

ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ И МАШИНОСТРОЕНИЯ

УДК 629.4, 621.534, 62.752

DOI: 10.18324/2077-5415-2017-4-7-17

Взаимодействие внешних возмущений – возможности изменения динамических свойств механических колебательных систем

С.В. Елисеев^{1 a}, В.Б. Кашуба^{2 b}, К.Ч. Выонг^{1 c}, Н.Ж. Кинаш^{3 d}

¹Иркутский государственный университет путей сообщения, ул. Чернышевского 15, Иркутск, Россия

²Братский государственный университет, ул. Макаренко 40, Братск, Россия

³Московский инженерный центр ОАО «Российские железные дороги», ул. Новорязанская 17, Москва, Россия

^aeliseev_s@inbox.ru, ^bnauka@brstu.ru, ^ctrucvq1990@gmail.com, ^dn.kinash@icloud.com

Статья поступила 9.10.2017, принята 10.11.2017

Цель исследования заключается в разработке метода построения математических моделей механических колебательных систем, которые находятся под одновременным воздействием нескольких гармонических возмущений. Используются методы и технологии структурного математического моделирования, построенного на идеях динамических аналогий с системами автоматического управления. Детализируется методика построения структурных схем и определения соответствующих передаточных функций. Рассматриваются в сопоставлении математические модели взаимодействия элементов систем при одиночном и совместном действии двух сил. Показаны особенности проявления динамических свойств. Вводится обобщенное понятие о динамическом гашении колебаний, параметры которого определяются из условий «зануления» числителей передаточных функций. Разработана технология построения частотных диаграмм механических колебательных систем как основы определения признаков возможных динамических проявлений и форм нестационарности колебаний. Рассматривается ряд новых динамических эффектов и форм режимов динамического гашения колебаний при введении в структуру системы дополнительных инерционных связей в виде устройств для преобразования движения.

Ключевые слова: динамическое гашение колебаний; передаточная функция системы; устройство для преобразования движения; частотная диаграмма.

Interaction of external disturbances – the possibilities of changing dynamic properties of mechanical oscillation systems

S.V. Eliseev^{1 a}, V.B. Kashuba^{2 b}, Q.T. Vuong^{1 c}, N.Zh. Kinash^{3 d}

¹Irkutsk State Transport University; 15, Chernyshevskiy St., Irkutsk, Russia

²Bratsk State University; 40, Makarenko St., Bratsk, Russia

³JSC “Russian Railways”, Moscow Engineering Center; 17, Novoryazanskaya St., Moscow, Russia

^aeliseev_s@inbox.ru, ^bnauka@brstu.ru, ^ctrucvq1990@gmail.com, ^dn.kinash@icloud.com

Received 9.10.2017, accepted 10.11.2017

The purpose of the research is to develop a method for constructing mathematical models of mechanical oscillatory systems that are under the simultaneous action of several harmonic perturbations. Methods and technologies of structural mathematical modeling, built on the ideas of dynamic analogies with automatic control systems, are used. The method of constructing structural schemes and determining the corresponding transfer functions is detailed. Mathematical models of the interaction of system elements in a single and joint action of two forces are considered. Features in the manifestations of dynamic properties are shown. A generalized concept of dynamic damping of oscillations is introduced, the parameters of which are determined from the conditions of "nullification" of the numerators of the transfer functions. A technology has been developed for constructing frequency diagrams of mechanical oscillation systems, as the basis for determining the signs of possible dynamic manifestations and forms of oscillation nonstationarity. The number of new dynamic effects and forms of dynamic damping of oscillation modes is considered when introducing additional mass-inertial ties in the form of devices for converting motion into the structure of the system.

Keywords: dynamic damping of oscillation; transfer function of system; device for converting motion; frequency diagram.

Введение

В динамике механических объектов, расчетные схемы которых могут быть представлены механическими колебательными системами с двумя степенями свободы, внешние возмущения имеют различную природу.

Особенности внешних возмущений, характерные для транспортных средств, имеющих тяговые двигатели с опорно-осевой подвеской, могут отображаться периодическими функциями достаточно общего вида, в том числе и совокупностью двух гармонических функций.

Такие представления связаны с конструктивно-техническими особенностями систем транспортных подвесок, если иметь в виду математические модели упрощенного вида для плоского движения. Ряд вопросов, связанных с построением математических моделей для задач динамики тяговых двигателей электровозов, рассмотрен в работах [1, 2], а также в [3, 4], посвященных вопросам оценки возможностей совместного действия нескольких сил. Отмечено, что динамические свойства системы, которая находится под действием одновременно приложенных возмущений, могут приобретать существенные изменения по сравнению с системами в обычных возмущенных состояниях.

В предлагаемой статье развивается метод построения математических моделей механических колебательных систем с двумя степенями свободы, отражающих специфику работы тяговых двигателей локомотивов с опорной осевой подвеской.

Особенности технического объекта. Построение математической модели. Рассматривается плоская

механическая колебательная система в виде твердого тела с массоинерционными параметрами M (масса твердого тела) и J (момент инерции твердого тела относительно центра масс). Объект, динамическое состояние которого оценивается в неподвижной системе координат y_1, y_2 , связан с опорными поверхностями I и II (рис. 1), законы движения которых определяются известными синфазными гармоническими функциями одной частоты $z_1(t)$ и $z_2(t)$. Расстояние центра тяжести от мест закрепления упругих элементов k_1 и k_2 определяется длинами l_1 и l_2 соответственно. Система обладает линейными свойствами и совершает малые колебания относительно положения статического равновесия при отсутствии сил сопротивления. На рис. 1 также показаны устройства для преобразования движения, вводимые дополнительно к упругим элементам k_1 и k_2 . Подробности об устройствах такого рода (как типовых звеньях с передаточными функциями дифференцирующих звеньев 2-го порядка) в структурных математических моделях можно найти в [5, 6].

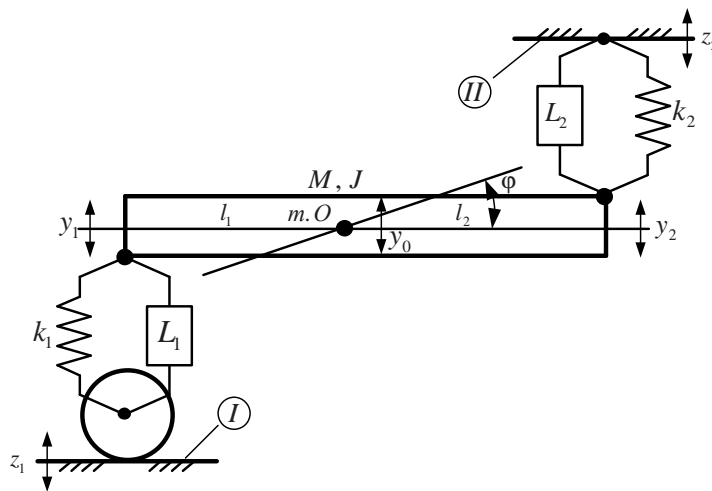


Рис. 1. Принципиальная схема транспортного объекта при кинематическом возмущении с устройствами для преобразования движения L_1 и L_2

Предполагается, что при кинематических воздействиях не происходит разрыва контактов с опорными поверхностями I, II .

Построение математической модели основано на использовании уравнения Лагранжа 2-го рода с после-

дующим преобразованием уравнений по Лапласу [7]. Математическая модель системы приведена на рис. 2 в виде структурной схемы эквивалентной в динамическом отношении системы автоматического управления.

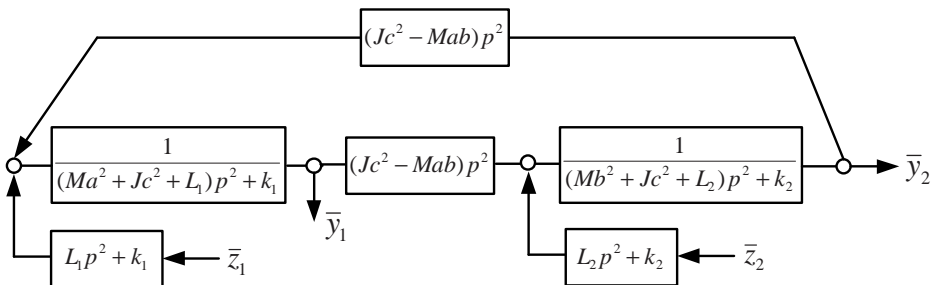


Рис. 2. Структурная математическая модель технического объекта (по рис. 1)

Математическая модель дает представление о том, что исходная система в координатах y_1, y_2 имеет два парциальных блока с парциальными частотами:

$$n_1^2 = \frac{k_1}{Ma^2 + Jc^2 + L_1}, \quad (1) \quad n_2^2 = \frac{k_2}{Mb^2 + Jc^2 + L_2}, \quad (2)$$

где $a = \frac{l_2}{l_1 + l_2}$, $b = \frac{l_1}{l_1 + l_2}$, $c = \frac{1}{l_1 + l_2}$, L_1 и L_2 — приведенные массы устройств для преобразования движения.

Межпарциальная связь (рис. 2) представлена дифференцирующим звеном 2-го порядка с передаточной функцией:

$$W_{np}(p) = (Jc^2 - Mab)p^2, \quad (3)$$

где $p = j\omega$ — комплексная переменная ($j = \sqrt{-1}$) [8, 9].

Система находится под действием двух внешних возмущений $z_1(t)$ и $z_2(t)$ со стороны опорных поверхностей I, II (рис. 1).

Особенности математических моделей при отсутствии устройств для преобразования движения. Полагая, что $L_1 = 0$, $L_2 = 0$, запишем передаточные функции систем, принимая $\bar{z}_1 \neq 0$, а $\bar{z}_2 = 0$, тогда:

$$W_1(p) = \frac{\bar{y}_1}{\bar{z}_1} = \frac{k_1[(Mb^2 + Jc^2)p^2 + k_2]}{A_0(p)}, \quad (4)$$

$$W_2(p) = \frac{\bar{y}_2}{\bar{z}_1} = \frac{k_1(Jc^2 - Mab)p^2}{A_0(p)}, \quad (5)$$

где значок « \rightarrow » над переменной обозначает ее изображение по Лапласу.

1. При действии только одного внешнего возмущения система по координате \bar{y}_1 имеет режим динамического гашения колебаний; в данном случае частота динамического гашения колебаний определится выражением:

$$\omega_{1\text{дин}}^2 = \frac{k_2}{Mb^2 + Jc^2}. \quad (6)$$

Межпарциальные связи в системе относятся к инерционному типу и характеризуются передаточной функцией:

$$W_{12}(p) = \frac{\bar{y}_2}{\bar{y}_1} = \frac{(Jc^2 - Mab)p^2}{(Mb^2 + Jc^2)p^2 + k_2}. \quad (7)$$

2. В свою очередь, в ситуации, когда $\bar{z}_1 = 0$, $\bar{z}_2 \neq 0$ (т. е. при другом возмущении), передаточные функции системы (рис. 2) примут вид:

$$W_1(p) = \frac{\bar{y}_1}{\bar{z}_2} = \frac{k_2(Jc^2 - Mab)p^2}{A_0(p)}, \quad (8)$$

$$W_2(p) = \frac{\bar{y}_2}{\bar{z}_2} = \frac{k_2[(Ma^2 + Jc^2)p^2 + k_1]}{A_0(p)}, \quad (9)$$

где $A_0(p)$ является характеристическим частотным уравнением и определяется выражением:

$$A_0(p) = [(Ma^2 + Jc^2)p^2 + k_1] \cdot [(Mb^2 + Jc^2)p^2 + k_2] - [(Jc^2 - Mab)p^2]^2 \quad (10)$$

При возмущении $\bar{z}_2 \neq 0$ ($\bar{z}_1 = 0$) режим динамического гашения колебаний будет возможен по координате \bar{y}_2 :

$$\omega_{2\text{дин}}^2 = \frac{k_1}{Ma^2 + Jc^2}. \quad (11)$$

3. При совместном действии внешних возмущений рассмотрим случай, когда выполняется условие связности внешних сил в виде:

$$\bar{z}_2 = \alpha \cdot \bar{z}_1, \quad (12)$$

где α может принимать значения $-\infty < \alpha < \infty$.

Такого рода ситуации, в принципе, могут быть физически реализуемы, если опорные поверхности I и II (рис. 1) совершают некоторые согласованные движения. При действии двух внешних сил $\bar{z}_1 = \bar{z}$, $\bar{z}_2 = \alpha\bar{z}$ при определении передаточных функций используется метод суперпозиции [9], в данном случае:

$$W_1'(p) = \frac{\bar{y}_1}{\bar{z}} = \frac{k_1[(Mb^2 + Jc^2)p^2 + k_2] + \alpha k_2(Jc^2 - Mab)p^2}{A_0(p)}, \quad (13)$$

$$W_2'(p) = \frac{\bar{y}_2}{\bar{z}} = \frac{\alpha k_2[(Ma^2 + Jc^2)p^2 + k_1] + k_1(Jc^2 - Mab)p^2}{A_0(p)}. \quad (14)$$

Частоты режимов динамического гашения колебаний при одновременном действии двух внешних кинематических возмущений, при условии (12), определяются выражениями:

$$\omega_{1\text{дин}}'^2 = \frac{k_1 k_2}{Jc^2(k_1 + \alpha k_2) + Mb(k_1 b - \alpha k_2 a)}, \quad (15)$$

$$\omega_{2\text{дин}}'^2 = \frac{\alpha k_1 k_2}{Jc^2(k_1 + \alpha k_2) + Ma(\alpha k_2 a - k_1 b)}. \quad (16)$$

Из (15), (16) следует, что частоты динамического гашения колебаний будут зависеть от значений α . При $\alpha = 0$, что соответствует $\bar{z}_1 \neq 0$, $\bar{z}_2 = 0$, выражение (15) совпадает с выражением (6). Поскольку при $\alpha = 0$ имеем, что $\bar{z}_2 = 0$, то по координате y_2 режим динамического гашения не реализуется.

Рассмотрим случай $\alpha = 1$, тогда по координате y_1 частота динамического гашения определяется:

$$\omega_{1\text{дин}}''^2 = \frac{k_1 k_2}{Jc^2(k_1 + k_2) + Mb(k_1 b - k_2 a)}, \quad (17)$$

а по координате y_2 соответственно:

$$\omega_{2\text{дин}}''^2 = \frac{k_1 k_2}{Jc^2(k_1 + k_2) + Ma(k_2 a - k_1 b)}. \quad (18)$$

Таким образом, при совместном действии внешних сил режимы динамических гашений колебаний могут быть реализованы по двум координатам объекта, тогда как при $\alpha = 0$, т. е. при действии одного внешнего воз-

действия, реализуется режим динамического гашения колебаний только по координате u_1 .

При $\alpha = -1$ частоты динамического гашения колебаний будут определяться выражением:

$$\omega_{1\text{дин}}^2 = \frac{k_1 k_2}{Jc^2(k_1 - k_2) + Mb(k_1 b + k_2 a)}, \quad (19)$$

из которого следует возможность возникновения критических ситуаций при соотношениях коэффициентов жесткостей, определяемых выражением:

$$k_2 = \frac{k_1(Jc^2 + Mb^2)}{Jc^2 - Mab}. \quad (20)$$

В частности, из сравнения (13) – (19) можно сделать вывод о возможностях существенного влияния связности внешних возмущений α на динамические свойства системы в целом.

Особенности совместного действия двух кинематических возмущений. Если принять во внимание общие представления об эффектах динамического гашения колебаний, то частоты динамического гашения колебаний могут определяться из условий, возникающих при «занулении» числителей передаточных функций.

1. Рассмотрим случай, при котором значения частот динамического гашения колебаний совпадают, т. е.:

$$\omega_{1\text{дин}1}^2 = \omega_{2\text{дин}2}^2. \quad (21)$$

Значение α может быть определено из условия:

$$\frac{k_1 k_2}{Jc^2(k_1 + \alpha k_2) + Mb(k_1 b - \alpha k_2 a)} = \frac{\alpha k_1 k_2}{Jc^2(k_1 + \alpha k_2) + Ma(\alpha k_2 a - k_1 b)}, \quad (22)$$

которое может быть трансформировано в уравнение:

$$\alpha^2 k_2 (Jc^2 - Mab) + \alpha [Jc^2(k_1 - k_2) + M(k_1 b^2 - k_2 a^2)] + k_1 (Mab - Jc^2) = 0. \quad (23)$$

Уравнение (23) при введении $\beta = \frac{k_2}{k_1}$ в качестве настроечного параметра может быть преобразовано к виду:

$$\alpha^2 + \frac{Jc^2(1 - \beta) + M(b^2 - \beta a^2)}{\beta(Jc^2 - Mab)} \alpha - \frac{1}{\beta} = 0. \quad (24)$$

В свою очередь, преобразуем выражения для определения частот динамического гашения колебаний (15), (16) и запишем:

$$\omega_{1\text{дин}1}^2 = \frac{\beta k_1}{(Jc^2 + Mb^2) + \alpha \beta (Jc^2 - Mab)}, \quad (25)$$

$$\omega_{2\text{дин}2}^2 = \frac{\alpha \beta k_1}{(Jc^2 - Mab) + \alpha \beta (Jc^2 + Ma^2)}. \quad (26)$$

Для модельных расчетов приняты следующие параметры: $M = 100$ кг; $J = 50$ кг/м²; $a = 0,4$; $b = 0,6$; $c = 1$; $k_1 = 100\,000$ Н/м (β изменяется в пределах 0,25; 0,5; 1; 5; 10).

На рис. 3 приведены графики зависимостей (25), (26) от α при различных значениях β .

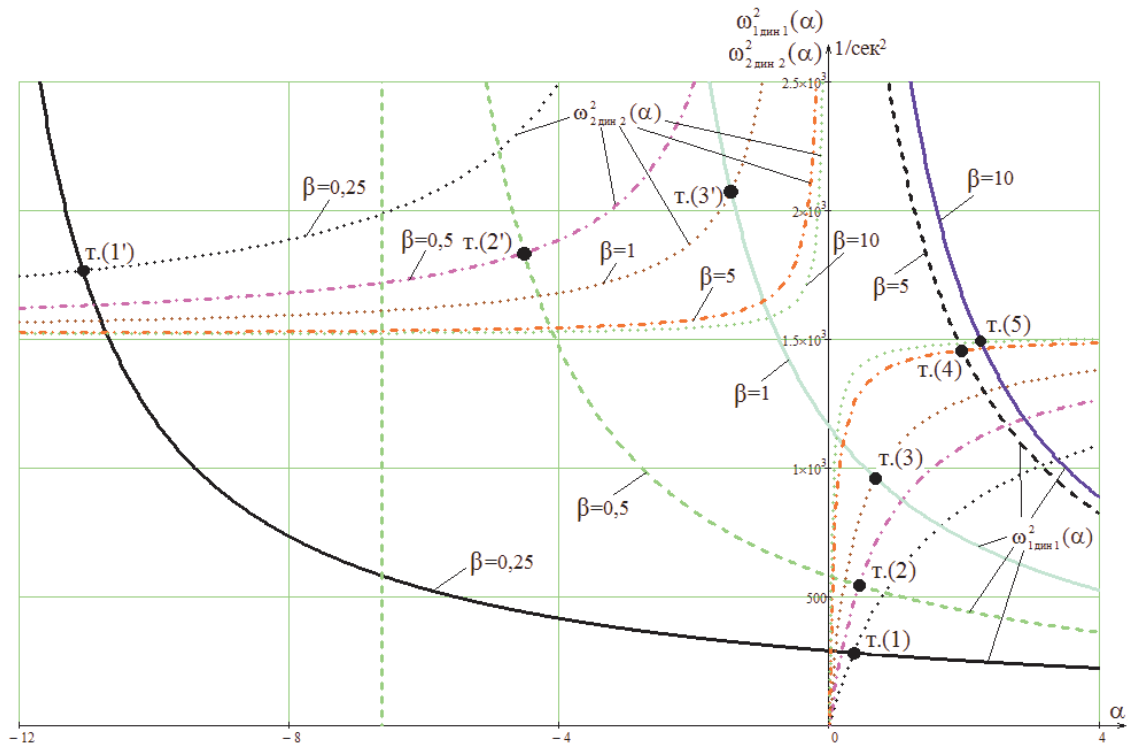


Рис. 3. Графики зависимостей $\omega_{1\text{дин}1}^2(\alpha)$, $\omega_{2\text{дин}2}^2(\alpha)$ при различных значениях β (0,25; 0,5; 1; 5; 10) с точками пересечения (1), (1'), (2), (2'), (3), (3') и др.

2. На рис. 3 видно, что графики $\omega_{1\text{дин}1}^2(\alpha)$, $\omega_{2\text{дин}2}^2(\alpha)$ пересекаются в тт. (1) и (1') при значении $\beta = 0,25$. Соответственно, они пересекаются в тт. (2) и (2') при значении $\beta = 0,5$; в тт. (3) и (3') при значении $\beta = 1$ и т. д. При больших значениях β (5; 10) имеются пересечения в тт. (4), (4') и (5), (5'). При этом тт. (4') и (5') находятся в области отрицательных α , которые приближаются к нулевым значениям α . Что касается значений частот $\omega_{1\text{дин}1}^2(\alpha)$, $\omega_{2\text{дин}2}^2(\alpha)$, то они в этом случае принимают большие значения, что выходит за границы верхней части рис. 3. При этом пересечения графиков $\omega_{1\text{дин}1}^2(\alpha)$, $\omega_{2\text{дин}2}^2(\alpha)$ с осью ординат не происходит, хотя частоты и принимают большие значения. Таким образом, в системе координат y_1, y_2 при совместном действии двух внешних возмущений могут наблюдаться, при определенном наборе параметров системы, по два режима динамического гашения колебаний; каждый из режимов будет характеризоваться двумя значениями α (положительным и отрицательным параметром α).

3. Взаимное расположение графиков $\omega_{1\text{дин}1}^2(\alpha)$, $\omega_{2\text{дин}2}^2(\alpha)$ дает представление о возможных динамических свойствах системы.

Во-первых, можно утверждать, что существуют такие условия, когда можно найти два значения α , которые определяют значения частот, при которых происходит выполнение условия, когда $\omega_{1\text{дин}1}^2 = \omega_{2\text{дин}2}^2$. В общем случае, если найдено α , то можно определить и частоты динамического гашения колебаний соответственно.

Так, для приведенных выше параметров модельной задачи, при $\beta = 0,25$, коэффициент $\alpha = -11,054$, частота

динамического гашения колебаний для т. (1') составит $\omega_{1\text{дин}1}^2 = \omega_{2\text{дин}2}^2 = 1767 \text{ 1/сек}^2$, а для т. (1) соответственно получим, что $\omega_{1\text{дин}1}^2 = \omega_{2\text{дин}2}^2 = 283 \text{ 1/сек}^2$, при этом $\alpha = 0,362$.

4. Существуют и критические значения α . К примеру, если $\alpha = 0$, то система имеет одно возмущение и одну частоту динамического гашения колебаний, о чем выше упоминалось. Кроме того, если $\alpha \rightarrow \infty$ или $\alpha \rightarrow -\infty$, то $\omega_{1\text{дин}1}^2(\alpha) \rightarrow 0$ (по координате \bar{y}_1). В свою очередь, по координате \bar{y}_2 при $\alpha \rightarrow \infty$ или $\alpha \rightarrow -\infty$ имеем, что $\omega_{2\text{дин}2}^2(\alpha) \rightarrow \frac{k_1}{Jc^2 + Ma^2}$, т. е. существует один и тот же предел значений для частот динамического гашения колебаний.

5. При построении частотной диаграммы отметим, что частоты $\omega_{1\text{соб}}^2$, $\omega_{2\text{соб}}^2$ не зависят от значения α и определяются из решения характеристического частотного уравнения:

$$[(Ma^2 + Jc^2)p^2 + k_1] \cdot [(Mb^2 + Jc^2)p^2 + k_2] - [(Jc^2 - Mab)p^2]^2 = 0 \quad (27)$$

Парциальные частоты системы также не зависят от значения α и определяются следующими выражениями:

$$n_1^2 = \frac{k_1}{Ma^2 + Jc^2}, \quad (28) \quad n_2^2 = \frac{k_2}{Mb^2 + Jc^2}, \quad (29)$$

На рис. 4 приводится частотная диаграмма системы с данными о частотах собственных колебаний и парциальных частотах (они не зависят от α и представлены параллельными линиями).

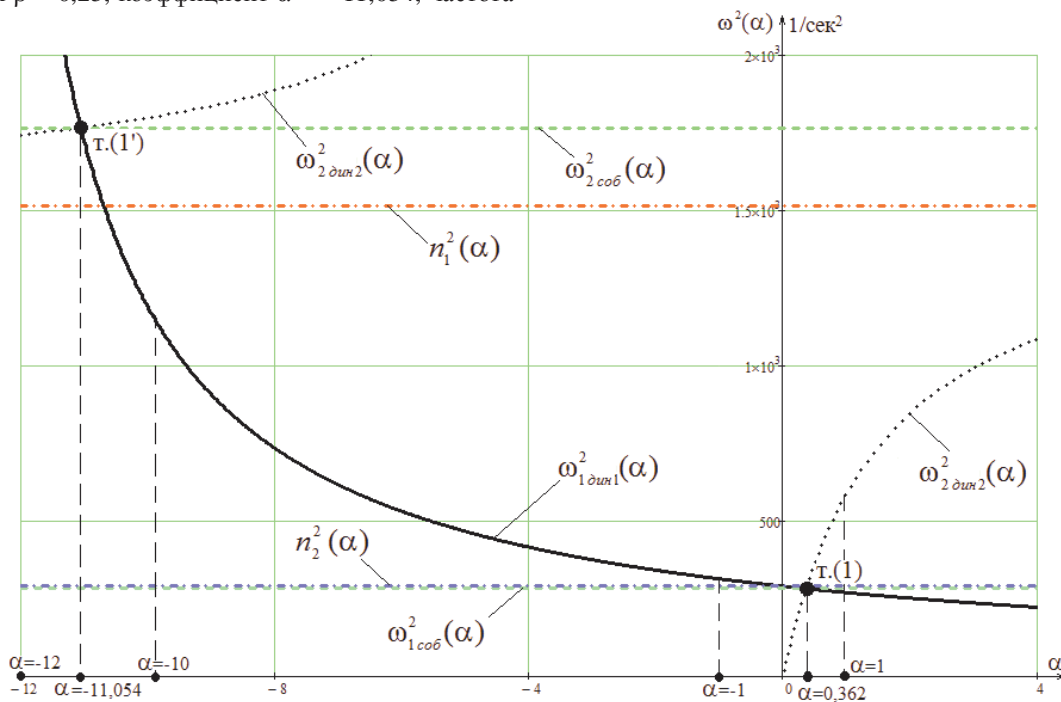


Рис. 4. Частотная диаграмма механической системы при $\beta = 0,25$ и нулевых значениях параметров устройств для преобразования движения L_1, L_2

Частотная диаграмма системы построена, в качестве примера, при $\beta = 0,25$; графики $n_1^2(\alpha)$, $n_2^2(\alpha)$ выделены штрихпунктирными линиями (·-·-·). Частоты собственных колебаний обозначены штриховыми линиями (- - -). Кроме вышеупомянутых графиков, на рис. 4 обозначены сплошной линией (—) зависимости $\omega_{\text{дин}}^2(\alpha)$ и точечной линией (· · · ·) — $\omega_{\text{дин}}^2(\alpha)$, определяемые выражениями (15) и (16) соответственно.

6. В тг. (1) и (1') на рис. 4 одновременно пересекаются графики $\omega_{\text{дин}}^2(\alpha)$ и $\omega_{\text{дин}}^2(\alpha)$, что соответствует случаю одновременного динамического гашения колебаний по двум координатам. В обеих точках характерным является то обстоятельство, что наблюдается одновременное совпадение с частотой собственных колебаний системы $\omega_{\text{соб}}^2$ и $\omega_{\text{соб}}^2$. При этом происходит упрощение исходной передаточной функции за счет сокращения числителя с фрагментом частотного характеристического уравнения [9].

Таким образом, при параметрах системы, когда выполняется условие совпадения частот динамического гашения колебаний $\omega_{\text{дин}1}^2 = \omega_{\text{дин}2}^2$, возникает специфический эффект, при котором на этих частотах коор-

динаты y_1 и y_2 не «зануляются», а параметры движения определяются из упрощенной передаточной функции, соответствующей упрощенной системе с одной степенью свободы.

IV. Особенности амплитудно-частотных характеристик в характерных точках частотной диаграммы. Взаимное расположение графиков частот предопределяет возможные динамические свойства системы, которые отображаются амплитудно-частотными характеристиками (АЧХ).

Для построения АЧХ, соответствующих частотной диаграмме на рис. 4, выбраны две группы точек. Одна расположена в окрестностях тг. (1'). Для самой тг. (1') коэффициент связности $\alpha = -11,054$, тогда как для соседних точек выбраны значения $\alpha = -12$ и $\alpha = -10$. Каждой из этих точек соответствует своя АЧХ, что представлено на рис. 5. В семействе АЧХ, как показано на рис. 5, одна характеристика соответствует α для характерной тг. (1'), а другие находятся в непосредственной близости. На рис. 5 сплошной линией (—) обозначен

график зависимости $\frac{\bar{y}_1}{z}(\omega)$, точечной линией (· · · ·) — $\frac{\bar{y}_2}{z}(\omega)$.

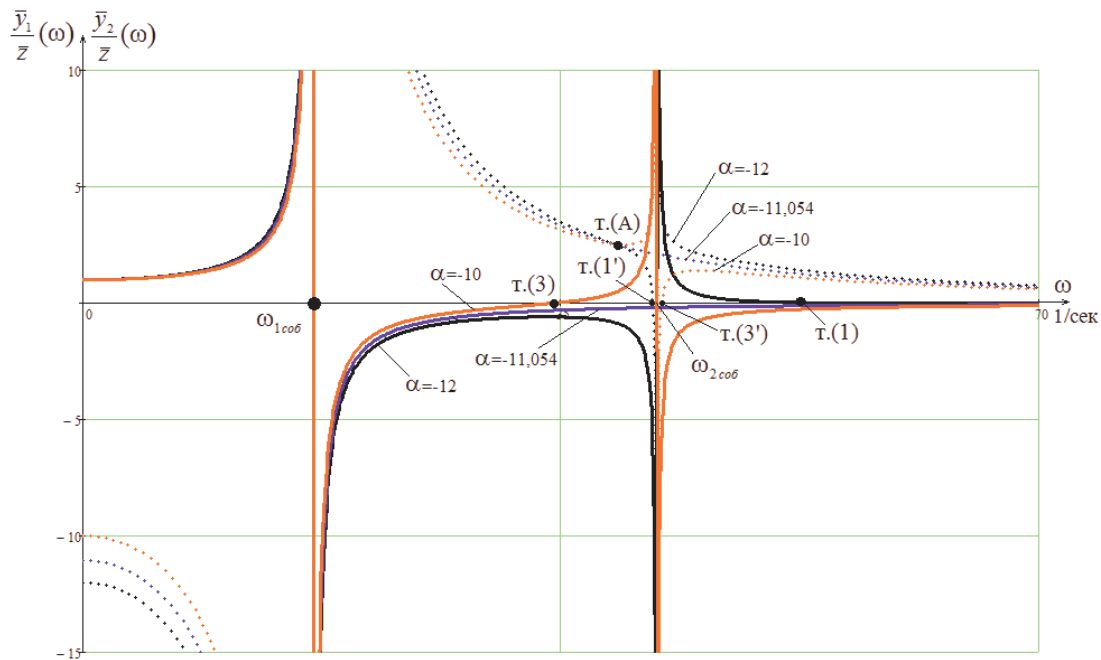


Рис. 5. Семейство АЧХ системы при $\beta = 0,25$

1. При $\alpha = -12$ для каждой координаты y_1 и y_2 существует только одна частота динамического гашения колебаний (точек одновременного пересечения оси абсцисс в тг. (1) и тг. (1') не имеется). В случае $\alpha = -11,054$ система упрощается и теряет одну степень свободы, т. е. становится системой с одной степенью свободы. При $\alpha = -10$ каждая координата y_1 и y_2 имеет только одну частоту динамического гашения колебаний (точки одновременного пересечения оси абсцисс в тг. (3) и тг. (3') не имеется). Кроме того, имеется тг. (А), через

которую проходят графики $\frac{\bar{y}_2}{z}(\omega)$ при всех заданных значениях α , что связано с линейной зависимостью числителя передаточной функции от α . Из рис. 5 следует, что выбор значений α имеет существенное влияние на вид АЧХ и формирование возникающих в системе динамических эффектов.

2. Кроме того, на рис. 6 построены графики АЧХ при значениях $\alpha = -1$; $\alpha = 0,362$; $\alpha = 1$ (в данном случае в тг. (1) по рис. 4 соответственно $\alpha = 0,362$).

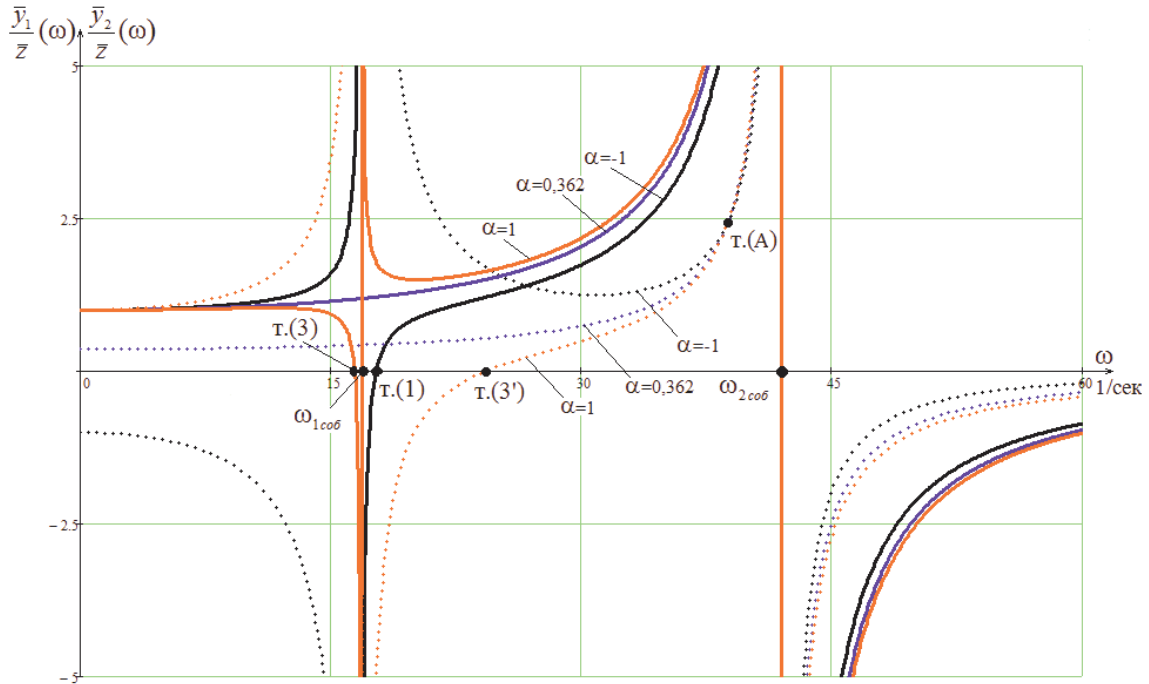


Рис. 6. Семейство АЧХ системы при $\beta = 0,25$ при выборе точек, группирующихся относительно т. (1) по рис. 4. Обозначения $\frac{\bar{y}_1}{\bar{z}}(\omega)$, $\frac{\bar{y}_2}{\bar{z}}(\omega)$ те же, что и на рис. 5

На рис. 6, т. (1), показано пересечение оси абсцисс графика $\frac{\bar{y}_1}{\bar{z}}(\omega)$ при $\alpha = -1$, что для координаты y_1 определяет только одну частоту динамического гашения колебаний. Соответственно, при $\alpha = 1$ каждый график $\frac{\bar{y}_1}{\bar{z}}(\omega)$ и $\frac{\bar{y}_2}{\bar{z}}(\omega)$ пересекает ось абсцисс в тт. (3) и (3'); показано, что существует только одна частота динамического гашения колебаний. В случае, когда $\alpha = 0,362$, система превращается в систему с одной степенью свободы. Такая ситуация связана с возможностями представления характеристического уравнения как произведения двух полиномов 2-го порядка [9].

Влияние устройств для преобразования движения. При введении в структурную математическую модель устройств для преобразования движения ($L_1 \neq 0$, $L_2 \neq 0$) изменяются свойства парциальных блоков; парциальные частоты в данном случае будут определяться выражениями:

$$n_{1np}^2 = \frac{k_1}{Ma^2 + Jc^2 + L_1}, \quad (30)$$

$$n_{2np}^2 = \frac{k_2}{Mb^2 + Jc^2 + L_2}. \quad (31)$$

Межпарциальные связи в системе при этом не изменяются. Передаточные функции системы, если учесть, что $\bar{z}_1 = \bar{z}$, $\bar{z}_2 = \alpha\bar{z}$, принимают вид:

$$W_1^*(p) = \frac{\bar{y}_1}{\bar{z}} = \frac{(L_1 p^2 + k_1)(Mb^2 + Jc^2 + L_2)p^2 + k_2 + \alpha(L_2 p^2 + k_2)(Jc^2 - Mab)p^2}{A_1(p)}, \quad (32)$$

$$W_2^*(p) = \frac{\bar{y}_2}{\bar{z}} = \frac{\alpha(L_2 p^2 + k_2)[(Ma^2 + Jc^2 + L_1)p^2 + k_1] + (L_1 p^2 + k_1)(Jc^2 - Mab)p^2}{A_1(p)}, \quad (33)$$

где:

$$A_1(p) = [(Ma^2 + Jc^2 + L_1)p^2 + k_1] \times [(Mb^2 + Jc^2 + L_2)p^2 + k_2] - [(Jc^2 - Mab)p^2]^2 \quad (34)$$

— является характеристическим частотным уравнением.

Из выражений (32), (33) следует, что система при введении устройств для преобразования движения (УПД) будет обладать более широким спектром динамических свойств и возможностей для изменения динамических состояний исходной системы.

1. Полагая, что числитель передаточной функции (32) при частоте динамического гашения принимает нулевое значение, для определения частот динамического гашения колебаний используем биквадратное уравнение для оценки частот динамического гашения колебаний по координате \bar{y}_1 :

$$p^4[L_1(Mb^2 + Jc^2 + L_2) + \alpha L_2(Jc^2 - Mab)] + p^2[k_1(Mb^2 + Jc^2 + L_2) + \alpha k_2(Jc^2 - Mab) + L_1 k_2] + k_1 k_2 = 0. \quad (35)$$

Соответственно, для координаты \bar{y}_2 получим:

$$p^4[\alpha L_2(Ma^2 + Jc^2 + L_1) + L_1(Jc^2 - Mab)] + p^2[\alpha k_2(Ma^2 + Jc^2 + L_1) + k_1(Jc^2 - Mab) + \alpha L_2 k_1] + \alpha k_1 k_2 = 0. \quad (36)$$

Из выражений (35), (36) следует, что для каждого значения коэффициента связности α по каждой из координат \bar{y}_1, \bar{y}_2 будет возникать возможность, в общем случае, реализации двух режимов динамического гашения колебаний.

Подобного рода динамические эффекты представляют собой особый случай, требующий своего рассмотрения. Отметим, что в проведенном выше исследовании ($L_1 = 0, L_2 = 0$), при совместном одновременном действии двух внешних возмущений, также проявлялись возможности возникновения новых динамических эффектов. В частности, было отмечено, что без введения УПД можно ожидать появления режимов динамического гашения колебаний по каждой из координат \bar{y}_1 и \bar{y}_2 . В рассматриваемом случае по каждой из координат в системе с двумя степенями свободы могут появляться по два режима динамического гашения колебаний. В этом случае можно утверждать, что передаточные функции системы при кинематическом возмущении и введении УПД будут иметь одинаковый порядок полиномов и в числителе, и в знаменателе.

2. Для изучения особенностей динамических свойств систем может быть использована частотная диаграмма. Технология построения частотных диаграмм достаточно подробно рассмотрена в предыдущих разделах данной статьи.

Отметим, что парциальные частоты и частоты собственных колебаний не зависят от коэффициента связности, хотя $L_1 \neq 0, L_2 \neq 0$.

На рис. 7 приведены графики собственных частот $\omega_{1\text{соб}}^2(\alpha), \omega_{2\text{соб}}^2(\alpha)$, которые определяются через частотное характеристическое уравнение (34), что обозначено на рис. 7 точечными линиями (...). Графики парциальных частот $n_1^2(\alpha), n_2^2(\alpha)$ на рис. 7 представлены штрихпунктирными линиями (-.-.-). Кроме вышеупомянутых графиков, на рис. 7 обозначены сплошной линией (—) зависимости $\omega_{1\text{дин}1}^2(\alpha)$ и штриховой линией (- - -) — зависимости $\omega_{2\text{дин}2}^2(\alpha)$, определяемые выражениями (35) и (36) соответственно.

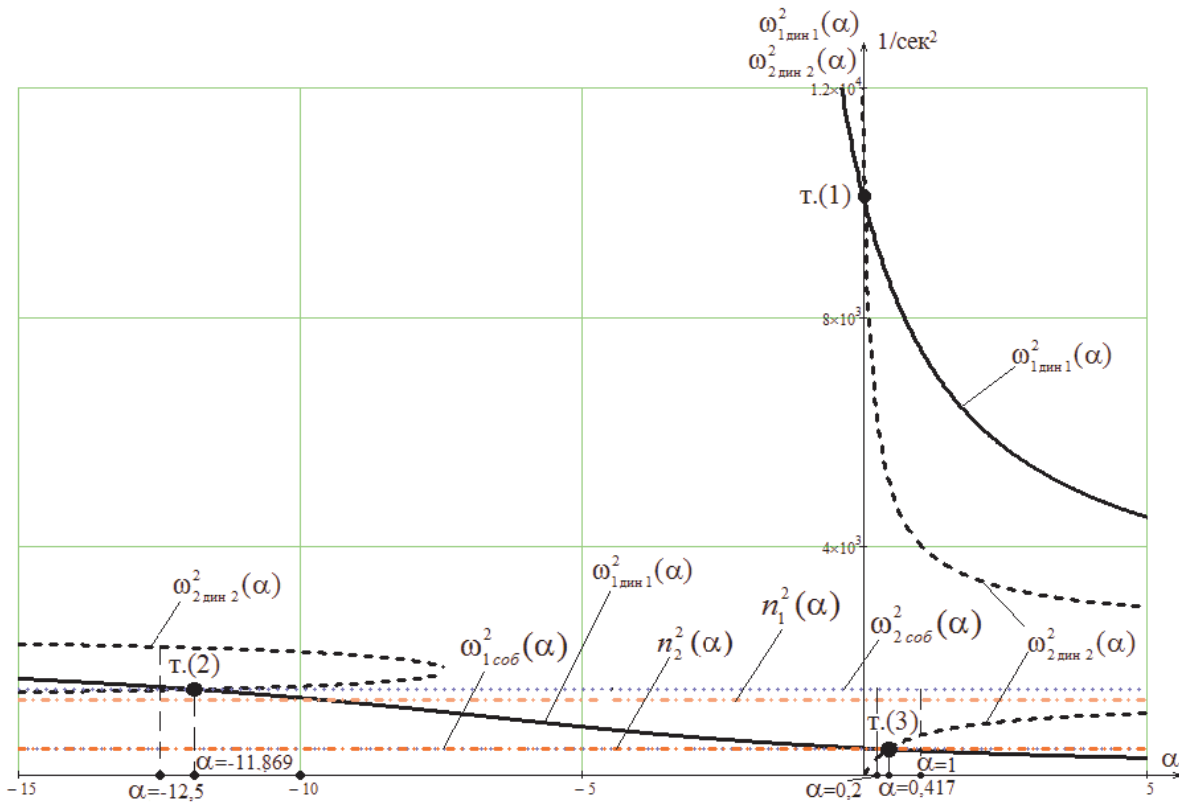


Рис. 7. Частотная диаграмма системы при $L_1 = 10 \text{ кг}, L_2 = 20 \text{ кг}, \beta = 0,5$

В тт. (1), (2) и (3) на рис. 7 одновременно пересекаются два графика $\omega_{1\text{дин}1}^2(\alpha)$ и $\omega_{2\text{дин}2}^2(\alpha)$, что соответствует случаю одновременного динамического гашения колебаний по двум координатам. В тт. (1), (2) характерным является то обстоятельство, что происходит это при одновременном совпадении с частотами собственных колебаний системы $\omega_{1\text{соб}}^2$ и $\omega_{2\text{соб}}^2$.

3. Графики АЧХ в т. (1) при значении $\alpha = 0$ отражают возможности одновременного динамического гашения колебаний по координатам \bar{y}_1, \bar{y}_2 или обнуления координат \bar{y}_1, \bar{y}_2 . Амплитудно-частотные характеристики системы для данного случая приведены на рис. 8.

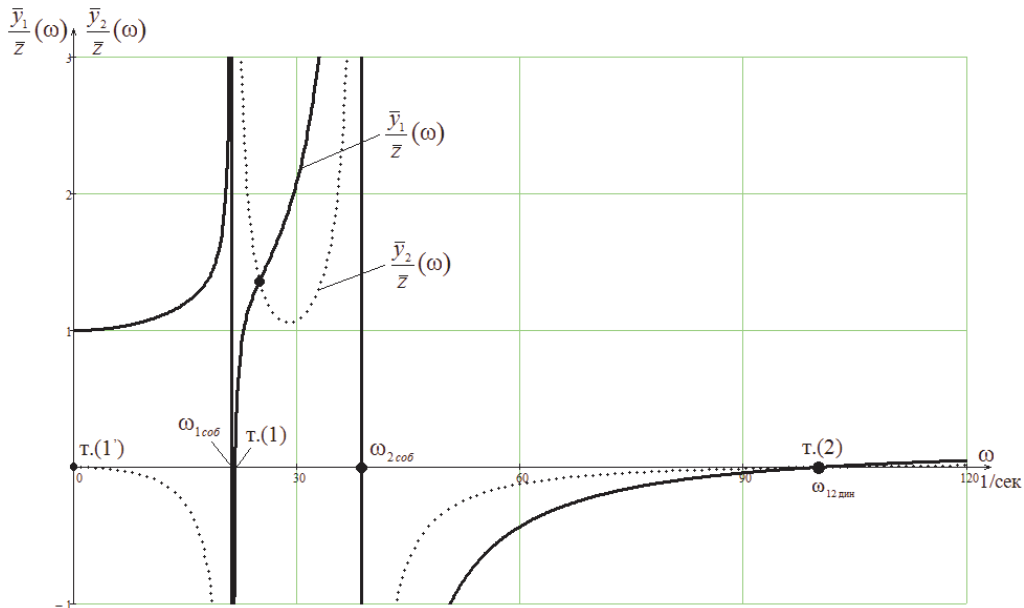


Рис. 8. Семейство АЧХ системы в т. (1) по рис. 7 при $\alpha = 0$

Каждая из АЧХ $\frac{\bar{y}_1}{z}(\omega)$ и $\frac{\bar{y}_2}{z}(\omega)$ имеет в общем случае по две частоты динамического гашения колебаний (соответственно тт. (1), (2) по координате y_1 и тт. (1'), (2) по координате y_2). Одновременное динамическое гашение по двум координатам происходит только на частоте $\omega_{12дин}$ (т. (2) на оси абсцисс).

4. Построим графики амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) при параметрах, соответствующих значениям $\alpha = -12,5$; $\alpha = -11,869$; $\alpha = -10$ (в этом случае в т. (2) на рис. 7 соответственно $\alpha = -11,869$), как показано на рис. 9.

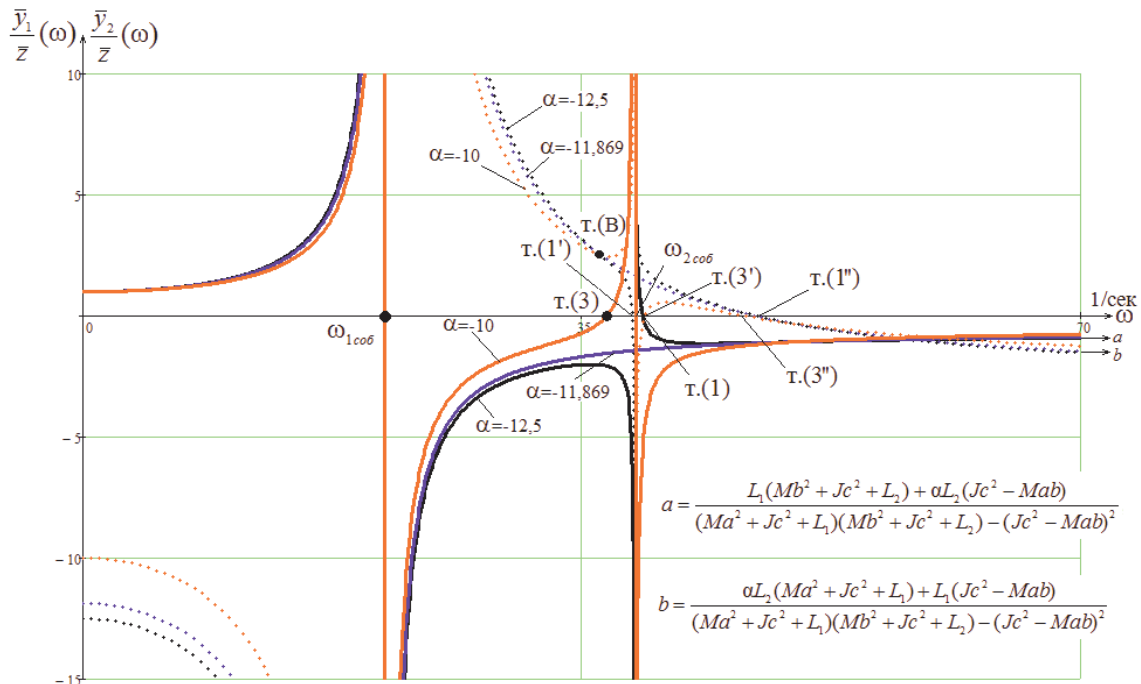


Рис. 9. Семейство АЧХ системы при $L_1 = 10$ кг, $L_2 = 20$ кг, $\beta = 0,5$; при выборе точек, группирующихся относительно т. (2) по рис. 7. График $\frac{\bar{y}_1}{z}(\omega)$ обозначен сплошной линией (—), $\frac{\bar{y}_2}{z}(\omega)$ — точечной линией (***)

На рис. 9, при $\alpha = -12,5$ и $\alpha = -10$, для координаты y_1 существует только одна частота динамического гашения колебаний (т. (1) и т. (3) соответственно); для координаты y_2 существуют две частоты динамического гашения колебаний (т. (1') и т. (1'') для $\alpha = -12,5$ и также

т. (3') и т. (3'') для $\alpha = -10$). В случае, когда $\alpha = -11,869$, система упрощается и теряет одну степень свободы. Кроме того, имеется т. (B), через которую проходят графики $\frac{\bar{y}_2}{z}(\omega)$ при всех заданных значениях α . При

$\omega \rightarrow \infty$ зависимость $\frac{\bar{y}_1}{\bar{z}}(\omega)$ стремится к пределу

$$a = \frac{L_1(Mb^2 + Jc^2 + L_2) + \alpha L_2(Jc^2 - Mab)}{(Ma^2 + Jc^2 + L_1)(Mb^2 + Jc^2 + L_2) - (Jc^2 - Mab)^2};$$

зависимость $\frac{\bar{y}_2}{\bar{z}}(\omega)$ также стремится к пределу

$$b = \frac{\alpha L_2(Ma^2 + Jc^2 + L_1) + L_1(Jc^2 - Mab)}{(Ma^2 + Jc^2 + L_1)(Mb^2 + Jc^2 + L_2) - (Jc^2 - Mab)^2}.$$

5. Для расширения базы сравнительного сопоставления построим графики амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) при соответствующих значениях $\alpha = 0,2$; $\alpha = 0,417$; $\alpha = 1$ (в данном случае для т. (3) по рис. 7 соответственно $\alpha = 0,362$), как показано на рис. 10.

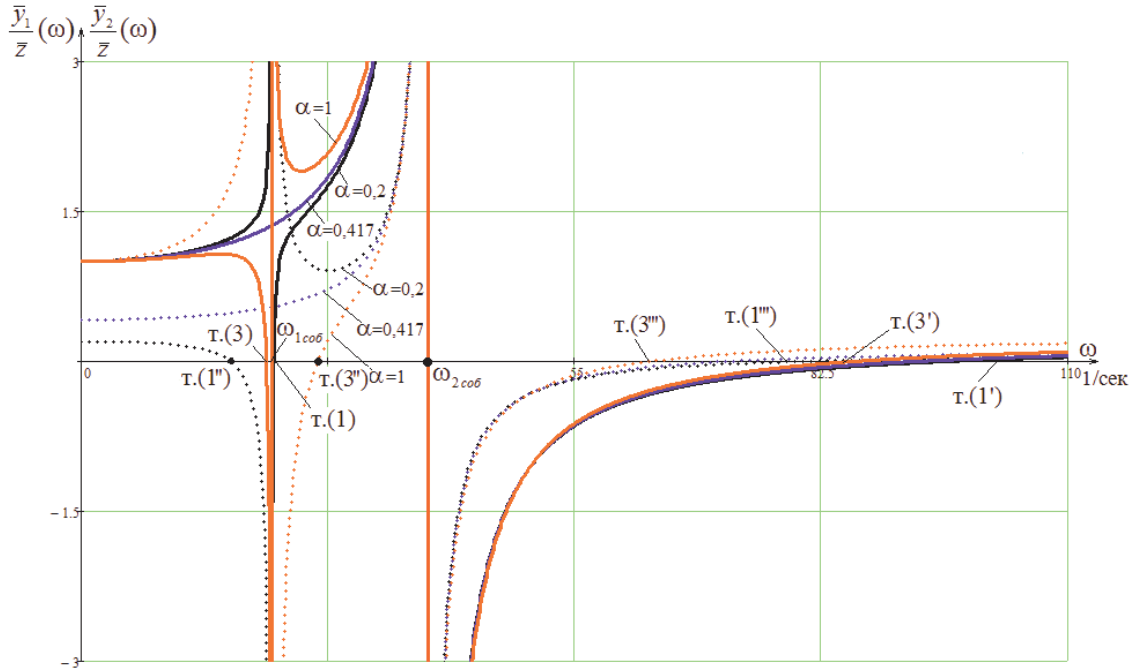


Рис. 10. Семейство АЧХ системы при $L_1 = 10$ кг, $L_2 = 20$ кг, $\beta = 0,5$, при выборе точек, группирующихся относительно т. (3) по рис. 7. График $\frac{\bar{y}_1}{\bar{z}}(\omega)$ обозначен сплошной линией (—), $\frac{\bar{y}_2}{\bar{z}}(\omega)$ — точечной линией (...)

На рис. 10 для каждой координаты y_1 и y_2 существуют две частоты динамического гашения колебаний (для координаты y_1 — тт. (1), (1') при $\alpha = 0,2$ и тт. (3), (3') при $\alpha = 1$; для координаты y_2 — тт. (1''), (1''') при $\alpha = 0,2$ и тт. (3''), (3''') при $\alpha = 1$ соответственно). В случае, когда $\alpha = 0,417$, система превращается в систему с одной степенью свободы.

Заключение

1. Особое внимание при формировании расчетных схем технических объектов должно обращаться на установку внешних сил и учет их особенностей. По существу, составление расчетной схемы является первым этапом формирования упрощенных представлений об исследуемом объекте, который выделяется из более сложной структуры с соответствующими эквивалентными заменами динамических взаимодействий некоторой системой внешних сил, рассматриваемых в предположениях об их автономном действии.

2. Детализация представлений о связности действия сил может рассматриваться как попытка учета более сложных форм воздействия со стороны внешнего окружения на внутреннее состояние системы. В этом плане представляет интерес использование частотных диаграмм, отражающих зависимости определенных частотных форм от настроечных параметров. Во мно-

гих случаях предполагается, что частотное характеристическое уравнение является инвариантом, в том числе, что частоты собственных колебаний, как правило, остаются неизменными при различных преобразованиях координат.

3. Частотная диаграмма механической колебательной системы дает представление о распределении частот различных форм в зависимости от коэффициента связности внешних возмущений α . Если этот параметр равен нулю, то распределение частот соответствует обычной системе с одним возмущающим фактором.

4. Использование частотной диаграммы связано с определением частот динамического гашения колебаний в обобщенном виде, когда необходимые условия определяются через «зануление» числителя передаточной функции. При изменении коэффициента связности в пределах $-\infty < \alpha < \infty$ происходит дважды совпадение частот собственных колебаний и соответствующих частот динамического гашения колебаний. В результате упрощения передаточная функция трансформируется и отображает состояние, характерное для системы с одной степенью свободы. Таким образом, совпадение частот приводит к изменению структуры. В целом можно отметить, что графики зависимостей $\omega_{1\text{дин}1}^2(\alpha)$,

$\omega_{2\text{дин}2}^2(\alpha)$, а также $\omega_{1\text{соб}}^2(\alpha)$, $\omega_{2\text{соб}}^2(\alpha)$ дважды пересекаются в одних и тех же точках.

5. Вместе с тем, остается возможность пересечения между собой графиков зависимостей $\omega_{1\text{дин}1}^2(\alpha)$ и $\omega_{2\text{дин}2}^2(\alpha)$, что определяет частоты одновременного динамического гашения колебаний по двум координатам. Частоты динамического гашения колебаний, зависящие от коэффициента связности α , могут пересекаться с графиками зависимостей парциальных частот, однако во многих случаях парциальные частоты не зависят от коэффициентов связности. Близость частот динамического гашения колебаний и частот собственных колебаний может рассматриваться как фактор, определяющий некоторый потенциал повышения уровня динамических взаимодействий (или динамических выбросов) при изменениях частот внешних возмущений. В этом смысле частотная диаграмма может служить своеобразным сценарием возможных направлений развития динамических взаимодействий элементов механической системы при изменениях частот внешних возмущений и их связности.

Литература

1. Павленко А.П. Динамика тяговых приводов магистральных локомотивов. М.: Машиностроение, 1991. 192 с.
2. Шантаренко С.Г. Критерии качества функционирования тяговых электродвигателей транспорта России // Современные научно-технические проблемы транспорта России. сб. материалов II Междунар. науч. конф. / Ульянов. гос. техн. ун-т. Ульяновск, 2002. С. 30-33.
3. Елисеев С.В., Кашуба В.Б., Николаев А.В., Выонг К.Ч. Некоторые возможности динамического гашения колебаний в системах с несколькими степенями свободы // Вестн. Брян. гос. техн. ун-та. 2017. № 1 (54). С. 290-301.
4. Елисеев С.В., Артюнин А.И., Выонг К.Ч. Кинематическое возмущение в механических колебательных системах: связность воздействий и ее влияние на динамические свойства // Вестн. СамГУПС. 2017. № 1 (35). С. 12-21.
5. Елисеев С.В., Резник Ю.Н., Хоменко А.П., Засядко А.А. Динамический синтез в обобщенных задачах виброза-

щиты и виброизоляции технических объектов. Иркутск: Изд-во ИГУ, 2008. 523 с.

6. Karnovsky I.A., Lebed E. Theory of vibration protection. Switzerland: Springer, 2016. 708 p.

7. Елисеев С.В., Резник Ю.Н., Хоменко А.П. Мехатронные подходы в динамике механических колебательных систем. Новосибирск: Наука, 2011. 384 с.

8. Елисеев С.В., Артюнин А.И. Прикладная теория колебаний в задачах динамики линейных механических систем. Новосибирск: Наука, 2016. 459 с.

9. Ким Д.П. Теория автоматического управления. Т1. Линейные системы. М.: Физматлит, 2003. 288 с.

References

1. Pavlenko A.P. Dynamic of traction actuators of main locomotives. M.: Mashinostroenie, 1991. 192 p.
2. Shantarenko S.G. Criteria of quality of functioning traction electric motors of transport in Russia // Sovremennye nauchno-tekhnicheskie problemy transporta Rossii. sb. materialov II Mezhdunar. nauch. konf. / Ul'yan. gos. tekhn. un-t. Ul'yanovsk, 2002. P. 30-33.
3. Eliseev S.V., Kashuba V.B., Nikolaev A.V., Vyong K.Ch. Some possibilities of dynamical vibration damping in systems with several degrees of freedom // Bulletin BSTU. 2017. № 1 (54). P. 290-301.
4. Eliseev S.V., Artyunin A.I., Vyong K.Ch. Kinematical perturbation in the mechanical oscillating systems: connectivity impacts and its effect on the dynamic properties: svyaznost' vozdeystvii i ee vliyaniye na dinamicheskie svoistva // Vestn. SamGUPS. 2017. № 1 (35). P. 12-21.
5. Eliseev S.V., Reznik Yu.N., Khomenko A.P., Zasyadko A.A. Dynamic synthesis in generalized problems of vibration protection and vibration isolation of technical objects. Irkutsk: Izd-vo IGU, 2008. 523 p.
6. Karnovsky I.A., Lebed E. Theory of vibration protection. Switzerland: Springer, 2016. 708 p.
7. Eliseev S.V., Reznik Yu.N., Khomenko A.P. Mechatronic approaches in the dynamics of mechanical oscillation systems. Novosibirsk: Nauka, 2011. 384 p.
8. Eliseev S.V., Artyunin A.I. Applied theory of oscillations in problems of dynamics of linear mechanical systems. Novosibirsk: Nauka, 2016. 459 p.
9. Kim D.P. Theory of automatic control. Vol.1. Linear systems. M.: Fizmatlit, 2003. 288 p.