

Диада как основа формирования механических колебательных систем

А.В. Елисеев^а, С.В. Елисеев^б

Иркутский государственный университет путей сообщения, ул. Чернышевского 15, Иркутск, Россия

^аeavsh@ya.ru, ^бeliseev_s@inbox.ru

Статья поступила 9.10.2017, принята 15.11.2017

В статье получают развитие методологические позиции в оценке динамических свойств и особенностей взаимодействия элементов в механической диаде. В рассматриваемом случае диада представляет собой структурное образование из двух массоинерционных элементов, соединенных упругим элементом при действии внешних гармонических сил. Предложены приемы построения математических моделей и определения основных динамических характеристик. Диада рассматривается в состоянии изоляции от связей с опорными поверхностями и другими элементами. Показано, что диада, по существу, выполняет функции некоторого фундаментального структурного образования, свойства которого определяют динамические возможности механических колебательных систем, возникающие при наложении на диаду динамических связей. Математическая модель диады формируется на основе линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Предлагается метод построения структурных математических моделей, ориентированных на решение задач динамики объектов, связанных с вибрационной защитой. Приводится детализированная технология преобразования исходных моделей на основе формализма Лапласа и введения понятий о передаточных функциях системы и межпарциальных связей. Получены аналитические соотношения, определяющие динамические свойства диад, которые проявляются через отношения амплитуд колебаний координат системы. Предложено физическое трактование особенностей энергетического метода определения частот собственных колебаний системы.

Ключевые слова: диада; передаточная функция; распределение амплитуд; частотная энергетическая функция; парциальные связи и взаимодействия.

Dyad as a basis of formation of mechanical oscillation systems

A. V. Eliseev^а, S. V. Eliseev^б

Irkutsk State Transport University; 15, Chernyshevskiy St., Irkutsk, Russia

^аeavsh@ya.ru, ^бeliseev_s@inbox.ru

Received 9.10.2017, accepted 15.11.2017

Methodological positions in estimation of dynamic properties and features of interaction of elements in a mechanical dyad are developed. In the case under consideration, the dyad is a structural formation of two mass inertia elements connected by an elastic element under the action of external harmonic forces. Techniques of construction of mathematical models and estimation of the basic dynamic characteristics are offered. The dyad is considered in isolation condition from ties with support surfaces and other elements. It is shown that the dyad performs the functions of some fundamental structural formation, the properties of which predetermine the dynamic possibilities of mechanical oscillatory systems that arise when dynamic bonds are superimposed on the dyad. The mathematical model of a dyad is formed on the basis of the linear differential equations of the second order with constant coefficients. A method is proposed for constructing structural mathematical models oriented to solving the problems of the dynamics of objects associated with vibration protection. A detailed technology for transforming initial models based on the Laplace formalism and introducing concepts on transfer functions of the system and inter-partial connections is given. Analytical relations are obtained that determine the dynamic properties of dyads, which are manifested through the ratio of the amplitude of the oscillations of the coordinates of the system. A physical interpretation of the features of the energy method for determining the frequencies of the natural oscillations of the system is proposed.

Keywords: mechanical system; dyad; transfer function; distribution of amplitudes; frequency-energy function; interpartial ties; dynamic interactions.

Введение

Задачи динамики современных транспортных и технологических машин разнообразны и во многих случаях требуют построения математических моделей и использования аналитических методов. В качестве расчетных схем технических объектов широко применяются механические колебательные системы с одной или несколькими степенями свободы. Теоретические

основы решения задач защиты машин, оборудования и аппаратуры от вибрационных воздействий, в целом характерных для современных условий эксплуатации высокопроизводительной техники, нашли отражение в работах отечественных и зарубежных специалистов [1–5]. Предпроектные исследования, оценка и изучение динамических свойств технических объектов с учетом особенностей их конструктивно-технического оформ-

ления, действия внешних возмущений, возникновения сопутствующих динамических эффектов являются важнейшими этапами в разработке новой техники, обладающей высокими параметрами надежности и безопасности эксплуатации [6–8].

Развитие теории колебаний в ее различных прикладных направлениях предлагает достаточно широкий спектр возможных подходов, методов, основанных на использовании аналитического аппарата теории цепей и теории автоматического управления, что отражает расширение функциональных возможностей машин [9–11].

Вместе с тем, возрастает интерес к углублению и детализации представлений о динамических взаимодействиях элементов, основанных на развитии новых подходов, связанных с учетом возможностей введения в механическую систему дополнительных связей, механизмов и устройств для преобразования движения, использования в задачах динамического анализа и синтеза структурных образований и др. [12–15].

В предлагаемой статье рассматриваются возможности развития новых подходов в формировании теоретических основ анализа и синтеза виброзащитных систем на основе представлений об особых структурных образованиях (диадах), составляющих основу или своеобразное «ядро» механической колебательной системы с двумя степенями свободы.

Общие положения. Постановка задачи исследования. Структурные математические модели систем с несколькими степенями свободы обычно строятся на основе парциальных систем, имеющих одну степень свободы. Технология получения и использования структурных схем на таких подходах изложена в работах [2, 11, 15, 16]. Вместе с тем, в структурных схемах с тремя и более степенями свободы делались попытки использовать парциальные системы более сложного вида, в частности, парциальные системы с двумя степенями свободы. Детализированные представления взаимодействий подобного рода рассмотрены в работах [17, 18]. Промежуточной формой представлений о парциальных системах может быть выбрана диада как некоторое структурное образование, обладающее определенным набором устойчивых динамических свойств и способное выступать в качестве системообразующего начала при построении механических колебательных систем общего вида [9, 19, 20].

Применительно к линейным цепным механическим системам, имеющим несколько степеней свободы и совершающим малые прямолинейные колебательные движения, диада может быть представлена в виде двух массоинерционных элементов, соединенных между собой пружиной и совершающих прямолинейное колебание, как это показано на рис. 1.

Рассматривается структурное образование из двух массоинерционных элементов m_1 и m_2 , соединенных линейной пружиной с жесткостью k_2 (рис. 1). Внешние гармонические силы $q_1 = Q_1 \sin(\omega t)$ и $q_2 = Q_2 \sin(\omega t)$ приложены к массоинерционным элементам; силы со-

противления полагаются малыми; система обладает линейными свойствами.

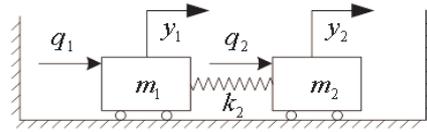


Рис. 2. Принципиальная схема диады: q_1, q_2 — приложенные внешние силы

Движение механической системы (рис. 1) может быть представлено в разных системах координат для отражения интересующих аспектов исследования.

Задача исследования заключается в детализации представлений о диаде как некотором структурном образовании, обладающем определенным набором динамических свойств, и разработке подходов к построению математических моделей, отражающих возможные особенности взаимодействия в структурах механических колебательных систем с несколькими степенями свободы.

Построение математических моделей.

II.1. Абсолютная координатная система. Обобщенные координаты y_1, y_2 . В качестве обобщенных координат выбираются величины y_1 и y_2 , которые обозначают в неподвижном базисе смещение массоинерционных элементов относительно некоторого положения статического равновесия Q_1 . При составлении дифференциальных уравнений Лагранжа 2-го рода для кинетической $T(y_1, y_2)$ и потенциальной энергии $\Pi(y_1, y_2)$ используются выражения:

$$T(y_1, y_2) = \frac{m_1 \dot{y}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{y}_2^2}{2}, \quad (1)$$

$$\Pi(y_1, y_2) = \frac{k_2 (y_2 - y_1)^2}{2}. \quad (2)$$

Соответствующие дифференциальные уравнения движения диады в абсолютной системе координат y_1 и y_2 принимают вид:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{y}_1 + k_2 y_1 - k_2 y_2 = q_1, \\ m_2 \ddot{y}_2 - k_2 y_1 + k_2 y_2 = q_2. \end{cases} \quad (3)$$

$$\quad (4)$$

Начальные условия в момент времени $t = 0$ на смещения и скорости представлены соответственно системой:

$$\begin{cases} y_1(0) = y_{10}, \dot{y}_1(0) = y_{11}, \\ y_2(0) = y_{20}, \dot{y}_2(0) = y_{21}. \end{cases} \quad (5)$$

Аналитическое решение системы дифференциальных уравнений (3), (4) с учетом начальных данных (5) может быть представлено:

$$\begin{cases}
 y_1(t) = \frac{m_1 y_{10} + m_2 y_{20}}{m_1 + m_2} + \frac{m_1 y_{11} + m_2 y_{21}}{m_1 + m_2} t + \\
 + \frac{Q_1 + Q_2}{\omega(m_1 + m_2)} \left(t - \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \right) - \\
 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{(m_1 Q_2 - m_2 Q_1)}{(m_1 + m_2)} \frac{1}{M_{\Pi}} \frac{\omega}{(\omega^2 - \omega_2^2)} \times \\
 \times \left(\frac{\sin(\omega_2 t)}{\omega_2} - \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \right) - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \times \\
 \times ((y_{20} - y_{10}) \cos(\omega_2 t) + (y_{21} - y_{11}) \frac{\sin(\omega_2 t)}{\omega_2}), \quad (6) \\
 y_2(t) = \frac{m_1 y_{10} + m_2 y_{20}}{m_1 + m_2} + \frac{m_1 y_{11} + m_2 y_{21}}{m_1 + m_2} t + \\
 + \frac{Q_1 + Q_2}{\omega(m_1 + m_2)} \left(t - \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \right) + \\
 + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \frac{(m_1 Q_2 - m_2 Q_1)}{(m_1 + m_2)} \frac{1}{M_{\Pi}} \frac{\omega}{(\omega^2 - \omega_2^2)} \times \\
 \times \left(\frac{\sin(\omega_2 t)}{\omega_2} - \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \right) + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \times \\
 \times ((y_{20} - y_{10}) \cos(\omega_2 t) + (y_{21} - y_{11}) \frac{\sin(\omega_2 t)}{\omega_2}), \quad (7)
 \end{cases}$$

где $M_{\Pi} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ — приведенная масса;
 $\omega_2 = \sqrt{k_2 / M_{\Pi}}$ — вторая собственная частота системы
(первая собственная частота обозначается как ω_1).

Движения каждой массы в выбранной системе координат y_1 и y_2 образуются в виде суммы поступательного и гармонического колебаний (включая собственные гармоники) и определяются начальными условиями, амплитудой и частотой внешнего возмущения.

Движение под действием начальных условий. Предполагается, что силовые возмущения равны нулю ($Q_1 = 0$, $Q_2 = 0$), а движение определяется начальными смещениями и скоростями. Решения (6), (7) принимают вид:

$$\begin{cases}
 y_1(t) = \frac{m_1 y_{10} + m_2 y_{20}}{m_1 + m_2} + \frac{m_1 y_{11} + m_2 y_{21}}{m_1 + m_2} t - \\
 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} ((y_{20} - y_{10}) \cos(\omega_2 t) + (y_{21} - y_{11}) \frac{\sin(\omega_2 t)}{\omega_2}), \quad (8) \\
 y_2(t) = \frac{m_1 y_{10} + m_2 y_{20}}{m_1 + m_2} + \frac{m_1 y_{11} + m_2 y_{21}}{m_1 + m_2} t + \\
 + \frac{m_1}{m_1 + m_2} ((y_{20} - y_{10}) \cos(\omega_2 t) + (y_{21} - y_{11}) \frac{\sin(\omega_2 t)}{\omega_2}). \quad (9)
 \end{cases}$$

Движение центра масс (которое может быть рассмотрено как вырожденная форма гармонического колебания с частотой $\omega_1 = 0$) в данном варианте имеет прямолинейную форму. Движение массоинерционных элементов m_1 и m_2 относительно центра масс имеет форму

гармонического колебания с частотой ω_2 и амплитудами A_{01} и A_{02} соответственно:

$$A_{01} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \sqrt{(y_{20} - y_{10})^2 + \left(\frac{y_{21} - y_{11}}{\omega_2}\right)^2}, \quad (10)$$

$$A_{02} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \sqrt{(y_{20} - y_{10})^2 + \left(\frac{y_{21} - y_{11}}{\omega_2}\right)^2}. \quad (11)$$

Следует обратить внимание, что скорость центра масс диады равна нулю, если для начальных скоростей выполняется соотношение:

$$m_1 \dot{y}_1(0) + m_2 \dot{y}_2(0) = 0. \quad (12)$$

Таким образом, движение диады при отсутствии внешнего возбуждения определяется энергией, введенной в систему в начальный момент времени.

Движение под действием приложенной силы. Предполагается, что начальные условия нулевые ($y_{ij} = 0$), и к массе m_1 приложена гармоническая сила с амплитудой $Q_1 \neq 0$ ($Q_2 = 0$). Тогда решения (6), (7) принимают вид:

$$\begin{cases}
 y_1(t) = \frac{Q_1}{\omega(m_1 + m_2)} \left(t - \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \right) - \\
 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{(-m_2 Q_1)}{(m_1 + m_2)} \frac{1}{M_{\Pi}} \frac{\omega}{(\omega^2 - \omega_2^2)} \times \\
 \times \left(\frac{\sin(\omega_2 t)}{\omega_2} - \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \right), \quad (13)
 \end{cases}$$

$$\begin{cases}
 y_2(t) = \frac{Q_1}{\omega(m_1 + m_2)} \left(t - \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \right) + \\
 + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \frac{(-m_2 Q_1)}{(m_1 + m_2)} \frac{1}{M_{\Pi}} \frac{\omega}{(\omega^2 - \omega_2^2)} \times \\
 \times \left(\frac{\sin(\omega_2 t)}{\omega_2} - \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \right). \quad (14)
 \end{cases}$$

Движение центра масс $v_1(t)$ в данном случае складывается из прямолинейной и гармонической форм и имеет вид:

$$v_1(t) = \frac{Q_1}{\omega(m_1 + m_2)} t - \frac{Q_1}{(m_1 + m_2)} \frac{1}{\omega^2} \sin(\omega t). \quad (15)$$

Гармоническая форма колебаний имеет частоту внешнего возмущения ω , амплитуда определяется соотношением:

$$A_M = -\frac{Q_1}{\omega^2(m_1 + m_2)}. \quad (16)$$

Если частота приложенной силы \bar{Q} близка к собственной частоте ω_2 , то наблюдается эффект биений по каждой координате. В частности, по координате y_1 эффект биения создает компонента:

$$y_1^{(b)}(t) = -\frac{Q_1}{(m_1 + m_2)} \frac{1}{\omega^2} \sin(\omega t) - \frac{m_2 Q_1}{(m_1 + m_2) M_{\Pi}(\omega^2 - \omega_2^2)} \left(\frac{\sin(\omega_2 t)}{\omega_2} - \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \right). \quad (17)$$

По координате y_2 эффект биения создает компонента:

$$y_2^{(b)}(t) = -\frac{Q_1}{(m_1 + m_2)} \frac{1}{\omega^2} \sin(\omega t) + \frac{m_1 Q_1}{(m_1 + m_2) M_{\Pi}(\omega^2 - \omega_2^2)} \left(\frac{\sin(\omega_2 t)}{\omega_2} - \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \right), \quad (18)$$

где Q_1 — амплитуда внешней гармонической силы $q_1(t)$.

II.2 Абсолютная координатная система. Обобщенные координаты v_1, v_2 . Детализация представлений о движении диады существенным образом определяется формами движения центра масс и относительным колебанием массоинерционных элементов. Для исследования диады выбирается новая система координат, в которой O_2 — неподвижное положение равновесия системы; v_1 — смещение центра масс; v_2 — разница смещений положений массоинерционных элементов диады.

Кинетическая $T(v_1, v_2)$ и потенциальная энергии $\Pi(v_1, v_2)$ принимают следующие выражения:

$$T(v_1, v_2) = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{v}_1^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{v}_2^2, \quad (19)$$

$$\Pi(v_1, v_2) = \frac{1}{2} k_2 v_2^2. \quad (20)$$

Уравнения Лагранжа 2-го рода в обобщенных координатах v_1, v_2 и силах $f_1 = F_1 \sin(\omega t)$ и $f_2 = F_2 \sin(\omega t)$ принимают вид:

$$\begin{cases} (m_1 + m_2)\ddot{v}_1 = f_1, & (21) \\ \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{v}_2 + k_2 v_2 = f_2. & (22) \end{cases}$$

Для системы (21), (22) начальные условия определяются значениями:

$$\begin{cases} v_1(0) = v_{10}, \dot{v}_1(0) = v_{11}, \\ v_2(0) = v_{20}, \dot{v}_2(0) = v_{21}. \end{cases} \quad (23)$$

В разных системах координат дифференциальные уравнения (6), (7) и (21), (22) связаны между собой посредством замены переменных y_1, y_2 и v_1, v_2 :

$$\begin{cases} v_1 = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}, \\ v_2 = y_2 - y_1. \end{cases} \quad (24)$$

Взаимосвязь (24) обобщенных координат устанавливает начальные условия в координатной системе $v_1,$

v_2 . Начальные условия на смещения в координатах v_1, v_2 могут быть выражены с учетом (24) в виде:

$$\begin{cases} v_{10} = \frac{m_1 y_{10} + m_2 y_{20}}{m_1 + m_2}, \\ v_{20} = y_{20} - y_{10}. \end{cases} \quad (25)$$

Соответствующие начальные скорости в системе координат v_1, v_2 могут быть найдены из соотношений:

$$\begin{cases} v_{11} = \frac{m_1 y_{11} + m_2 y_{21}}{m_1 + m_2}, \\ v_{21} = y_{21} - y_{11}. \end{cases} \quad (26)$$

Обобщенные силы $f_1 = F_1 \sin(\omega t), f_2 = F_2 \sin(\omega t)$ и $q_1 = Q_1 \sin(\omega t), q_2 = Q_2 \sin(\omega t)$ в системах координат v_1, v_2 и y_1, y_2 связаны между собой соотношениями:

$$\begin{cases} f_1 = q_1 + q_2, \\ f_2 = \frac{q_2 m_1 - q_1 m_2}{m_1 + m_2}, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} q_1 = -f_2 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} f_1, \\ q_2 = f_2 + \frac{m_1}{m_1 + m_2} f_1 \end{cases}. \quad (27)$$

Решение системы дифференциальных уравнений в системе координат v_1, v_2 может быть выражено на основе решений (6), (7) с учетом зависимости обобщенных сил (27) и начальных условий (25), (26) в виде:

$$v_1(t) = \frac{F_1}{\omega(m_1 + m_2)} \left(t - \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \right) + v_{10} + v_{11} t, \quad (28)$$

$$v_2(t) = \frac{\omega F_2}{M_{\Pi}(\omega^2 - \omega_2^2)} \left(\frac{\sin(\omega_2 t)}{\omega_2} - \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \right) + v_{20} \cos(\omega_2 t) + v_{21} \frac{\sin(\omega_2 t)}{\omega_2}, \quad (29)$$

где $M_{\Pi} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ — приведенная масса;

$\omega_2 = \sqrt{k_2/M_{\Pi}}$, что совпадает с выражениями, ранее полученными в (6), (7).

Решения (28), (29) представляют собой: по первой координате $v_1(t)$ — смещение центра масс, образованное суммой равномерного прямолинейного движения и гармонического колебания, по второй координате $v_2(t)$ — разницу относительных смещений массоинерционных элементов в форме гармонических колебаний. Полученное решение показывает, что центр масс системы движется не линейно, а содержит гармоническую компоненту.

Интерес представляют величины смещения u_1, u_2 каждого массоинерционного элемента Y_1, Y_2 относительно положения центра масс V_1 с учетом соотношений:

$$\begin{cases} y_1 = v_1 + u_1, \\ y_2 = v_1 + u_2. \end{cases} \quad (30)$$

На основе системы (30) величины относительного смещения u_1, u_2 определяются соотношениями:

$$\begin{cases} u_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_2, \\ u_2 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} v_2. \end{cases} \quad (31)$$

Введение подвижной системы координат, в которой указывается смещение массоинерционного элемента относительно равномерно движущегося начала координат, на основе информации о линейной составляющей решения системы дифференциальных уравнений создает основу для отображения динамических свойств относительного движения диады как механической колебательной системы с одной степенью свободы.

Относительная координатная система. Центр масс системы колеблется относительно «опорной точки» $x_0(t)$ согласно выражениям (28) – (31), что можно обозначить:

$$v_1 = x_0(t) + \psi(t), \quad (32)$$

где $x_0(t) = (F_1/(\omega(m_1 + m_2)) + v_{11})t + v_{10}$ — координата «опорной точки»; $\psi(t) = -F_1 \sin(\omega t) / ((m_1 + m_2)\omega^2)$ — «поправка» на смещение для центра масс относительно равномерного движения $x_0(t)$.

Колебание массоинерционных элементов относительно равномерно движущейся «опорной точки» $x_0(t)$ имеет вид:

$$\begin{cases} x_1(t) = \psi - \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_2, \\ x_2(t) = \psi + \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_2. \end{cases} \quad (33)$$

Аналитические формы относительного движения массоинерционных элементов можно представить:

$$\begin{cases} x_1(t) = -\frac{F_1}{(m_1 + m_2)\omega^2} \sin(\omega t) - \\ -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \left(\frac{\omega F_2}{M_{\Pi}(\omega^2 - \omega_2^2)} \left(\frac{\sin(\omega_2 t)}{\omega_2} - \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \right) + \right. \\ \left. + v_{20} \cos(\omega_2 t) + v_{21} \frac{\sin(\omega_2 t)}{\omega_2} \right), \end{cases} \quad (34)$$

$$\begin{cases} x_2(t) = -\frac{F_1}{(m_1 + m_2)\omega^2} \sin(\omega t) + \\ + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \left(\frac{\omega F_2}{M_{\Pi}(\omega^2 - \omega_2^2)} \left(\frac{\sin(\omega_2 t)}{\omega_2} - \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \right) + \right. \\ \left. + v_{20} \cos(\omega_2 t) + v_{21} \frac{\sin(\omega_2 t)}{\omega_2} \right). \end{cases} \quad (35)$$

Режимы движения диады. Характеристики. Рассматриваются режимы движений диады в зависимости от различных параметров силовых и начальных воздействий. Сочетания параметров, характеризующих диаду как некоторое структурное образование в составе меха-

нической колебательной системы, включая приложенные силы и начальные условия, определяет разнообразие динамических эффектов.

1. Система координат y_1, y_2 . Вынужденные гармонические составляющие $y^{[f]}$, сформированные под воздействием внешнего возбуждения, имеют вид:

$$\begin{cases} y^{[f]}_1(t) = -\frac{1}{m_1 + m_2} \frac{\sin(\omega t)}{\omega^2} (Q_1 + Q_2) + \\ + \frac{1}{m_1} \frac{\sin(\omega t)}{(\omega^2 - \omega_2^2)} \frac{(m_1 Q_2 - m_2 Q_1)}{m_1 + m_2}, \end{cases} \quad (36)$$

$$\begin{cases} y^{[f]}_2(t) = -\frac{1}{m_1 + m_2} \frac{\sin(\omega t)}{\omega^2} (Q_1 + Q_2) - \\ - \frac{1}{m_2} \frac{\sin(\omega t)}{(\omega^2 - \omega_2^2)} \frac{(m_1 Q_2 - m_2 Q_1)}{m_1 + m_2}, \end{cases} \quad (37)$$

где верхний индекс $[f]$ обозначает «вынужденную» компоненту (слагаемое, представляющее гармоническое колебание, с частотой вынужденной силы).

Форма собственных колебаний $y^{[e]}$, соответствующая частоте ω_2 , определяется выражением:

$$\begin{cases} y^{[e]}_1(t) = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} ((y_{20} - y_{10}) \cos(\omega_2 t) + \\ + (y_{21} - y_{11}) \frac{\sin(\omega_2 t)}{\omega_2}), \end{cases} \quad (38)$$

$$\begin{cases} y^{[e]}_2(t) = \frac{m_1}{m_1 + m_2} ((y_{20} - y_{10}) \cos(\omega_2 t) + \\ + (y_{21} - y_{11}) \frac{\sin(\omega_2 t)}{\omega_2}), \end{cases} \quad (39)$$

где верхний индекс $[e]$ обозначает «собственную» компоненту (слагаемое, представляющее гармоническое колебание с частотой собственных колебаний).

2. Система координат v_1, v_2 . Линейные компоненты движения могут быть представлены в виде:

$$\begin{cases} v^{[l]}_1(t) = \left(\frac{F_1}{\omega(m_1 + m_2)} + v_{11} \right) t + v_{10}, \\ v^{[l]}_2(t) = 0, \end{cases} \quad (40)$$

где индекс $[l]$ означает линейную компоненту.

Компонента собственных колебаний, соответствующая частоте ω_2 , может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} v^{[e]}_1(t) = 0, \\ v^{[e]}_2(t) = \frac{\omega F_2}{M_{\Pi}(\omega^2 - \omega_2^2)} \frac{\sin(\omega_2 t)}{\omega_2} + \\ + v_{20} \cos(\omega_2 t) + v_{21} \frac{\sin(\omega_2 t)}{\omega_2}. \end{cases} \quad (41)$$

Компонента вынужденных колебаний $v^{[f]}$, соответственно, запишется:

$$\begin{cases} v^{lf1}_1(t) = -\frac{F_1}{(m_1 + m_2)\omega^2} \sin(\omega t), \\ v^{lf1}_2(t) = -\frac{F_2}{M_{II}(\omega^2 - \omega_2^2)} \sin(\omega t). \end{cases} \quad (42)$$

Отметим, что амплитуда колебания центра масс монотонно убывает по мере увеличения частоты внешнего возмущения ω .

3. *Относительная система координат* x_1, x_2 . Закон движения $x_0(t)$ «опорной точки» системы определяется начальными условиями, модулем и частотой внешнего возмущения:

$$x_0(t) = \left(\frac{F_1}{\omega(m_1 + m_2)} + v_{11}\right)t + v_{10}. \quad (43)$$

При этом «вынужденная» компонента x^{lf1} определяется зависимостями:

$$\begin{cases} x^{lf1}_1(t) = \frac{(-F_1 m_1 + F_2(m_1 + m_2))\omega^2 + F_1 m_1 \omega_2^2}{m_1(m_1 + m_2)} \times \\ \times \frac{1}{\omega^2(\omega^2 - \omega_2^2)} \sin(\omega t), \\ x^{lf1}_2(t) = -\frac{(F_1 m_2 + F_2(m_1 + m_2))\omega^2 - F_1 m_2 \omega_2^2}{m_2(m_1 + m_2)} \times \\ \times \frac{1}{\omega^2(\omega^2 - \omega_2^2)} \sin(\omega t). \end{cases} \quad (44)$$

Движение в «вынужденных» координатах $x^{lf1}_1(t), x^{lf1}_2(t)$ при учете приложенных к массам m_1 и m_2 гармонических сил с амплитудами Q_1 и Q_2 имеет вид:

$$\begin{cases} x^{lf1}_1(t) = \left(Q_1 \left(-\frac{\omega^2}{m_1} + \frac{\omega_2^2}{m_1 + m_2}\right) + \right. \\ \left. + Q_2 \left(\frac{\omega_2^2}{m_1 + m_2}\right) \right) \frac{1}{\omega^2(\omega^2 - \omega_2^2)} \sin(\omega t), \end{cases} \quad (45)$$

$$\begin{cases} x^{lf1}_2(t) = \left(Q_1 \left(\frac{\omega_2^2}{m_1 + m_2}\right) + \right. \\ \left. + Q_2 \left(-\frac{\omega^2}{m_2} + \frac{\omega_2^2}{m_1 + m_2}\right) \right) \frac{1}{\omega^2(\omega^2 - \omega_2^2)} \sin(\omega t). \end{cases} \quad (46)$$

В случае приложения только силы $Q_1 \neq 0 (Q_2 = 0)$ коэффициент формы $x_2^{(1)}(t)/x_1^{(1)}(t)$ (далее верхний индекс (1) или (2) обозначает закон движения, соответствующий силовому возмущению, приложенному к m_1 и m_2 . Индекс $[f]$ опускается, так как рассматривается только вынужденная компонента) составляет величину α_1 :

$$\alpha_1 = \frac{\frac{\omega_2^2}{m_1 + m_2}}{-\frac{\omega^2}{m_1} + \frac{\omega_2^2}{m_1 + m_2}}. \quad (47)$$

Соответственно, в случае приложения только силы $Q_2 (Q_1 = 0)$ коэффициент формы $x_2^{(2)}(t)/x_1^{(2)}(t)$ составляет величину α_2 :

$$\alpha_2 = \frac{-\frac{\omega^2}{m_2} + \frac{\omega_2^2}{m_1 + m_2}}{\frac{\omega_2^2}{m_1 + m_2}}. \quad (48)$$

Для определения частоты внешнего возмущения, для которой коэффициенты форм совпадают между собой, необходимо относительно ω разрешить уравнение $\alpha_1 = \alpha_2$ для коэффициентов, определяемых выражениями (47), (48) и рассматриваемых как функции частоты ω :

$$\frac{\frac{\omega_2^2}{m_1 + m_2}}{-\frac{\omega^2}{m_1} + \frac{\omega_2^2}{m_1 + m_2}} = \frac{-\frac{\omega^2}{m_2} + \frac{\omega_2^2}{m_1 + m_2}}{\frac{\omega_2^2}{m_1 + m_2}}. \quad (49)$$

Уравнение (49) относительно ω имеет решение $\omega_1 = 0, \omega_2$. Графический вариант решения представлен на рис. 2.

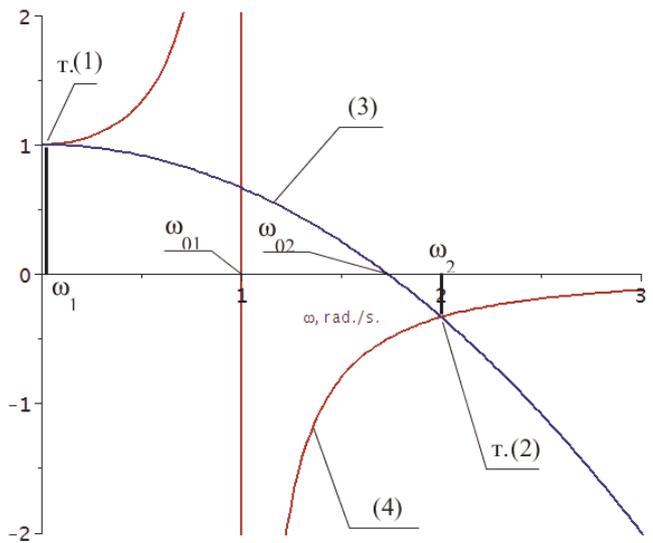


Рис. 3. Зависимость коэффициентов форм α_1 и α_2 от частоты внешнего возмущения ω : ось абсцисс — частота вынужденных колебаний (rad/c); ось ординат — безразмерный коэффициент формы α ($м/м$); точки ω_1, ω_2 — собственные частоты колебаний; точки ω_{01}, ω_{02} — частоты динамического гашения; кривая (3) — график коэффициента формы α_2 ; кривая (4) — график коэффициента формы α_1 ; точка (1) — пересечение графиков в точке с частотой собственных колебаний ω_1 и значением α_1 ; точка (2) — пересечение графиков в точке с частотой собственных колебаний ω_2 и значением α_2 ; точки ω_{01}, ω_{02} — нули и полюс кривых (3) и (4) соответственно

На рис. 2 проиллюстрированы два графика функциональной зависимости коэффициентов форм α_1 (47) и α_2 (48) от частоты внешнего возмущения ω . По оси

абсцисс отложены частота вынужденных колебаний, по оси ординат — значения безразмерных коэффициентов форм α_1 и α_2 . В частности, график коэффициента формы α_2 изображен монотонно убывающей кривой (3) (рис. 2), а график коэффициента формы α_1 с разрывом 2-го рода иллюстрируется с помощью кривой (4) (рис. 2). Данные графики ((3) и (4), рис. 2) пересекаются в двух точках — (1) и (2) (рис. 2) с абсциссами ω_1 , ω_2 и ординатами α_1 , α_2 соответственно. Ноль функции, отображенной кривой (3) (рис. 2), определяет частоту динамического гашения ω_{01} . Полюс функции, отображенной кривой (4) (рис. 2), определяет частоту динамического гашения ω_{02} . Таким образом, построенные графики функций коэффициентов форм, в зависимости от частоты внешнего силового воздействия, иллюстрируют основные характеристики диады: частоты динамического гашения, собственные частоты и величины коэффициентов форм, соответствующие собственным частотам.

4. *Свойства коэффициентов форм колебания.* При заданной частоте внешнего воздействия ω коэффициент формы колебания, представляющий собой отношение $x_2^{(1)}(t)/x_1^{(1)}(t)$ и соответствующий приложению силы с амплитудой Q к массе m_1 , имеет вид:

$$\alpha_1 = \frac{\omega_{01}^2}{\omega_{01}^2 - \omega^2}, \quad (50)$$

где $\omega_{01}^2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \omega_2^2$ — соответствующая частота динамического гашения.

По фиксированному коэффициенту формы колебания α_1 можно определить исходную частоту $\omega_{(1)}$ внешнего силового возмущения Q_1 :

$$\omega_{(1)}^2 = \frac{(\alpha_1 - 1)}{\alpha_1} \omega_{01}^2. \quad (51)$$

Аналогично, при силовом возмущении с амплитудой Q_2 , приложенном к массе m_2 , коэффициент формы имеет вид:

$$\alpha_2 = \frac{\omega_{02}^2 - \omega^2}{\omega_{02}^2}, \quad (52)$$

где $\omega_{02}^2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \omega_1^2$ — соответствующая частота динамического гашения.

С другой стороны, по фиксированному коэффициенту формы колебания частота внешнего возмущения определяется выражением:

$$\omega_{(2)}^2 = \omega_{02}^2 - \alpha_2 \omega_{02}^2. \quad (53)$$

На рис. 3 представлены графики зависимости частот форм колебаний $\omega_{(1)}^2(\alpha_1)$, $\omega_{(2)}^2(\alpha_2)$ от параметров α_1 , α_2 . По оси абсцисс отложен безразмерный коэффициент формы α , который служит независимой переменной

при подстановке α_1 и α_2 в качестве аргумента в функции $\omega_{(1)}^2(\alpha_1)$, $\omega_{(2)}^2(\alpha_2)$, определенные выражениями (51) и (53). По оси ординат отложены квадраты частот $\omega_{(1)}^2(\alpha_1)$, $\omega_{(2)}^2(\alpha_2)$. С учетом условий $\omega_{(i)}^2(\alpha_i) \geq 0, i = 1, 2$ значимой областью графика служат квадранты I и II. Кривые (1) и (2) (рис. 3) представляют собой графики квадратов частот $\omega_{(1)}^2(\alpha_1)$, $\omega_{(2)}^2(\alpha_2)$ соответственно, отражающих обратную зависимость с учетом показателя степени для функций $\alpha_1(\omega)$, $\alpha_2(\omega)$, представленных выражениями (47) и (48). Графики (1) и (2) (рис. 3) пересекаются в точках (3) и (4) (рис. 3) с абсциссами, равными коэффициентам форм α_1 , α_2 собственных колебаний, и ординатами, которые равны квадратам собственных частот, соответственно ω_1^2 , ω_2^2 . В точке пересечения графика (2) (рис. 3) с осью ординат находится частота — квадрат частоты динамического гашения ω_{02}^2 . Квадрат частоты динамического гашения ω_{01}^2 равен предельному значению функции $\omega_{(2)}^2(\alpha)$ при $\alpha \rightarrow \infty$.

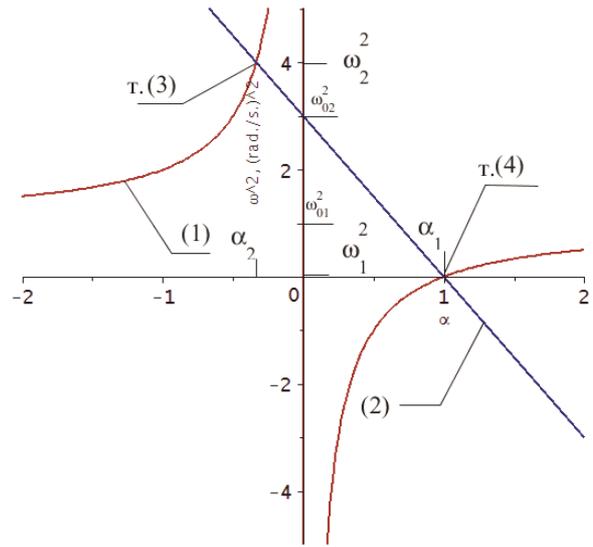


Рис. 4. Зависимость значений ω^2 от коэффициента формы α : ω_1 , ω_2 — собственные частоты колебаний; ω_{01} , ω_{02} — частоты динамического гашения; кривая (1) — график функции $\omega_{(1)}^2(\alpha_1)$; прямая (2) — график функции $\omega_{(2)}^2(\alpha)$; точки (3) и (4) — пересечения графиков (1) и (2)

Приравнивание выражений $\omega_{(1)}^2(\alpha)$, $\omega_{(2)}^2(\alpha)$ приводит к уравнению относительно коэффициента форм α в виде:

$$\alpha^2 \omega_{02}^2 + (\omega_{01}^2 - \omega_{02}^2) \alpha - \omega_{01}^2 = 0. \quad (54)$$

Таким образом, коэффициенты форм α определяются выражением:

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = -\frac{\omega_{01}^2}{\omega_{02}^2}. \quad (55)$$

Диада: динамические эффекты

Эффект «зануления» координат при фиксированном произвольном силовом возмущении. Частотами «зануления» соответствующих компонент принимаются величины ω_{z01} , ω_{z02} :

$$\begin{cases} \omega_{z01}^2 = \omega_2^2 \frac{m_1}{m_1 + m_2} \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1}, \\ \omega_{z02}^2 = \omega_2^2 \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{Q_1 + Q_2}{Q_2}. \end{cases} \begin{cases} \omega_{z01}^2 = \omega_{01}^2 \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1}, \\ \omega_{z02}^2 = \omega_{02}^2 \frac{Q_1 + Q_2}{Q_2}. \end{cases} \quad (56)$$

Используя полученные выражения для частот «зануления», можно показать, что выполняются условия:

$$\frac{Q_1}{Q_1 + Q_2} \omega_{z01}^2 + \frac{Q_2}{Q_1 + Q_2} \omega_{z02}^2 = \omega_2^2. \quad (57)$$

Приняв отношение амплитуд Q_1 , Q_2 приложенных сил за $l = Q_2/Q_1$, отметим, что частоты динамического гашения, представленные точками плоскости с координатами $(\omega_{z01}, \omega_{z02})$, могут быть соотносены с точками эллипса (I квадрант) с полуосями $\omega_2 \sqrt{1+l}$ и $\omega_2 \sqrt{1+1/l}$:

$$\frac{\omega_{z01}^2}{(\omega_2 \sqrt{1+l})^2} + \frac{\omega_{z02}^2}{(\omega_2 \sqrt{1+1/l})^2} = 1. \quad (58)$$

Множество точек вида $(\omega_{z01}, \omega_{z02})$ описывают частоты «зануления» класса диад, для которых сумма парциальных частот равна квадрату собственной частоты исходной механической системы ω_2^2 при фиксированном соотношении приложенных сил l .

На рис. 4 изображены графики функций частот «зануления» $\omega_{z01}(\omega_{01p})$, $\omega_{z02}(\omega_{01p})$ в зависимости от частоты динамического гашения ω_{01p} при фиксированных параметрах соотношения амплитуд силового возмущения l :

$$\begin{cases} \omega_{z01}(\omega_{01p}) = \omega_{01p} \sqrt{1+l}, \\ \omega_{z02}(\omega_{01p}) = \sqrt{\omega_2^2 - \omega_{01p}^2} \sqrt{1+1/l}, \end{cases} \quad (59)$$

где ω_{01p} является варьируемой независимой переменной, подставляемой вместо частоты динамического гашения ω_{01} в (56) с учетом условия $\omega_2^2 = \omega_{01}^2 + \omega_{02}^2$. Кривая (3) (рис. 4) иллюстрирует множество частот «зануления» для всевозможных диад с частотой собственных колебаний ω_2 , для которых амплитуды приложенных сил находятся в отношении $l = 1$. Буквально, это означает, что для любой диады с собственной частотой ω_2 , в случае равенства приложенных к массам m_1 , m_2 сил, частоты «зануления» находятся на окружности радиуса ω_2 . Кривые (2) и (4) (рис. 4) представляют собой множество частот «зануления» для отношения амплитуд сил $l = 0.5$ и $l = 2$ соответственно. Прямые (1) и (6) (рис. 4) представляют собой предель-

ные варианты множеств, характеризующих частоты «зануления» диады в случае приложения силы только к массе m_1 и только к массе m_2 . В частности, особенно частоты «зануления» ω_{z02} второй координаты, соответствующей варианту приложения силы только в массе m_1 , является неустойчивость к изменению амплитуды колебания Q_2 . Аналогично, если сила с амплитудой Q_2 приложена только к массе m_2 , то частота «зануления» по первой координате ω_{z01} неустойчива к изменениям амплитуды Q_1 .

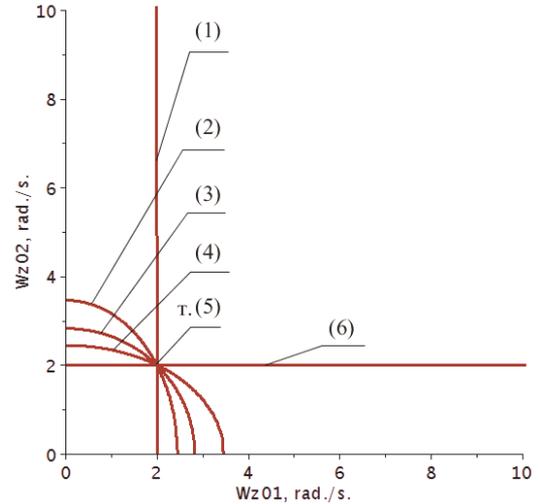


Рис. 5. Множество точек вида $(\omega_{z01}(\omega_{01p}), \omega_{z02}(\omega_{01p}))$, где $\omega_{z01}, \omega_{z02}$ — частоты «зануления» при фиксированном соотношении амплитуд $l > 0$; ω_{01p} — частота динамического гашения, независимая переменная. Кривая (1) соответствует $l = 0.0001$; кривая (2): $l = 0.5$; кривая (3): $l = 1$; кривая (4): $l = 2$; точка (5) — точка с координатой (ω_2, ω_2) , где ω_2 — собственная частота; кривая (5): $l = 10\,000$

Эффект «зануления» координат при различных сочетаниях амплитуд силового возмущения. Частоты «зануления» $\omega_{z01}, \omega_{z02}$ для вариантов диад, когда парциальные частоты ω_{01} , ω_{02} фиксированы, и сумма их квадратов неизменна и равна квадрату собственной частоты ω_2 , а отношение амплитуд сил $l = Q_2/Q_1$ принимает различные значения, могут быть рассмотрены как функции независимой переменной $l > 0$:

$$\begin{cases} \omega_{z01}(l) = \omega_{01} \sqrt{1+l}, \\ \omega_{z02}(l) = \omega_{02} \sqrt{1+1/l}. \end{cases} \quad (60)$$

На основе зависимости (60), фиксируя некоторые значения парциальных частот ω_{01}, ω_{02} с учетом равенства $\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2 = \omega_2^2$ и непрерывно изменяя отношение приложенных сил l , точка $(\omega_{z01}(l), \omega_{z02}(l))$ опишет на плоскости кривую, график которой позволяет детализировать представления об особенностях динамических режимов «зануления» координат диады.

На рис. 5 представлены кривые, характеризующие частоты «зануления» в зависимости от приложенных

сил, для различных вариантов частоты динамического гашения. По оси абсцисс откладывается частота «зануления» первой координаты ω_{z01} , по оси ординат — частота «зануления» второй координаты. Кривая (1) (рис. 5) представляет собой множество частот «зануления», соответствующих частоте динамического гашения $\omega_{01p} = \omega_2$ для всевозможных вариантов сил $l > 0$. Кривые (2) и (3) (рис. 5) представляют собой множество частот «зануления», когда $\omega_{01p} = \omega_{02}$ и $\omega_{01p} = \omega_{01}$ соответственно. Кривая (4) (рис. 5) характеризует множество частот «зануления», соответствующих варианту $\omega_{01p} \approx \omega_1$. Все кривые пересекаются в точке (т. 5, рис. 5) с координатой (ω_2, ω_2) .

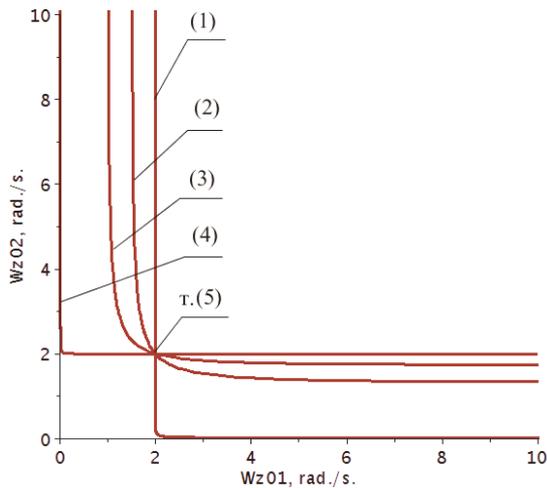


Рис. 6. Множество точек вида $(\omega_{z01}(l), \omega_{z02}(l))$ частот «зануления» при фиксированных частотах динамического гашения ω_{01p} : кривая (1) — кривая, соответствующая значению частоты $\omega_{01p} = \omega_2$; кривая (2) — $\omega_{01p} = \omega_{02}$; кривая (3) — $\omega_{01p} = \omega_{01}$; кривая (4) — $\omega_{01p} = 0.01$ ($\omega_{01p} \approx \omega_1$); точка (5) — точка с координатой (ω_2, ω_2)

К особенностям динамических характеристик диад следует отнести тот факт, что, в случае близости частоты динамического гашения по первой координате к собственным частотам, частоты «зануления» приобретают «дискретно-непрерывный» характер в том смысле, что на определенном интервале коэффициента l одна частота «зануления» «стабилизируется» в окрестности собственной частоты, а вторая — непрерывно изменяется. По мере перехода коэффициента l через определенное пороговое значение частоты «зануления» как бы меняются местами: та частота, которая непрерывно менялась, стабилизируется, а вторая частота — непрерывно меняется.

Биения. Рассмотрим компоненту решения (29), которая формирует биение при нулевых начальных условиях и $F_1 = 0, F_2 \neq 0$:

$$\begin{cases} v^{(b)}_1(t) = 0, \\ v^{(b)}_2(t) = \frac{\omega F_2}{M_{\Pi}(\omega^2 - \omega_2^2)} \left(\frac{\sin(\omega_2 t)}{\omega_2} - \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \right). \end{cases} \quad (61)$$

Процесс периодических биений может быть интерпретирован как колебательный процесс с частотой $\omega_{(b)}$, периодом $T_{(b)}$ и максимальной амплитудой колебания $A_{(b)}$

$$\omega_{(b)} = \omega_2 - \omega, \quad (62) \quad T_{(b)} = \frac{2\pi}{|\omega_2 - \omega|}, \quad (63)$$

$$A_{(b)} = \left| \frac{F_2}{M_{\Pi}(\omega_2 - \omega)\omega_2} \right|. \quad (64)$$

На рис. 6 представлен характерный процесс биения, соответствующий компоненте $v^{(b)}_2(t)$. По оси абсцисс отложено время, по оси ординат — координата $v^{(b)}_2(t)$.

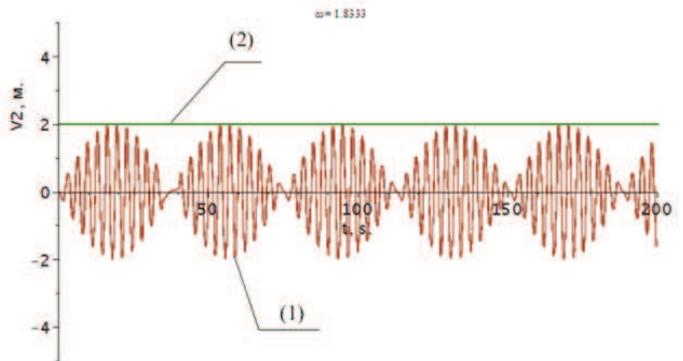


Рис. 7. Биение в относительной системе координат v_1, v_2 : кривая (1) — график функции $v^{(b)}_2(t)$; прямая (2) — указывает величину максимальной амплитуды биения

В общем случае, приложение внешних сил и учет начальных условий формируют сложное движение диады. На рис. 7 приведен пример движения диады при действии силового возмущения.

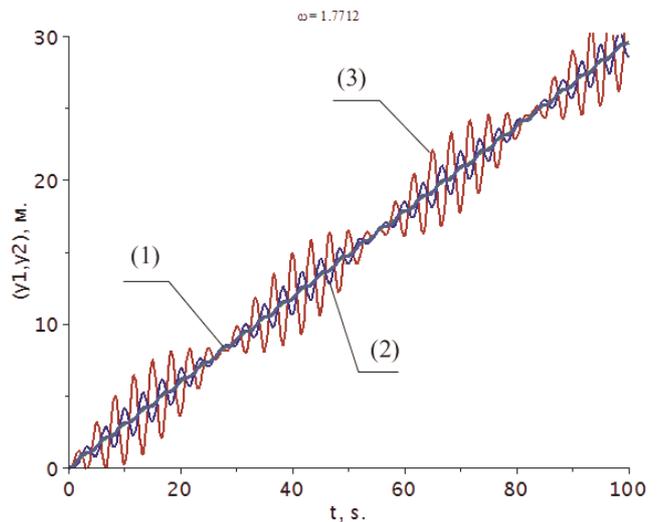


Рис. 8. Эффект биения в системе координат y_1, y_2 под действием сил с амплитудами $Q_1 \neq 0, Q_2 \neq 0$ и нулевыми начальными условиями: кривая (1) — график движения центра масс диады; кривые (2) и (3) — графики координат y_2, y_1 соответственно

Таким образом, движения диады имеют признаки колебательных процессов, реализующихся в маятниковых системах, для которых характерны эффекты динамического гашения, биения и перераспределения энергии [21].

Диада: подходы на основе методов структурного математического моделирования.

1. *Структурная математическая модель.* Структурная математическая модель может быть получена на основе преобразования Лапласа (при нулевых начальных условиях). В частности, (3) и (4) преобразуются к виду:

$$\begin{cases} (m_1 p^2 + k_2)\bar{y}_1 - k_2 \bar{y}_2 = \bar{q}_1, \\ -k_2 \bar{y}_1 + (m_2 p^2 + k_2)\bar{y}_2 = 0, \end{cases} \quad (65)$$

$$\begin{cases} (m_1 p^2 + k_2)\bar{y}_1 - k_2 \bar{y}_2 = \bar{q}_1, \\ -k_2 \bar{y}_1 + (m_2 p^2 + k_2)\bar{y}_2 = 0, \end{cases} \quad (66)$$

где $p = j\omega$ — комплексная переменная $j = \sqrt{-1}$. Значок \leftrightarrow над переменной означает преобразование по Лапласу [2, 10, 15].

На основе (65) и (66) может быть построена структурная схема эквивалентной в динамическом отношении системы автоматического управления (или структурная математическая модель системы), что приводится на рис. 8.

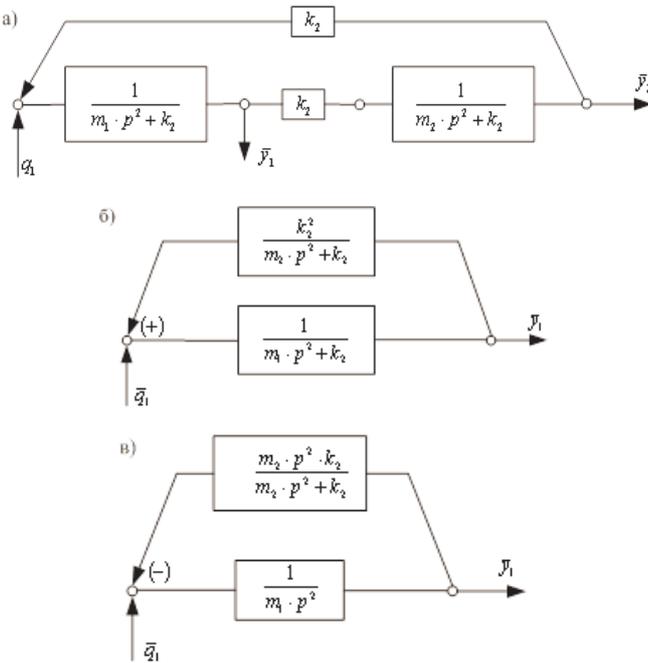


Рис. 9. Структурная схема диады (по рис. 1) в координатах \bar{y}_1, \bar{y}_2 : а — схема общего вида; б — структурная схема с исключением координаты \bar{y}_2 ; в — структурная схема с выделением объекта m_1 и приведенной пружины (приведение структурной модели к системе с одной степенью свободы)

Структурные преобразования (рис. 8) отражают динамические свойства диады. В частности, для оценки свойств диады можно ввести передаточные функции по координатам \bar{y}_1, \bar{y}_2 при силовом возмущении:

$$W_1 = \frac{\bar{y}_1}{\bar{q}_1} = \frac{m_2 p^2 + k_2}{(m_2 p^2 + k_2)(m_1 p^2 + k_2) - k_2^2}, \quad (67)$$

$$W_2 = \frac{\bar{y}_2}{\bar{q}_1} = \frac{k_2}{(m_2 p^2 + k_2)(m_1 p^2 + k_2) - k_2^2}. \quad (68)$$

Собственные частоты ω_1, ω_2 определяются из характеристического уравнения системы и равны соответственно:

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k_1}{M_{II}}}. \quad (69)$$

На частоте внешнего воздействия $n_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}$ реализуется режим динамического гашения по первой координате y_1 . Передаточная функция межпарциальных связей имеет вид:

$$W_{21} = \frac{\bar{y}_2}{\bar{y}_1} = \frac{k_2}{m_2 p^2 + k_2}. \quad (70)$$

Система (рис. 9) в координатах \bar{y}_1, \bar{y}_2 состоит из двух парциальных блоков с парциальными частотами:

$$n_1 = \sqrt{\frac{k_2}{m_1}}, \quad (71) \quad n_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}. \quad (72)$$

Парциальные блоки системы имеют упругую связь, реализуемую звеном с передаточной функцией $W(p) = k_2$.

2. *Передаточные функции.* Передаточные функции определяются из структурных схем на рис. 8 и имеют вид:

$$\frac{\bar{y}_1}{\bar{q}_1}(\omega) = \frac{-m_2 \omega^2 + k_2}{A(\omega)}, \quad (73)$$

$$\frac{\bar{y}_2}{\bar{q}_1}(\omega) = \frac{k_2}{A(\omega)}, \quad (74)$$

$$\frac{\bar{y}_2}{\bar{y}_1}(\omega) = \frac{k_2}{m_2 p^2 + k_2}, \quad (75)$$

где $A(\omega) = (m_2 p^2 + k_2)(m_1 p^2 + k_2) - k_2^2$.

С учетом передаточных функций (67), (68), (70) могут быть построены амплитудно-частотные характеристики $\frac{\bar{y}_1}{\bar{q}_1}(\omega), \frac{\bar{y}_2}{\bar{q}_1}(\omega), \frac{\bar{y}_2}{\bar{y}_1}(\omega)$.

На рис. 9 представлен график амплитудно-частотной характеристики $\frac{\bar{y}_1}{\bar{q}_1}(\omega)$. По оси абсцисс отложена частота внешней возмущающей силы ω , по ординате — отношение амплитуды колебания координаты y_1 к амплитуде приложенной силы. Точка $\omega=0$ является полюсом амплитудно-частотной характеристики $\frac{\bar{y}_1}{\bar{q}_1}(\omega)$, при котором колебание координаты и приложенной силы происходит в противофазе, на интервале $(0, \omega_{01})$. Отметим, что в (т. 1, рис. 9) $\omega = \omega_{01}$, являющейся нулем амплитудно-частотной характеристики,

система при силе q_1 , приложенной к массе m_1 , имеет режим динамического гашения колебаний. На интервале (ω_{01}, ω_2) происходит «синхронизация» фаз колебания координаты y_1 и приложенной силы q_1 . Точка (т. 2, рис. 9) $\omega = \omega_2$, в которой график амплитудно-частотной характеристики терпит разрыв 2-го рода, определяет резонанс. После резонанса на интервале (ω_2, ∞) колебания координаты и приложенной силы происходят в противофазе.

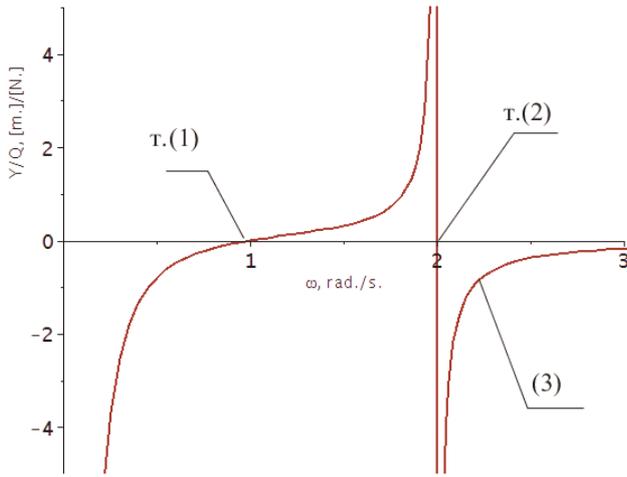


Рис. 10. Амплитудно-частотная характеристика $\frac{\bar{y}_1}{q_1}(\omega)$: точка (1) — частота динамического гашения первой координаты; точка (2) — собственная частота; кривая (3) — график амплитудно-частотной характеристики с двумя полюсами в точках собственных частот и одним нулем — в точке динамического гашения

На рис. 10 представлен график амплитудно-частотной характеристики $\frac{\bar{y}_2}{q_1}(\omega)$. По оси абсцисс отложена частота ω внешнего силового возмущения. В точках $\omega=0$ и $\omega = \omega_2$ функция терпит разрыв 2-го рода. В точке (2) на рис. 10 в системе реализуется режим резонанса. На интервале (ω_1, ω_2) колебания амплитуды y_2 и амплитуды вынужденной силы находятся в противофазе. После перехода через резонанс $\omega = \omega_2$ (т. 2, рис. 10) происходит «синхронизация» фаз колебания координаты \bar{y}_2 и колебания вынуждающей силы q_1 . График (1, рис. 10) не имеет нулей, и в системе отсутствуют режимы динамического гашения.

Изменение знака амплитудно-частотной характеристики при переходе через точку (2) показывает изменение режима относительного колебания координаты \bar{y}_2 и приложенной к массе m_1 силы q_1 , в частности, происходит смена режима колебания в противофазе на режим синфазного колебания.

На рис. 11 приведена частотная характеристика межпарциальных связей, которая дает представление о формах связности движения.

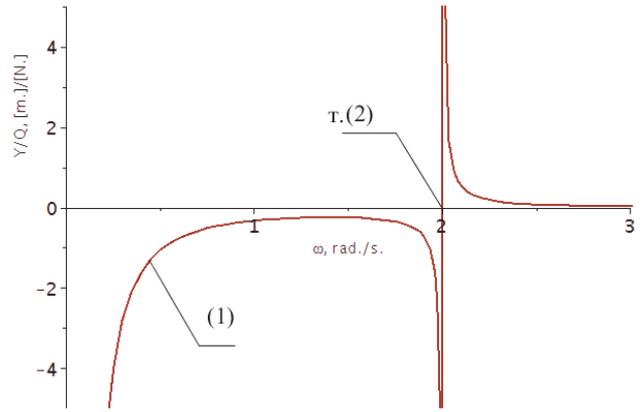


Рис. 11. Амплитудно-частотная характеристика $\frac{\bar{y}_2}{q_1}(\omega)$: кривая (1) представляет собой график амплитудно-частотной характеристики; точка (2) — собственная частота, в которой разрыв 2-го рода амплитудно-частотной функции отражает эффект резонанса

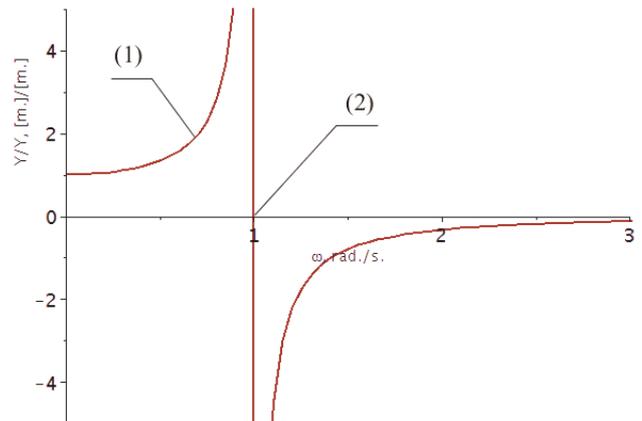


Рис. 12. Амплитудно-частотная характеристика $\frac{\bar{y}_2}{y_1}(\omega)$: кривая (1) — график межпарциальной частотной функции с разрывом 2-го рода в точке (2); точка (2) — частота динамического гашения координаты y_1 ; интервал (ω_1, ω_{01}) соответствует первой форме синфазного колебания, интервал (ω_{01}, ∞) — второй форме колебания в противофазе

В частности, в первом диапазоне частот от $\omega=0$ до точки (2) на рис. 11, представляющем интервал (ω_1, ω_{01}) , движение координат y_1, y_2 происходит синфазно (частотная характеристика положительна). После прохождения частоты динамического гашения по координате y_1 , являющейся для парциальной частотной функции точкой разрыва 2-го рода, движение по координатам y_1, y_2 происходит в противофазе (частотная функция отрицательна на интервале (ω_{01}, ∞)). Более подробные сведения об использовании передаточных функций межпарциальных связей можно найти в работах [22, 23].

3. Частотно-энергетическая функция. Рассматривается система координат y_1 и y_2 . Кинетическая и потенциальная энергии определяются соответственно:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}_2^2, \quad (76) \quad \Pi = \frac{1}{2} k_2 (y_2 - y_1)^2. \quad (77)$$

Полагается, что система совершает собственные колебания $y_2 = A_2 \sin \omega t$, $y_1 = A_1 \sin \omega t$. Отношение амплитуд составляет $\alpha = A_2/A_1$. Можно показать, что максимум кинетической и потенциальной энергии совпадают:

$$T_{\max} = \Pi_{\max}. \quad (78)$$

Таким образом, частотно-энергетическая функция принимает вид:

$$\omega^2 = \frac{k_2(\alpha - 1)^2}{m_1 + \alpha^2 m_2}. \quad (79)$$

Найдем первую производную функции (79):

$$\frac{\partial(\omega^2)}{\partial \alpha} = \frac{2k_2(\alpha - 1)(m_1 + \alpha m_2)}{(m_1 + \alpha^2 m_2)^2} \quad (80)$$

и найдем две экстремальных точки:

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = -\frac{m_1}{m_2}. \quad (81)$$

Отметим, что для диады выполняются условия:

$$\omega^2(\alpha_1) = 0, \quad \omega^2(\alpha_2) = k_2 \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}, \quad \omega^2(0) = \frac{k_2}{m_1},$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \omega^2(\alpha) = \frac{k_2}{m_2}, \quad \omega^2 = \frac{k_2(\alpha - 1)^2}{m_1 + \alpha^2 m_2}. \quad (82)$$

На рис. 12 приведен график частотной энергетической функции. По оси абсцисс отложен коэффициент $\alpha \rightarrow \infty$. График в системе координат y_1, y_2 имеет характерную форму, определяющую возможности проявления экстремальных свойств на двух частотах, в данном случае, $\omega^2(\alpha_1), \omega^2(\alpha_2)$. График частотно-энергетической функции (1, рис. 12) при $\alpha \rightarrow \infty$ обладает асимптотой (2, рис. 12), ордината которой равна частоте динамического гашения ω_{01} . Пересечение графика энергетической функции оси ординат определяет вторую частоту динамического гашения ω_{02} со значением, представленным прямой (3, рис. 12). Максимум и минимум энергетической функции определяют собственные частоты.

При переходе к системе координат v_1, v_2 меняются вид частотной энергетической функции и ее график.

Рассматривается система координат v_1 и v_2 . Кинетическая и потенциальная энергии равны соответственно:

$$T = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{v}_1^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{v}_2^2, \quad (83) \quad \Pi = \frac{1}{2} k_2 v_2^2. \quad (84)$$

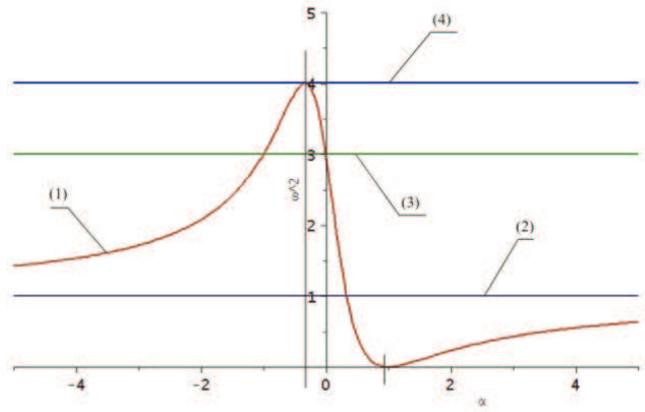


Рис. 13. Энергетическая функция в системе координат y_1, y_2 : кривая (1) — график частотно-энергетической функции; прямая (2) — асимптота частотно-энергетической функции при $\alpha \rightarrow \infty$, равная частоте динамического гашения ω_{01} ; прямая (3) пересекает частотно-энергетическую функцию в значении частоты динамического значения ω_{02} ; прямая (4) пересекает график частотно-энергетической функции в точке максимума

Полагается, что система совершает собственные колебания $v_2 = B_2 \sin \omega t$, $v_1 = B_1 \sin \omega t$. Отношение амплитуд составляет $\beta = B_2/B_1$. Из соотношения $T_{\max} = \Pi_{\max}$, представленного в переменных β, B_1 получается соотношение:

$$\frac{1}{2} (m_1 + m_2) \omega^2 B_1^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \omega^2 \beta^2 B_1^2 = \frac{1}{2} k_2 \beta^2 B_1^2. \quad (85)$$

Полученное выражение может быть преобразовано к виду:

$$\frac{1}{\omega_0^2 \beta^2} + \frac{1}{\omega_2^2} = \frac{1}{\omega^2}, \quad (86)$$

где $\omega_0^2 = \frac{k_2}{m_1 + m_2}$.

Таким образом, частотно-энергетическая функция имеет вид:

$$\omega^2 = \frac{\beta^2 \omega_0^2 \omega_2^2}{\beta^2 \omega_0^2 + \omega_2^2}. \quad (87)$$

Возьмем первую производную:

$$\frac{\partial(\omega^2)}{\partial \beta} = \frac{2\beta \omega_2^4 \omega_0^2}{(\beta^2 \omega_0^2 + \omega_2^2)^2}. \quad (88)$$

Функция $\omega^2(\beta)$ монотонно возрастает на положительной полуоси $\beta \geq 0$. Если коэффициент формы $\beta_1 = 0$, то функция ω^2 достигает локального минимума, равного нулю. Если коэффициент формы стремится к бесконечности $\beta \rightarrow \infty$, то функция $\omega^2 \rightarrow \omega_2^2$. Частоты динамического гашения совпадают с собственными частотами. Локальные максимум и минимум вырождаются в асимптотические значения [24].

Заключение

1. Диада, если рассматриваются плоские механические колебательные системы с несколькими степенями свободы, представляет собой достаточно автономное структурное образование, которое обладает характерными динамическими свойствами. Это проявляется в особенностях частотных характеристик, наличии определенных соотношений между координатами системы в формах свободных и вынужденных движений. Свойства диад сохраняются при переходе к другим системам координат, однако при этом необходимо соблюдение определенных условий.

2. Авторами развита и детализирована технология построения математических моделей диад в разных системах координат с выявлением особенностей динамических взаимодействий. Отмечено, что диады при ненулевых условиях могут аккумулировать механическую энергию, что представляет интерес для развития подходов, связанных с оценкой возможностей передачи энергии в цепных структурах.

3. При действии внешних гармонических возмущений в диаде реализуются характерные для колебательных систем динамические режимы взаимодействия массоинерционных элементов.

4. Отмечено, что показатели форм колебаний, проявляющиеся в свободных движениях и определяемые соответствующими коэффициентами форм движения, связаны общими зависимостями, которые проявляются между частотами собственных колебаний. Авторами разработан метод определения коэффициентов форм и частот собственных колебаний на основе использования частотных характеристик межпарциальных связей. Показано, что при последовательном возбуждении движения массоинерционных элементов диады через приложения гармонических сил последовательно к обоим массам можно однозначно определить частоты собственных колебаний, коэффициенты форм и обратно.

5. Внешние гармонические возмущения в диаде возбуждают движение по определенным собственным формам, характерным для собственных колебаний. При этом параметры таких движений определяются значениями массоинерционных и упругих характеристик элементов системы.

Литература

1. Фролов К.В., Фурман Ф.А. Прикладная теория виброзащитных систем. М.: Машиностроение, 1985. 286 с.
2. Елисеев С.В., Артюнин А.И. Прикладная теория колебаний в задачах динамики линейных механических систем. Новосибирск, 2016. 459 с.
3. Елисеев С.В., Хоменко А.П. Динамическое гашение колебаний: концепция обратной связи и структурные методы математического моделирования. Новосибирск: Наука, 2014. 357 с.
4. Clarence W. de Silva. Vibration. Fundamentals and Practice. Boca Raton; London; New York; Washington D.C.: CRC Press, 2000. 957 p.

5. Karnovsky I.A., Lebed E. Theory of Vibration Protection, Springer International Publishing. Switzerland, 2016. 708 p.
6. Махутов Н.А. Прочность, ресурс, живучесть и безопасность машин: моногр. М.: URSS, 2008. 574 с.
7. Лонцих П.А., Елисеев С.В. Динамическое качество машин и оборудования как инструмент обеспечения надежности производства и конкурентоспособности процессов: моногр. Иркутск: Изд-во Иркут. гос. техн. ун-та, 2014. 322 с.
8. Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Увер У. Теория колебаний в инженерном деле. М.: Машиностроение, 1985. 472 с.
9. Тарасик В.П. Математическое моделирование технических систем: Минск, 2004. 640 с.
10. Белокобыльский С.В., Елисеев С.В., Ситов И.С. Динамика механических систем. Рычажные и инерционно-упругие связи. СПб.: Политехника, 2013. 320 с.
11. Елисеев С.В., Резник А.П., Хоменко А.П. Мехатронные подходы в динамике механических колебательных систем: моногр. Новосибирск: Наука, 2011. 383 с.
12. Хоменко А.П., Елисеев С.В., Ермошенко Ю.В. Системный анализ и математическое моделирование в мехатронике виброзащитных систем. Иркутск: ИргУПС, 2012. 288 с.
13. Емельянов С.В., Коровин С.К. Новые типы обратной связи: Управление при не определенности. М.: Наука: Физматлит, 1997. 352 с.
14. Ленк А. Электромеханические системы. Системы с сосредоточенными параметрами. М.: Мир, 1978. 288 с.
15. Елисеев С.В., Резник Ю.Н., Хоменко А.П., Засядко А.А. Динамический синтез в обобщенных задачах виброзащиты и виброизоляции технических объектов. Иркутск: Изд-во ИГУ, 2008. С. 523.
16. Цзе Ф.С., Морзе И.Е., Хинл Р.Т. Механические колебания. М.: Машиностроение, 1966. 508 с.
17. Елисеев С.В., Большаков Р.С., Нгуен Д.Х., Вьонг К.Ч. Определение частот собственных колебаний механических колебательных систем: особенности использования частотной энергетической функции. Ч. 1 // Вестн. Иркут. гос. техн. ун-та. 2016. № 6 (113). С. 26-33.
18. Елисеев С.В., Большаков Р.С., Нгуен Д.Х., Вьонг К.Ч. Определение частот собственных колебаний механических колебательных систем: особенности использования частотной энергетической функции. Ч. 2. // Вестн. Иркут. гос. техн. ун-та. 2016. № 7 (114). С. 10-23.
19. Артоболевский И.И. Теория механизмов и машин. М.: Наука, 1978. 640 с.
20. Степанов Н.Ф. Квантовая механика и квантовая химия. М.: Мир, 2001. 519 с.
21. Зоммерфельд А. Механика. М.; Ижевск: НИЦ РХД, 2001. 368 с.
22. Елисеев С.В., Лонцих П.Л. Оценка форм взаимодействия между парциальными системами в механических цепях. Возможные упрощения // Вестн. Иркут. гос. техн. ун-та. 2012. № 6 (65). С. 17-21.
23. Елисеев С.В., Трофимов А.Н., Каимов Е.В. О формах парциальной связности в колебаниях механических систем // Междунар. журн. прикладных и фундаментальных исследований. 2014. № 5-1. С. 15-25.
24. Хоменко А.П., Елисеев С.В. Развитие энергетического метода определения частот свободных колебаний механических систем // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2016. № 1 (49). С. 8-19.

References

1. Frolov K.V., Furman F.A. Applied theory of vibration protection systems. M.: Mashinostroenie, 1985. 286 p.
2. Eliseev S.V., Artyunin A.I. Applied theory of oscillations in problems of dynamics of linear mechanical systems. Novosibirsk, 2016. 459 p.
3. Eliseev S.V., Khomenko A.P. Dynamic oscillation: concept of feedback and structural methods of mathematical modeling. Novosibirsk: Nauka, 2014. 357 p.
4. Clarence W. de Silva. Vibration. Fundamentals and Practice. Boca Raton; London; New York; Washington D.C.: CRC Press, 2000. 957 p.
5. Karnovsky I.A., Lebed E. Theory of Vibration Protection, Springer International Publishing. Switzerland, 2016. 708 p.
6. Makhutov N.A. Durability, resource, survivability and safety of machines: monogr. M.: URSS, 2008. 574 p.
7. Lontsikh P.A., Eliseev S.V. The dynamic quality of machinery and equipment as a tool to ensure reliability of production and competitiveness of the processes: monogr. Irkutsk: Izd-vo Irkut. gos. tekhn. un-ta, 2014. 322 p.
8. Timoshenko S.P., Yang D.Kh., Uver U. Theory of oscillations in engineering. M.: Mashinostroenie, 1985. 472 p.
9. Tarasik V.P. Mathematical modeling of technical systems: Minsk, 2004. 640 p.
10. Belokobyl'skii S.V., Eliseev S.V., Sitov I.S. Dynamics of mechanical systems. Lever and inertial-elastic connection. SPb.: Politekhnik, 2013. 320 p.
11. Eliseev S.V., Reznik A.P., Khomenko A.P. Mechatronic approaches in the dynamics of mechanical oscillation systems: monogr. Novosibirsk: Nauka, 2011. 383 p.
12. Khomenko A.P., Eliseev S.V., Ermoshenko Yu.V. System analysis and mathematical modeling in mechatronics vibration isolation systems. Irkutsk: IrGUPS, 2012. 288 p.
13. Emel'yanov S.V., Korovin S.K. New types of feedback: Management under uncertainty. M.: Nauka: Fizmatlit, 1997. 352 p.
14. Lenk A. Electromechanical system. System with lumped parameters. M.: Mir, 1978. 288 p.
15. Eliseev S.V., Reznik Yu.N., Khomenko A.P., Zasyadko A.A. Dynamic synthesis of generalized problems of vibration and vibration control of technical objects. Irkutsk: Izd-vo IGU, 2008. 523 p.
16. Tsze F.S., Morze I.E., Khinl R.T. Mechanical vibrations. M.: Mashinostroenie, 1966. 508 p.
17. Eliseev S.V., Bol'shakov R.S., Nguen D.Kh., Vyong K.Ch. Determination of the natural frequencies of mechanical oscillation systems: the use of features of frequency energy function. Part I // Bulletin of Irkutsk State Technical University. 2016. № 6 (113). P. 26-33.
18. Eliseev S.V., Bol'shakov R.S., Nguen D.Kh., Vyong K.Ch. Determination of the natural frequencies of mechanical oscillation systems: the use of features of frequency energy function. Part II // Bulletin of Irkutsk State Technical University. 2016. № 7 (114). P. 10-23.
19. Artobolevskii I.I. Theory of mechanisms and machines. M.: Nauka, 1978. 640 p.
20. Stepanov N.F. Quantum mechanics and quantum chemistry. M.: Mir, 2001. 519 p.
21. Zommerfel'd A. Mechanics. M.; Izhevsk: NITs RKhD, 2001. 368 p.
22. Eliseev S.V., Lontsikh P.L. Evaluation of forms of interaction between the partial systems in the machine circuits. Possible simplification // Bulletin of Irkutsk State Technical University. 2012. № 6 (65). P. 17-21.
23. Eliseev S.V., Trofimov A.N., Kaimov E.V. The forms of partial coherence in oscillations of mechanical systems // International Journal of Applied and Fundamental Research. 2014. № 5-1. P. 15-25.
24. Khomenko A.P., Eliseev S.V. The development of the energy method for the determination of frequencies of free oscillations of mechanical systems // Modern technologies. System analysis. Modeling. 2016. № 1 (49). P. 8-19.