Елисеев<sup>a</sup>, С.К. Каргапольцев<sup>b</sup>, Р.С. Большаков<sup>c</sup>, А.В. Елисеев<sup>d</sup>

Иркутский государственный университет путей сообщения, ул. Чернышевского, 15, Иркутск, Россия

<sup>a</sup> eliseev\_s@inbox.ru, <sup>b</sup> kck@irgups.ru, <sup>c</sup> bolshakov\_rs@mail.ru, <sup>d</sup> eavsh@ya.ru

<sup>a</sup> <https://orcid.org/0000-0001-6876-8786>, <sup>b</sup> <https://orcid.org/0000-0002-4601-3099>,

<sup>c</sup> <https://orcid.org/0000-0002-1187-5932>, <sup>d</sup> <https://orcid.org/0000-0003-0222-2507>

Статья поступила 24.08.2020, принята 01.09.2020

*Предлагается методология разработки способов и средств оценки, коррекции и формирования динамических состояний вибрационных технологических машин. Цель исследования заключается в развитии методов системного анализа и разработке новых подходов в формировании динамических состояний рабочих органов вибрационных машин на основе введения в структуры колебательных систем дополнительные динамические связи, реализуемых рычажными механизмами. Развивается метод структурного математического моделирования, в рамках которого механическая колебательная система трансформируется в структурную схему эквивалентной в динамическом отношении системы автоматического управления. Предложено оригинальное техническое решение по использованию возможностей совместной динамики двух рычажных механизмов, элементы которого могут создавать при определенных условиях необходимые динамические эффекты. Разработан метод построения математической модели, обеспечивающий возможность оценки и измерения спектра динамических свойств исходной системы при выборе параметров настроечных средств. Получены аналитические соотношения для оценки структуры и форм распределения амплитуд колебаний точек рабочего органа по его длине. Предложены рекомендации по конструктивно-технической реализации возможности формирования динамического состояния рабочих органов вибрационных машин.*

**Ключевые слова:** вибрационные технологические машины; расчетные схемы; рычажные механизмы; структурные схемы; передаточные функции; межпарциальные связи; динамические состояния.

## Features of the dynamics of vibrating technological machines: system analysis, structural modeling, lever connections

S.V. Eliseev<sup>a</sup>, S.K. Kargapoltsev<sup>b</sup>, R.S. Bolshakov<sup>c</sup>, A.V. Eliseev<sup>d</sup>

Irkutsk State Transport University; 15, Chernyshevskiy St., Irkutsk, Russia

<sup>a</sup> eliseev\_s@inbox.ru, <sup>b</sup> kck@irgups.ru, <sup>c</sup> bolshakov\_rs@mail.ru, <sup>d</sup> eavsh@ya.ru

<sup>a</sup> <https://orcid.org/0000-0001-6876-8786>, <sup>b</sup> <https://orcid.org/0000-0002-4601-3099>,

<sup>c</sup> <https://orcid.org/0000-0002-1187-5932>, <sup>d</sup> <https://orcid.org/0000-0003-0222-2507>

Received 24.08.2020, accepted 01.09.2020

*A methodology for developing methods and tools for evaluating, correcting, and forming dynamic states of vibrating technological machines is proposed. The aim of the research is to develop methods of system analysis and new approaches to the formation of dynamic states of working bodies of vibrating machines based on the introduction of additional dynamic links into the structures of oscillatory systems, implemented by lever mechanisms. A method of structural mathematical modeling is developed, in which a mechanical oscillatory system is transformed into a block diagram of a dynamically equivalent automatic control system. An original technical solution is proposed to use the possibilities of joint dynamics of two lever mechanisms, the elements of which can create the necessary dynamic effects under certain conditions. A method for constructing a mathematical model is developed that provides the ability to evaluate and measure the spectrum of dynamic properties of the source system when selecting parameters of tuning tools. Analytical relations are obtained for estimating the structure and forms of distribution of oscillation amplitudes of working body points along its length. Recommendations on the design and technical implementation of the possibility of forming a dynamic state of the working bodies of vibrating machines are proposed.*

**Keywords:** vibration technological machines; design schemes; lever mechanisms; structural schemes; transfer functions; interpartial connections; dynamic states.

**Введение.** Решение задач динамики машин транспортного и технологического назначения, работающих при интенсивных внешних и внутренних вибрационных нагрузках, создаваемых взаимодействием узлов, агрегатов и деталей, основано во многих случаях на использовании математических моделей, что нашло отражение во

многих работах, в частности [1–4]. Возникающие при этом вопросы о выборе расчетных схем в большинстве случаев ориентированы на использование механических колебательных систем с несколькими степенями свободы с сосредоточенными или распределенными параметрами. Такие подходы характерны, в первую очередь, для

объектов транспорта, а также технологических вибрационных машин [5; 6].

Многофункциональность, сложная кинематика движений элементов машин, необходимость формирования и управления специфическими динамическими режимами находят отражение в усложнении расчетных схем и углублении детализации представлений о возможном спектре динамических свойств механических колебательных структур [7–9]. Интерес к расчетным схемам в виде механических колебательных систем во многом определяется возможностями линеаризации свойств системы и рассмотрением малых колебаний относительно положения статического равновесия или установившихся состояний, что предопределило интерес к использованию аналитического аппарата теории систем и автоматического управления, структурным методам математического моделирования, опирающимся на аналитический аппарат теории цепей, теории автоматического управления и др.

Применение методов структурного математического моделирования инициировало интерес к задачам использования дополнительных связей различного вида, эффектов связности движения элементов, проявления режимов динамического гашения колебаний, формирования узлов колебаний рабочих органов, распределения амплитуд колебаний и создания вибрационных полей элементов машин. В этом отношении большой интерес проявляется к различным формам введения и использования рычажных связей, формируемых в расчетных схемах технических объектов с помощью введения дополнительных связей на основе зубчатых, винтовых не самотормозящихся рычажных механизмов и устройств для преобразования движений [10–12].

Введение рычажных связей, как показывают исследования, обладает большим потенциалом в возможностях изменения, формирования и управления динамическим состоянием колебательных структур.

В предлагаемой статье развивается методологическая основа методов математического моделирования технических объектов, содержащих в своей структуре рычажные устройства или механизмы.

### **I. Некоторые общие положения, характерные для построения расчетных схем.**

Для многих технических объектов транспортного и технологического назначения работа в условиях интенсивного динамического нагружения, вибрационные формы взаимодействия элементов, узлов, агрегатов и рабочих органов в целом являются планируемыми или предсказуемыми условиями функционирования, что находит отражение в соответствующих конструктивно-технических решениях. Разработке способов и средств формирования, контроля и управления уровнем вибрационных взаимодействий уделяется серьезное внимание, что нашло отражение в технических документах.

Введение дополнительных связей в структуру колебательных систем можно отнести к числу достаточно эффективных приемов влияния на их динамическое состояние, что характерно для технических объектов железнодорожного, автомобильного транспорта, а также вибрационных технологических машин, используемых в горнодобывающей промышленности, строительной индустрии, химических производствах и др.

Наличие механизмов в структуре расчетных схем вибрационных технологических машин отличается многообразием форм, что предопределяется необходимостью управления динамическим состоянием рабочих органов в условиях изменения внешних и внутренних нагрузок и регламентов работы. В [13–15] приводятся характерные примеры использования механизмов различных видов в структурах вибрационных технологических машин. Влияние приносимых в колебательные структуры механизмов формирует дополнительные динамические связи, использование которых позволяет решать вопросы оценки, контроля, формирования и управления вибрационными полями рабочих органов или формированием и управлением их динамическими состояниями.

Вместе с тем введение рычажных связей оказывает воздействие на другие процессы, определяющие вибрационное взаимодействие элементов расчетных схем технических объектов, что требует развития методологического базиса в задачах построения и оценки динамических свойств систем, их специфических режимов и возможностей варьирования параметрами вибрации и распределения амплитуд структур их колебательных движений.

Построение математических моделей объектов, расчетные схемы которых рассматриваются в классе линейных механических колебательных систем, основано на использовании интегральных преобразований Лапласа с учетом ряда особенностей, которые отражают особенности внешних воздействий, имеющих вид гармонических функций и специфику преобразований (нулевые начальные условия) дифференциальных уравнений, получаемых при использовании формализма Лагранжа [4; 12].

В предлагаемой статье развивается и детализируется методическая основа подходов, связанных с разработкой технологий построения математических моделей для технических объектов, содержащих в своем составе рычажные механизмы и в целом представляющих собой механические колебательные системы с сосредоточенными параметрами.

### **II. Возможности детализации представлений о технологических вибрационных машинах и построение математических моделей.**

**1.** Рассматриваемый технический объект представлен расчетной схемой колебательной механической структуры, содержащей упругие, диссипативные и массоинерционные элементы, как показано на рис. 1.

На рис. 1 представлена расчетная схема вибрационной технологической машины, которая состоит из рабочего органа в виде твердого тела массой  $M$  и моментами инерции  $J$ , опирающегося через упругие элементы с жесткостями  $k_1$  и  $k_2$  на опорную поверхность.

В системе имеются два рычажных механизма с центрами вращения в тт.  $A_{10}$  и  $B_{10}$  (рис. 1). Каждый из рычагов имеет соответствующую длину стержней  $l_{01}$ ,  $l_{10}$  и  $l_{02}$ ,  $l_{20}$  (рис. 1), определяющих передаточное отношение рычагов  $i_1$ ,  $i_2$ . В тт.  $A$  и  $B$  рычаги связаны с пружинами  $k_1$  и  $k_2$ . Кроме этого, рычаги соединяются между собой в тт.  $C_2$ ,  $C_3$  через упругий элемент с жесткостью  $k_{01}$ ; между тт.  $C_2$ ,  $C_1$  через пружину с жесткостью  $k_{02}$ ; в тт.

$C_0, C_1$  имеется блок из параллельно соединенных между собой пружины с жесткостью  $k_{01}$  и демпфером вязкого трения  $b_2$ .

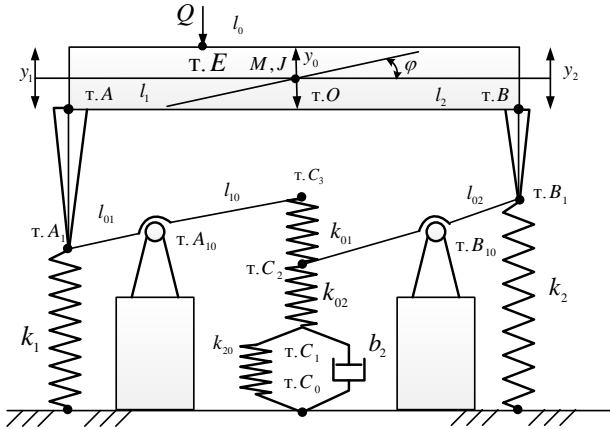


Рис. 1. Принципиальная схема вибрационной технологической машины

Блок из типовых элементов, обладающих параметрами жесткости,  $k_{01}, k_{02}$  и демпфера  $b_2$  образуют упруго-демпфирующий блок с приведенной динамической жесткостью  $k_{np}$  [4; 7].

На систему действует гармоническое силовое возмущение  $Q_1(t)$ , приложенное в т. Е; положение характерных точек системы и твердого тела приводится на рис. 1 как обозначение соответствующих расстояний между точками твердого тела  $l_{01}, l_1, l_2$ .

Движение системы может быть рассмотрено в системах координат  $y_1, y_2$ , а также в координатах  $y_0$  и  $\varphi$  (рис. 1). Между системами координат имеются соотношения:

$$\begin{aligned} y_0 &= ay_1 + by_2, \varphi = c(y_2 - y_1), \\ y_1 &= y_0 - l_1\varphi, y_2 = y_0 + l_2\varphi, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $a = \frac{l_1}{l_1 + l_2}, b = \frac{l_2}{l_1 + l_2}, c = \frac{1}{l_1 + l_2}$ ; в дальнейшем используется соотношение  $c_1 = \frac{l_0}{l_1 + l_2}$ .

2. Составление уравнений движения для исходной системы, расчетная схема которой приводится на рис. 1, в операторной форме, т. е. при использовании

интегральных преобразований Лапласа, предполагает предварительное получение системы дифференциальных уравнений во временной области с последующим преобразованием Лапласа при нулевых начальных условиях. Первый этап построения математической модели во временной области реализуется на основе известных технологий [4; 10], после предварительного определения выражений для кинетической и потенциальной энергии.

Опуская промежуточные выкладки, в том числе и интегральные преобразования, запишем систему уравнений в координатах изображений по Лапласу от обобщенных координат  $y_1, y_2$  в операторной форме, что составит:

$$\bar{y}_1(Ma^2 + Jc^2)p^2 + \bar{y}_1(k_1 + k_{01}i_1^2) - \bar{y}_2[(Mab + Jc^2)p^2 + k_{01}i_1i_2] = \bar{Q}(a + c_1), \quad (2)$$

$$\bar{y}_2(Mb^2 + Jc^2)p^2 + \bar{y}_2(k_2 + k_{01}i_2^2 + k_{np}) - \bar{y}_1[(Jc^2 - Mab)p^2 + k_{01}i_1i_2] = \bar{Q}(b - c_1), \quad (3)$$

где  $p = j\omega$  — комплексная переменная ( $j = \sqrt{-1}$ ), значок «-» означает изображение функции по Лапласу [2; 8].

3. В выражении (3) используется понятия приведенной жесткости, которое отображает упруго-диссипативные свойства трех элементов,  $k_{01}, k_{02}$  и  $b_2p$ , соединенных в упруго-диссипативный блок (рис. 1):

$$k_{np}(p) = \frac{(k_{20} + b_2p)k_{02}}{k_{20} + b_2p + k_{02}}. \quad (4)$$

Практическая реализация такого блока не представляет особого труда, что может быть выполнено, например, на пассивно-упругих элементах с дроссельным соединением и др. [14; 15].

4. Структурная схема системы представлена на рис. 2; система в координатах  $\bar{y}_1, \bar{y}_2$  имеет два внешних силовых воздействия, что оказывает влияние на связность движений.

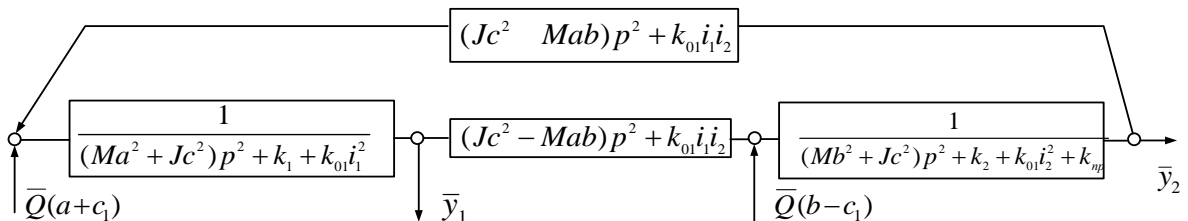


Рис. 2. Структурная схема системы по рис. 1

Структурная схема позволяет построить такие передаточные функции системы при наличии двух одновременно действующих входных возмущений:

$$\begin{aligned} W_1(p) &= \frac{\bar{y}_1}{\bar{Q}} = \\ &= \frac{(b - c_1)[(Mb^2 + Jc^2)p^2 + k_2 + k_{01}i_2^2 + k_{np}] + (a + c_1)[(Jc^2 - Mab)p^2 + k_{01}i_1i_2]}{A(p)}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} W_2(p) &= \frac{\bar{y}_2}{\bar{Q}} = \\ &= \frac{(a + c_1)[(Ma^2 + Jc^2)p^2 + k_1 + k_{01}i_1^2] + (b - c_1)[(Jc^2 - Mab)p^2 + k_{01}i_1i_2]}{A(p)}, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $A(p)$  является характеристическим частотным уравнением:

$$A(p) = [Ma^2 + Jc^2]p^2 + k_1 + k_0i_1^2 \times \\ \times [(Mb^2 + Jc^2)p^2 + k_2 + k_0i_2^2 + k_{np}] - \\ - [(Jc^2 - Mab)p^2 + k_0i_1i_2]^2 \quad (7)$$

5. При анализе динамических свойств системы необходимо учитывать, что пневмоблок, состоящий из упругого пневмобаллона и демпферной камеры, обладает приведенной жесткостью, соответствующей выражению (4).

При закрытом демпфере ( $b_2 \rightarrow \infty$ ) приведенная жесткость приобретает вид:

$$k_{np} = k_{02}, \quad (8)$$

т. е. работает (имеется в виду блок из демпферной камеры и камеры с объемом  $V_2$ ) как упругий элемент с жесткостью  $k_{02}$ . При  $b_2 \rightarrow 0$  блок также трансформируется в упругий элемент с жесткостью всего блока:

$$k'_{np}(p) = \frac{k_{20}k_{02}}{20 + k_{02}}. \quad (9)$$

Передаточные функции системы  $W_1(p)$ ,  $W_2(p)$ , определяемые выражениями (5), (6), отображают, по своей физической сути, особенности изменения податливости в точке приложения силового внешнего воздействия в зависимости от частоты. Предполагается, что внешние воздействия являются гармоническими функциями одной частоты, имеют нулевой сдвиг по фазе, но их амплитуды при одновременном возмущении по двум входам будут разными, что учитывается соответствующими коэффициентами  $(b - c_1)$  и  $(a + c_1)$ , в выражениях (5), (6). Отметим, что в расчетных схемах вибрационных технологических машин рассматриваемого типа одиночное возмущение  $Q$  оказывает влияние одновременно на оба входа системы с соответствующими

коэффициентами распределение воздействий.

Приведенная жесткость  $k_{np}$  структурного образования в составе механической цепи с рычажными связями является звеном, которое при определенных обстоятельствах ( $b_2 \rightarrow 0$ ,  $b_2 \rightarrow \infty$ ) может рассматриваться как обычная пружина жесткости, заданная выражениями (7) и (8) соответственно.

При  $b_2 \rightarrow 0$  система обладает режимом динамического гашения колебаний по координатам  $y_1$ ,  $y_2$ , что составляет:

$$\omega_{1dyn}^2 = \frac{(b - c_1)(k_2 + k_0i_2^2 + \frac{k_{02}k_{20}}{k_{02} + k_{20}}) + k_0i_1i_2(a + c_1)}{(b - c_1)(Mb^2 + Jc^2) + (a + c_1)(Jc^2 - Mab)}, \quad (10)$$

$$\omega_{2dyn}^2 = \frac{k_0i_1i_2(b - c_1) + (a + c_1)(k_1 + k_0i_1^2)}{(a + c_1)(Ma^2 + Jc^2) + (b - c_1)(Jc^2 - Mab)}. \quad (11)$$

В свою очередь, при  $b_2 \rightarrow \infty$  режимы динамического гашения колебаний могут быть реализованы на частотах:

$$\omega_{1dyn}^2 = \frac{(b - c_1)(k_2 + k_0i_2^2 + k_{02}) + k_0i_1i_2(a + c_1)}{(b - c_1)(Mb^2 + Jc^2) + (a + c_1)(Jc^2 - Mab)}, \quad (12)$$

$$\omega_{2dyn}^2 = \frac{k_0i_1i_2(b - c_1) + (a + c_1)(k_1 + k_0i_1^2)}{(a + c_1)(Ma^2 + Jc^2) + (b - c_1)(Jc^2 - Mab)}. \quad (13)$$

Соответствующим образом изменяется за счет введения  $k_{np}$  при  $b_2 \rightarrow 0$ ,  $b_2 \rightarrow \infty$  и характеристическое частотное уравнение (7), что отобразится на значениях частот собственных колебаний (или режимах резонанса).

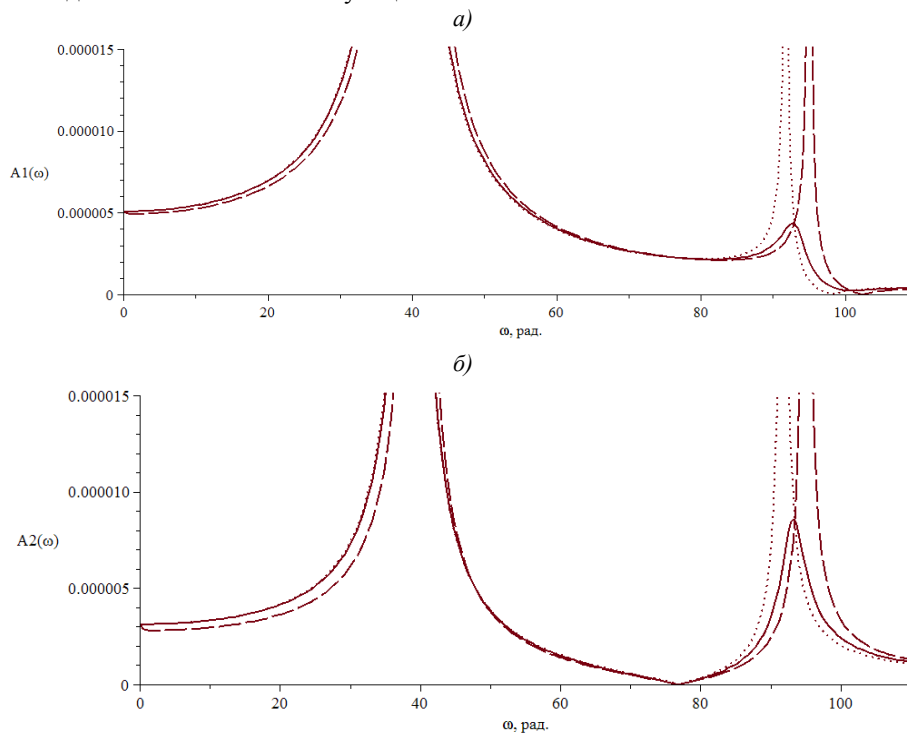


Рис. 3. Амплитудно-частотные характеристики системы при различных значениях коэффициента вязкого трения  $b_2$  в структурном блоке цепи рычажной связи: а) — амплитудно-частотная характеристика для передаточной функции  $W_1(p)$ ; б) — амплитудно-частотная характеристика для передаточной функции  $W_2(p)$ , где «...» —  $b_2 = 0$  Н с/м, «—» —  $b_2 = 1200$  Н с/м, «- -» —  $b_2 \rightarrow \infty$

В качестве модельных данных выбраны следующие значения:  $M = 150$  кг,  $l_1 = 0.6$  м,  $l_2 = 0.4$  м,  $l_3 = 0.2$  м,  $l_{01} = 0.1$  м,  $l_{10} = 0.1$  м,  $l_{02} = 0.1$  м,  $l_{20} = 0.12$  м,  $k_1 = 10^5$  Н/м,  $k_2 = 1.2 \cdot 10^5$  Н/м,  $k_{01} = 0.7 \cdot 10^5$  Н/м,  $k_{10} = 0.8 \cdot 10^5$  Н/м,  $k_{02} = 0.5 \cdot 10^5$  Н/м,  $k_{20} = 0.8 \cdot 10^5$  Н/м,  $J = 20$  кг м<sup>2</sup>.

### III. Особенности структурной математической модели; динамические свойства системы.

Структурная математическая модель в выбранной системе координат  $\bar{y}_1, \bar{y}_2$  может интерпретироваться как структурная схема эквивалентной в динамическом отношении системы автоматического управления, что представлено на рис. 2, для чего используется уравнение системы в операторной форме (1), (2). Технология построения и преобразования структурных математических моделей изложена в работах [4; 10].

Полученная структурная модель имеет два парциальных блока, соединенных между собой звеном, реализующим упруго-инерционную связь.

1. При «обнулении»  $\bar{y}_1$ , т. е. в режиме динамического гашения колебаний, т. А рабочего органа превращается в «узел колебаний»; амплитуды колебаний точек рабочего органа (твёрдого тела) будут распределяться по треугольному линейному закону. Аналогично соответствующий «узел колебаний» может быть перемещен в т. В на другой частоте динамического гашения колебаний.

Большими возможностями обладает использование передаточной функции межпарциальных связей:

$$W_{12}(p) = \frac{\bar{y}_2}{\bar{y}_1} = \frac{(a - c_1) [(Ma^2 + Jc^2)p^2 + k_1 + k_{01}i_1^2] - (b + c_1) [(Jc^2 - Mab)p^2 + k_{01}i_1i_2]}{(b + c_1) [(Mb^2 + Jc^2)p^2 + k_2 + k_{01}i_2^2 + k_{np}] + (a - c_1) [(Jc^2 - Mab)p^2 + k_{01}i_1i_2]} \quad (14)$$

Выбирая соответствующим образом параметры выражения (14), можно управлять положением центра колебаний, который предопределяет структуру вибрационного поля рабочего органа. Учет особенностей демпфирующих свойств системы возможен также при задании  $b_2 \neq 0$ . В этом случае частотное уравнение трансформируется в уравнение нечетного порядка, и

форма амплитудно-частотных характеристик системы будет отличаться от обычных представлений, но в целом отклонения от классических форм не будут критическими, поскольку и при  $b_2 = 0$ , и при  $b_2 \rightarrow \infty$  порядок частотного характеристического уравнения остается неизменным.

Для разработки алгоритмов управления динамическим состоянием системы с помощью изменения коэффициента демпфирования  $b_2$  лучше всего использовать, например, управляемый дроссель между демпферной камерой и пневмобаллоном, который опирается (соприкасается) на эту камеру, что предполагается в работе [4].

2. Передаточная функция пневмоблока определяется передаточной функцией, представленной выражением (4).

Динамическое состояние рабочего органа машины (если иметь в виду особенности распределения амплитуд колебаний точек вдоль рабочего органа) может быть определено с помощью передаточной функции межпарциальных связей (14). Подставляя в выражение (14)  $k_{np}$ , определяемое выражением (4), получим:

$$W_{12}(p) = \frac{\bar{y}_2}{\bar{y}_1} = \frac{(a + c_1) [(Ma^2 + Jc^2)p^2 + k_1 + k_{01}i_1^2] + (b - c_1) [(Jc^2 - Mab)p^2 + k_{01}i_1i_2]}{(b - c_1) [(Mb^2 + Jc^2)p^2 + k_2 + k_{01}i_2^2 + \frac{(k_{20} + b_2p)k_{02}}{k_{20} + b_2p + k_{02}}] + (a + c_1) [(Jc^2 - Mab)p^2 + k_{01}i_1i_2]} \quad (15)$$

Из анализа (10) следует, что при  $b_2 = 0$  передаточная функция межпарциальных связей (или коэффициент связности) позволяет получить по одному «режиму динамического гашения колебаний» по координатам  $u_1, u_2$ . Влияние силы сопротивления ( $b_2 \neq 0$ ) приводит к специфическим амплитудно-частотным характеристикам, когда ограничения проявляются на росте резонансных процессов и приводят к «размыванию» частот, соответствующих режимам динамического гашения колебаний, теряющих острую «нулевую» значимость на конкретной частоте.

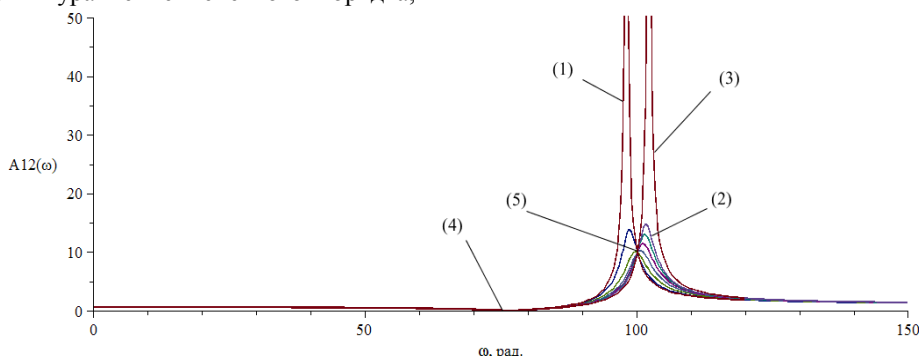


Рис. 4. Семейство амплитудно-частотных характеристик на интервале от 0 до 150 рад.: 1 — амплитудно-частотная характеристика для  $b_2 = 0$ ; 2 — характерная амплитудно-частотная характеристика для  $b_2 > 0$ ; 3 — амплитудно-частотная характеристика для  $b_2 \gg 1$ ; 4 — точка, в которой все амплитудно-частотные характеристики принимают нулевое значение (частота динамического гашения); 5 — точка сгущения значений амплитудно-частотных характеристик на фиксированной частоте

IV. Особенности динамических свойств системы с упруго-демпфирующими блоками. Полагая, что  $b_2 = 0$ , отметим, что выражения (4) трансформируются к

виду (9). Т. е. структурное преобразование из разнородных типовых элементов (диссипативных и упругих) преобразуется к виду упругого звена, получаемого по



следовательным соединением пружин с жесткостями  $k_{02}$  и  $k_{02}$ . В этом случае выражение (15) можно представить в виде:

$$W'_{12}(p) = \frac{\bar{y}_2}{\bar{y}_1} = \frac{(a + c_1) \left[ (Ma^2 + Jc^2)p^2 + k_1 + k_{01}i_1^2 \right] + (b - c_1) \left[ (Jc^2 - Mab)p^2 + k_{01}i_1i_2 \right]}{(b - c_1) \left[ (Mb^2 + Jc^2)p^2 + k_2 + k_{01}i_2^2 + k'_{np} \right] + (a + c_1) \left[ (Jc^2 - Mab)p^2 + k_{01}i_1i_2 \right]} \cdot (16)$$

Из (16) следует, что по координате  $y_2$  возможен режим динамического гашения и образование узла колебаний по частоте, определяемой выражением (11). В свою очередь, по координате  $y_1$  режим динамического гашения возможен на частоте, определяемой выражением (10). На этой частоте координата  $y_1$  может рассматриваться как узел колебаний, тем самым определяя распределение амплитуд колебания точек по длине рабочего органа по линейному закону.

Полагая, что  $b_2 \rightarrow \infty$ , отметим, что выражения (4) трансформируются к виду:

$$k_{np}(p) \rightarrow k''_{np} = k_{02}, \text{ при } b_2 \rightarrow \infty. \quad (15)$$

Соответствующая передаточная функция (15) принимает вид:

$$W''_{12}(p) = \frac{\bar{y}_2}{\bar{y}_1} = \frac{(a + c_1) \left[ (Ma^2 + Jc^2)p^2 + k_1 + k_{01}i_1^2 \right] + (b - c_1) \left[ (Jc^2 - Mab)p^2 + k_{01}i_1i_2 \right]}{(b - c_1) \left[ (Mb^2 + Jc^2)p^2 + k_2 + k_{01}i_2^2 + k''_{np} \right] + (a + c_1) \left[ (Jc^2 - Mab)p^2 + k_{01}i_1i_2 \right]} \cdot (16)$$

На рис. 4 представлены варианты амплитудно-частотных характеристик межпарциальных связей  $A(\omega) = |W_{12}(j\omega)|$ , соответствующих передаточных

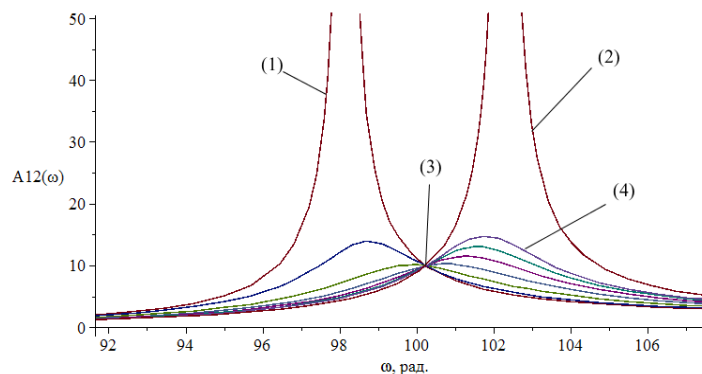
функций для различных значений  $b_2$ . В качестве данных для математической модели выбраны следующие значения:  $M = 50$  кг,  $l_1 = 0.6$  м,  $l_2 = 0.4$  м,  $l_3 = 0.2$  м,  $l_{01} = 0.1$  м,  $l_{10} = 0.1$  м,  $l_{02} = 0.1$  м,  $l_{20} = 0.12$  м,  $k_1 = 10^5$  Н/м,  $k_2 = 1.2 \cdot 10^5$  Н/м,  $k_{01} = 0.7 \cdot 10^5$  Н/м,  $k_{10} = 0.8 \cdot 10^5$  Н/м,  $k_{02} = 0.5 \cdot 10^5$  Н/м,  $k_{20} = 0.8 \cdot 10^5$  Н/м,  $J = 20$  кг м<sup>2</sup>.

На рис. 4 линия 1 представляет собой график амплитудно-частотной характеристики для параметра  $b_2 = 0$ , линия 2 представляет характерный график амплитудно-частотной характеристики для коэффициента  $b_2 > 0$ , линия 3 отображает предельное множество для графиков амплитудно-частотных характеристик в предположении, что  $b_2 \rightarrow \infty$ . Необходимо отметить две особенные точки для множества рассматриваемых графиков. Так, точка (4) и точка (5) представляют собой точки пересечения рассматриваемых графиков для различных значений  $b_2$ .

3. На рис. 5 представлено семейство графиков амплитудно-частотных характеристик, отображенных на более узком частотном диапазоне. На рисунке отчетливо видна точка сгущения графиков рассматриваемых амплитудно-частотных характеристик. При условии существования такой особенной точки она может быть интерпретирована как динамический режим, мало чувствительный к характеристике  $b_2$ .

В частности, на рис. 5 представлено семейство графиков амплитудно-частотных характеристик на интервале, включающем частоту динамического гашения, где 1 — точка обращения в ноль графиков рассматриваемого семейства амплитудно-частотных характеристик.

Таким образом, на графике семейства амплитудно-частотных характеристик можно отметить три особенных динамических состояния, не зависящие от характеристики  $b_2$ . Первое — это состояние при отсутствии внешнего возмущения, второе — режим динамического гашения, и третье состояние — режим нечувствительности на некоторой фиксированной частоте.

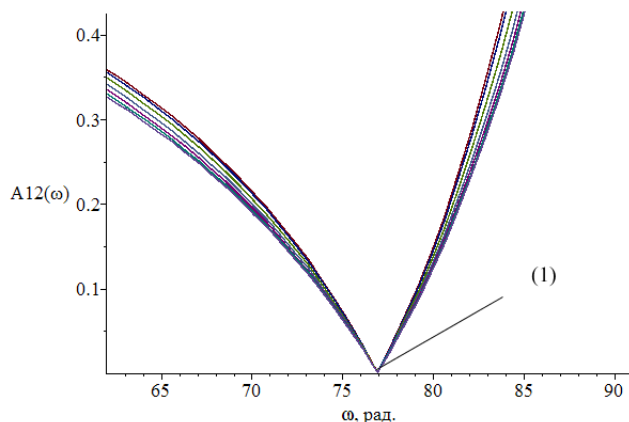


**Рис. 5.** Семейство графиков амплитудно-частотных характеристик на интервале, включающем частоту с одинаковым передаточным отношением: 1 — амплитудно-частотная характеристика для  $b_2 = 0$ ; 2 — амплитудно-частотная характеристика для  $b_2 \gg 1$ ; 3 — точка сгущения значений амплитудно-частотных характеристик на фиксированной частоте; 4 — характерная амплитудно-частотная характеристика для  $b_2 > 0$

Надо отметить, что понятие передаточной функции, определяемое отношением изображений по Лапласу динамического смещения к внешнему воздействию, дает детализированное представление о возможностях возбуждения колебаний и особенностях таких процес-

сов, в которых большое значение имеет знание параметров режимов динамического гашения колебаний и резонансов и пределов. Физическая сущность таких процессов связана с параметрами, отражающими возможности податливости механической колебательной

системы к перемещениям в динамических откликах на внешнее возмущение, что формируется, в определенном смысле, как соответствующее автоподстройке динамической (или приведенной) жесткости системы на определенную частоту.



**Рис. 6.** Семейство графиков амплитудно-частотных характеристик на интервале, включающем частоту динамического гашения. 1 — точка обращения в ноль графиков рассматриваемого семейства амплитудно-частотных характеристик на частоте динамического гашения

В свою очередь, понятие передаточной функции межпарциальных связей (или коэффициент связности) в физическом смысле представляет собой отношения амплитуд колебаний характерных точек (т. е. точек, параметры которых выбираются для оценки динамических состояний системы). Предлагаемый подход, в данном случае, раскрывает возможности

#### Литература

1. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. 2-е изд., испр. М.: Физматлит, 2001. 320 с.
2. Пановко Г.Я. Лекции по основам теории вибрационных машин и технологий. М.: МГТУ им. Баумана, 2008. 192 с.
3. Фролов К.В., Фурман Ф.А. Прикладная теория виброзащитных систем. М.: Машиностроение, 1985. 286 с.
4. Елисеев А.В., Кузнецов Н.К., Московских А.О. Динамика машин. Системные представления, структурные схемы и связи элементов: монография. М.: Инновационное машиностроение, 2019. 381 с.
5. Хохлов А.А. Динамика сложных механических систем. М.: МИИТ, 2002. 172 с.
6. Копылов Ю.Р. Динамика процессов виброударного упрочнения: монография. Воронеж: ИПЦ «Научная книга», 2011. 568 с.
7. Eliseev S.V., Eliseev A.V. Theory of Oscillations. Structural Mathematical Modeling in Problems of Dynamics of Technical Objects. Series: Studies in Systems, Decision and Control, V. 252. Springer International Publishing, Cham, 2020. 521 p.
8. Вьюнг К.Ч. Новые возможности изменения динамических состояний вибрационных технологических машин // Системы. Методы. Технологии. 2018. № 2 (38). С. 25–31.
9. Ермошенко Ю.В., Вьюнг К.Ч. Определение динамических реакций в соединениях элементов подвесок: новые подходы // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2018. № 2 (58). С. 118–125.
10. Большаков Р.С. Особенности вибрационных состояний транспортных и технологических машин (динамические реакции и формы взаимодействия элементов). Новосибирск: Наука, 2020. 411 с.

рычажных свойств в формах связи параметров движения точек механических колебательных систем (точки ее элементов).

**Заключение.** Механическая колебательная система в определенных режимах может рассматриваться как некоторый рычажный механизм; свойство такого «механизма» могут изменяться в достаточно широких пределах при приведении дополнительных связей, в том числе и за счет таких устройств, которые сами могут быть рычажным механизмом. Предложена концепция построения математических моделей механических колебательных систем, содержащих в своем составе структурные образования из типовых элементарных звеньев (сложных звеньев системы), обладающих приведенными параметрами жесткости.

1. Показано, что формализм построения математических моделей допускает использование структурных образований в общей схеме вывода уравнений без детализации представлений о структурном образовании как сложном элементе. Предложена методологическая основа построения структурных математических моделей расчетных схем технических объектов, содержащих в своем составе рычажные механизмы и сложные элементы в виде структурных образований.

2. Получены аналитические соотношения, определяющие особенности формирования вибрационного поля технологической машины с возможностями настройки и корректировки динамических состояний рабочего органа в плане распределения амплитуд колебаний точек протяженного рабочего органа.

11. Вьюнг К.Ч. Влияние инерционных связей на распределение амплитуд колебаний рабочего органа технологической вибрационной машины // Вестн. Брянского гос. технического ун-та. 2018. № 7 (68). С. 44–55.
12. Лурье А.И. Операционное исчисление и его приложения к задачам механики. 2-е изд., перераб. М.; Л.: Гос. изд-во техн.-теор. лит., 1950. 431 с.
13. Нгуен Д.Х. Методы построения, особенности динамических свойств и способы изменения значений и структур распределения амплитуд колебаний точек рабочих органов технологических машин: автореф. дис. на соиск. учен. степ. канд. техн. наук. Братский гос. ун-т. Иркутск, 2018. 20 с.
14. Karnovsky I.A., Lebed E. Theory of vibration protection. Switzerland: Springer, 2016. 708 p.
15. Clarence W. de Silva. Vibration. Fundamentals and Practice. Boca Raton, London, New York, Washington, D.C.: CRC Press, 2000. 957 p.

#### References

1. Samarskiy A.A., Mihajlov A.P. Mathematical modeling: Ideas. Methods. Examples. 2-e izd., ispr. M.: Fizmatlit, 2001. 320 p.
2. Panovko G.YA. Lectures on the basics of the theory of vibration machines and technologies. M.: MGTU im. Bauman, 2008. 192 p.
3. Frolov K.V., Furman F.A. Applied theory of vibration protection systems. M.: Mashinostroenie, 1985. 286 p.
4. Eliseev A.V., Kuznecov N.K., Moskovskih A.O. Dynamics of machines. System representations, structural schemes and connections of elements: monografiya. M.: Innovacionnoe mashinostroenie, 2019. 381 p.
5. Hohlov A.A. Dynamics of complex mechanical systems. M.: MIIT, 2002. 172 p.

6. Kopylov YU.R. Dynamics of vibroimpact hardening: monografiya. Voronezh: IPC «Nauchnaya kniga», 2011. 568 p.
7. Eliseev S.V., Eliseev A.V. Theory of Oscillations. Structural Mathematical Modeling in Problems of Dynamics of Technical Objects. Series: Studies in Systems, Decision and Control, V. 252. Springer International Publishing, Cham, 2020. 521 p.
8. Vyong K.CH. New possibilities of changing the dynamic states of vibration technological machines // Systems. Methods. Technologies. 2018. № 2 (38). P. 25–31.
9. Ermoshenko YU.V., Vyong K.CH. Determination of dynamic reactions in the connections of suspension elements: new approaches // Modern technologies. System analysis. Modeling. 2018. № 2 (58). P. 118–125.
10. Bol'shakov R.S. Features of vibration conditions of transport and technological machines (dynamical reactions and forms of elements interactions). Novosibirsk: Nauka, 2020. 411 p.
11. Vyong K.CH. Influence of inertial connections on the distribution of vibration amplitudes of the working body of a technological vibration machine // Bulletin BSTU. 2018. № 7 (68). P. 44–55.
12. Lur'e A.I. Operational calculus and its applications to problems in mechanics. 2-e izd., pererab. M.; L.: Gos. izd-vo tekhn.-teor. lit., 1950. 431 p.
13. Nguen D.H. Methods of construction, features of dynamic properties and methods of changing the values and structures of the distribution of the amplitudes of oscillations of the points of the working bodies of technological machines: avtoref. dis. na soisk. uchen. step. kand. tekhn. nauk. Bratskij gos. un-t. Irkutsk, 2018. 20 p.
14. Karnovsky I.A., Lebed E. Theory of vibration protection. Switzerland: Springer, 2016. 708 p.
15. Clarence W. de Silva. Vibration. Fundamentals and Practice. Boca Raton, London, New York, Washington, D.C.: CRC Press, 2000. 957 p.