# ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ И МАШИНОСТРОЕНИЯ

УДК 62.752, 621:534; 833; 888.6, 629.4.015; 02 DOI: 10.18324/2077-5415-2017-1-7-18

## К вопросу о математической модели цепной механической системы

С.В. Белокобыльский[1 a], А.В. Елисеев[2 b], И.С. Ситов[1 c], А.И. Артюнин[2 d]

[1]Братский государственный университет, ул. Макаренко 40, Братск, Россия
[2]Иркутский государственный университет путей сообщения, ул. Чернышевского 15, Иркутск, Россия
[a]rector@brstu.ru, [b]eavsh@ya.ru, [c]sitov@ya.ru, [d]artyunin_ai@irgups.ru
Статья поступила 15.11.2016, принята 22.12.2016

*Рассматриваются возможности преобразования на основе структурных методов механических колебательных систем цепного типа с целью выявления особенностей, возникающих в различных схемах расположения объекта, динамическое состояние которого оценивается. Показано, что система с несколькими степенями свободы может быть приведена к виду, имеющему признаки системы с одной степенью свободы, что достигается путем исключения некоторых координат, а также введением новых звеньев, обладающих специфическими особенностями. Представлено детализированное рассмотрение особенностей динамических свойств системы при одновременном действии двух функционально связанных факторов. Обсуждаются новые динамические эффекты в динамических состояниях, характерных для вынужденных колебаний. Предлагается обобщенная форма структурных математических моделей механических колебательных систем при связанных внешних силовых возмущениях. Исследование возможности редукции вида структурной схемы линейной механической колебательной системы с двумя степенями свободы при одновременном действии двух внешних гармонических сил к виду структурной схемы системы с одной степенью свободы показало, что приведенная схема может быть представлена формой, образованной с помощью четырех звеньев. Приведение схемы к виду системы с одной степенью свободы обеспечивается возможностью приведения всех сил к одному объекту и допущения о существовании линейной зависимости между приложенными силами.*

**Ключевые слова:** структурная математическая модель; квазиупругий элемент; динамическое гашение колебаний; блокировка силовых возмущений.

## On the issue of mathematical model of chain mechanical system

S.V. Belokobyl'skii[1 a], A.V. Eliseev[2 b], I.S. Sitov[1 c], A.I. Artyunin[2 d]

[1]Bratsk State University, 40, Makarenko St., Bratsk, Russia
[2]Irkutsk State Transport University, 15, Chernyshevsky st., Irkutsk, Russia
[a]rector@brstu.ru, [b]eavsh@ya.ru, [c]sitov@ya.ru, [d]artyunin_ai@irgups.ru
Received 15.11.2016, accepted 22.12.2016

*The article deals with the possibility of transformation on the base of the structural methods of mechanical oscillation systems of the chain type. The article is aimed at identifying the features arising in different schemes of dynamically evaluated object orientation. It is shown that a system with multiple degrees of freedom can be reduced to the form having the features of the system with one degree of freedom. The result is achieved by eliminating some coordinates and the introduction of new blocks with special properties. The detailed consideration of the features of dynamical properties of the system under the simultaneous excitation of two functionally related factors is presented. New dynamic effects in the dynamic conditions characteristic of forced oscillations are discussed. Generalized structural mathematical models of mechanical oscillation systems under bound external force excitations are proposed. The research of the possibility of reduction of a block diagram of a linear mechanical oscillatory system with two degrees of freedom under simultaneous action of two external harmonic forces to the form of the block diagram of the system with one degree of freedom showed that the scheme can be represented by a shape formed by means of four links. Adapting the schema to the system with one degree of freedom is provided by the possibility of bringing all the forces to one object and the assumption of the existence of a linear relationship between the applied forces.*

**Keywords:** structural mathematical model; quasi-elastic element; dynamic vibration damping; force excitations blocking.

### Введение

Силовые взаимодействия элементов механических колебательных систем, при всем разнообразии задач динамики, проявляются чаще всего в том, что носят периодический характер. Формы динамических реакций отличаются сложностью и зависят от многих факторов, что отражено в работах последних лет [1–4].

Несмотря на достаточно детализированную систему представлений об особенностях свойств механических колебательных систем с линейными и нелинейными свойствами, аналитическое исследование систем, особенно с несколькими степенями свободы и несколькими внешними возмущениями, связано с большими трудностями, что инициирует поиск и разработку методов упрощения математических моделей. Такие подходы развиваются в работах по математическому моделированию, имеются практические приложения [5; 6]. Известность получили частные методы исследования, основанные на использовании аналитического аппарата теории цепей и теории автоматического управления [3; 7; 8]. В ряде прикладных задач, в частности в задачах вибрационной защиты машин и оборудования, рассматривается действие на объекты определенной системы вибрационных возмущений. При построении математических моделей динамических взаимодействий вид внешних возмущений имеет, в ряде случаев, существенное значение.

Учет особенностей нашел отражение в решении задач виброизоляции объектов, вибрационной защиты и реализации специфических режимов динамических состояний технологических объектов [9–12]. В меньшей степени изучены особенности динамических взаимодействий элементов механических колебательных систем при совместном действии нескольких факторов, хотя в ряде работ и имеется информация о специфике такого рода динамических состояний, например, в работах [13–15]. Вместе с тем остается открытым вопрос исследования возможностей и изучения систем сложной структуры на основе приведенных систем с одной степенью свободы.

В предлагаемой статье представлен метод преобразования математических моделей с возможностью снижения (редукции) размерности механических колебательных систем, динамическое состояние которых определяется совместными действиями нескольких внешних факторов, связанных между собой определенными функциональными зависимостями.

**Общие положения и постановка задачи.** Рассматривается линейная система из $N$ последовательно соединенных массоинерционных элементов, совершающая малые колебания без трения под действием внешних гармонических сил или кинематических возмущений со стороны опорных поверхностей, как показано на рис. 1.

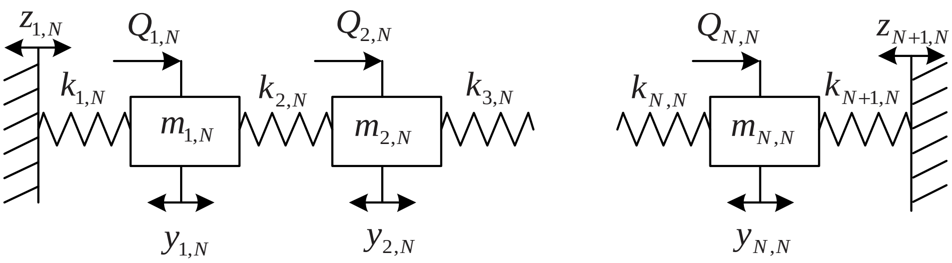


**Рис. 1.** Расчетная схема цепной системы с $N$ степенями свободы

Каждому $N$ соответствует определенная механическая цепная колебательная система из $N$ материальных частиц с массами $m_{1,N},..m_{N,N}$, соединенными между собой, и с опорными поверхностями с помощью упругих элементов с жесткостями $k_{1,N},..k_{N+1,N}$. Предполагается, что к элементам с сосредоточенными массами приложены силы $Q_{1,N},..Q_{N,N}$, а основания ($Z_{1,N}$ и $Z_{N+1,N}$) совершают гармонические колебания. В качестве обобщенных координат выбраны смещения $y_{1,N}$,.. $y_{N,N}$ сосредоточенных масс относительно точек статического равновесия. В системе координат, связанной с неподвижным базисом, кинетическая и потенциальная энергия имеют вид:

$$\mathrm{T}_N = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_{i,N} (\dot{y}_{i,N})^2 , \qquad (1)$$

$$\begin{aligned}\Pi_N = {} & \frac{1}{2} k_{1,N} (y_{1,N} - z_{1,N})^2 + \\ & + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{2} k_{i+1,N} (y_{i+1,N} - y_{i,N})^2 + . \\ & + \frac{1}{2} k_{N+1,N} (z_{N+1,N} - y_{N,N})^2 \end{aligned} \qquad (2)$$

Используется уравнение Лагранжа 2-го рода для $N$ степеней свободы:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_N}{\partial \dot{y}_{i,N}}\right) - \frac{\partial T_N}{\partial y_{i,N}} + \frac{\partial \Pi_N}{\partial y_{i,N}} = Q_{i,N} , \; i = 1 \ldots N \; . \qquad (3)$$

В дальнейшем рассматриваются две механические колебательные системы, т. е. $N$ = 1, 2.

*1. Система с одной степенью свободы.* Цепная система вида, представленного на рис. 1, может быть построена для произвольного *N = 1, 2*...Число $N$ отражает количество степеней свободы. При составлении математической модели системы выбор координат обладает определенным произволом. С другой стороны, линейная математическая модель с заданным количеством степеней свободы может быть преобразована к модели с меньшим количеством степеней свободы с помощью метода исключения определенных переменных. В этом смысле модель с одной степенью свободы приобретает форму рассмотрения как результат приведения исходной математической модели с двумя (тремя и т. д.) степенями свободы не как начальный этап постепенного усложнения последовательности математических моделей с увеличивающимся количеством степеней свободы, а как результат приведения модели с $N$ степенями свободы к системе с одной степенью свободы.

Если $N = 1$, то расчетная схема колебательной механической системы имеет вид в соответствии с рис. 2.

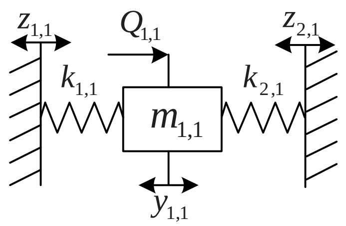


**Рис. 2.** Механическая колебательная система с одной степенью свободы *N = 1*

Уравнение Лагранжа 2-го рода (3) для системы с одной степенью свободы принимает вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_1}{\partial \dot{y}_{1,1}}\right)-\frac{\partial T_1}{\partial y_{1,1}}+\frac{\partial \Pi_1}{\partial y_{1,1}}=Q_{1,1}, \qquad (4)$$

что после соответствующих преобразований позволяет получить уравнение движения:

$$\begin{aligned} &m_{1,N}\ddot{y}_{1,N}+(k_{1,N}+k_{2,N})y_{1,N}= \\ &=Q_{1,N}+k_{1,N}z_{1,N}+k_{2,N}z_{2,N} \end{aligned}. \qquad (5)$$

Преобразование Лапласа выражения (5) в предположении, что начальные условия равны нулю, дает:

$$\begin{aligned} &m_{1,N}\overline{Y}_{1,N}p_1^2+(k_{1,N}+k_{2,N})\overline{Y}_{1,N}= \\ &=Q_{1,N}+k_{1,N}\overline{Z}_{1,N}+k_{2,N}\overline{Z}_{2,N} \end{aligned}. \qquad (6)$$

Выражению (6) может быть сопоставлена структурная схема (рис. 3) эквивалентной в динамическом отношении системы автоматического управления [4; 11].

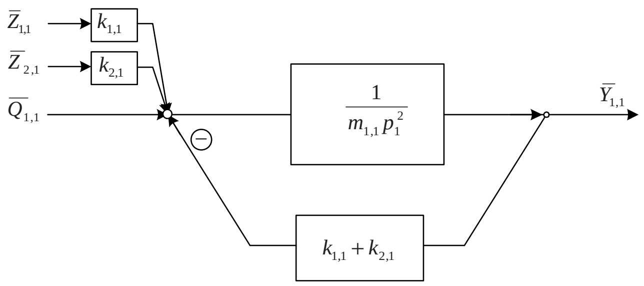


**Рис. 3.** Структурная схема системы с одной степенью свободы: $p=\omega\sqrt{-1}$ — комплексная переменная (знак $<->$ соответствует изображению по Лапласу)

Внешними воздействиями или входными сигналами являются силовое $\overline{Q}_{1,1}$ и кинематические возмущения $Z_{1,1}$ и $Z_{2,1}$. Упругий элемент в контуре обратной связи $k_{1,1}+k_{2,1}$, звенья $k_{1,1}$, $k_{2,1}$, массоинерционное звено $1/m_{1,1}p_1^2$ являются элементами структурной схемы.

Динамические свойства системы определяются передаточными функциями.

Если в качестве внешнего возмущения рассматривается только силовое, т. е. $\overline{Z}_{1,1}=0$, $\overline{Z}_{2,1}=0$, то передаточная функция имеет вид:

$$W^{(1)}=\frac{\overline{Y}_{1,1}}{\overline{Q}_{1,1}}=\frac{1}{m_{1,1}p_1^2+k_{1,1}+k_{2,1}}. \qquad (7)$$

Для кинематического возмущения, когда $\overline{Q}_{1,1}=0$, возможно рассмотрение двух передаточных функций:

$$W^{(1)}=\frac{\overline{Y}_{1,1}}{\overline{Z}_{1,1}}=\frac{k_{1,1}}{m_{1,1}p_1^2+k_{1,1}+k_{2,1}} \quad (\overline{Q}_{1,1}=0,\ \overline{Z}_{2,1}=0) \qquad (8)$$

и:

$$W^{(1)}=\frac{\overline{Y}_{1,1}}{\overline{Z}_{2,1}}=\frac{k_{2,1}}{m_{1,1}p_1^2+k_{1,1}+k_{2,1}} \quad (\overline{Q}_{1,1}=0,\ \overline{Z}_{1,1}=0). \qquad (9)$$

Амплитуда колебания определяется из амплитудно-частотных характеристик путем подстановки $p_1=\omega\sqrt{-1}$, где $\omega$ — частота внешнего воздействия. Полюсом амплитудно-частотной характеристики является собственная частота $\omega_{sob}^{(1)}$:

$$\omega_{sob}^{(1)}=\sqrt{\frac{k_{1,1}+k_{2,1}}{m_{1,1}}}. \qquad (10)$$

Если полагать, что $k_{i,j}=k$, $m_{i,j}=m$, то частота принимает значение:

$$\omega_{sob}^{(1)}=\sqrt{\frac{2k}{m}}. \qquad (11)$$

Наравне с системами с одной степенью свободы, рассматриваемыми как результат приведения, системами с двумя и более степенями свободы, рассматриваемыми как предмет приведения, необходимо обозначить понятие парциальной системы и передаточной функции межпарциальных связей. Под парциальной понимается система с одной степенью свободы при условии, что все координаты системы, кроме выделенной, равны нулю. Отдельный интерес представляет передаточная функция межпарциальных связей, имеющая вид $W^{(2)}=\overline{Y}_{2,2}/\overline{Y}_{1,2}$, рассматриваемая при различных условиях кинематического, силового или совместного возмущения. Физический смысл передаточной функции межпарциальных связей отражается безразмерным коэффициентом, характеризующим передаточное отношение рычажных взаимодействий [13].

*2. Система с двумя степенями свободы. N = 2.* Рассматривается система с двумя степенями свободы (рис. 4).

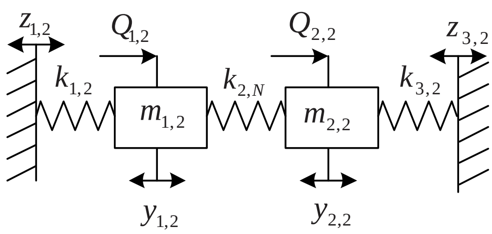


**Рис. 4.** Механическая колебательная система с двумя степенями свободы N = 2

Кинетическая и потенциальная энергия в данном случае имеют вид:

$$\mathrm{T}_2=\frac{1}{2}m_{1,2}(\dot{y}_{1,2})^2+\frac{1}{2}m_{2,2}(\dot{y}_{2,2})^2, \qquad (12)$$

$$\Pi_2 = \frac{1}{2}k_{1,2}(y_{1,2} - z_{1,2})^2 + \frac{1}{2}k_{2,2}(y_{2,2} - y_{1,2})^2 + \\ + \frac{1}{2}k_{3,2}(z_{3,2} - y_{2,2})^2 \quad . \qquad (13)$$

Используя уравнение Лагранжа 2-го рода для двух степеней свободы:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_2}{\partial \dot{y}_{1,2}}\right) - \frac{\partial T_2}{\partial y_{1,2}} + \frac{\partial \Pi_2}{\partial y_{1,2}} = Q_{1,2} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_2}{\partial \dot{y}_{2,2}}\right) - \frac{\partial T_2}{\partial y_{2,2}} + \frac{\partial \Pi_2}{\partial y_{2,2}} = Q_{2,2} \end{cases}, \qquad (14)$$

получим систему линейных уравнений вида:

$$\begin{cases} m_{1,2}\ddot{y}_{1,2} + (k_{1,2} + k_{2,2})y_{1,2} - k_{2,2}y_{2,2} = Q_{1,2} + k_{1,2}z_{1,2} \\ m_{1,2}\ddot{y}_{1,2} - k_{2,2}y_{1,2} + (k_{2,2} + k_{3,2})y_{2,2} = Q_{2,2} + k_{3,2}z_{3,2} \end{cases}. \qquad (15)$$

После преобразования Лапласа система уравнений (15) примет вид:

$$\begin{cases} m_{1,2}\overline{Y}_{1,2}p_2^2 + (k_{1,2} + k_{2,2})\overline{Y}_{1,2} - k_{2,2}\overline{Y}_{2,2} = \overline{Q}_{1,2} + k_{1,2}\overline{Z}_{1,2} \\ m_{2,2}\overline{Y}_{2,2}p_2^2 - k_{2,2}\overline{Y}_{1,2} + (k_{2,2} + k_{3,2})\overline{Y}_{2,2} = \overline{Q}_{2,2} + k_{3,2}\overline{Z}_{3,2} \end{cases}. \qquad (16)$$

Первому уравнению системы (16) соответствует структурная схема (рис. 5) эквивалентной в динамическом отношении системы автоматического управления.

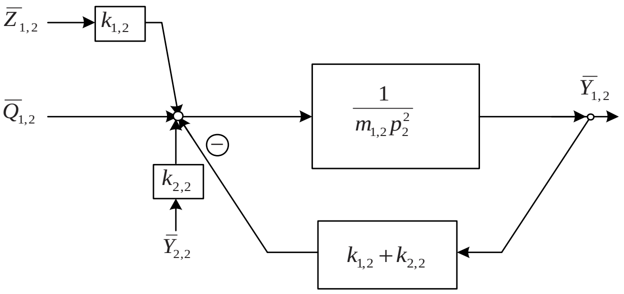


**Рис. 5.** Структурная схема для механической колебательной системы с выделением парциального блока по первому уравнению (16)

Второму уравнению (16) соответствует структурная схема, приведенная на рис. 6.

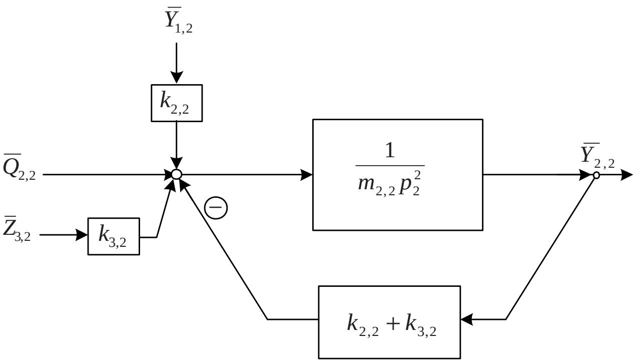


**Рис. 6.** Структурная схема парциального блока по второму уравнению (16)

«Соединение» структурных схем на рис. 5 и 6, соответствующих отдельным уравнениям системы (16), в структурную схему системы в целом представлено на рис. 7.

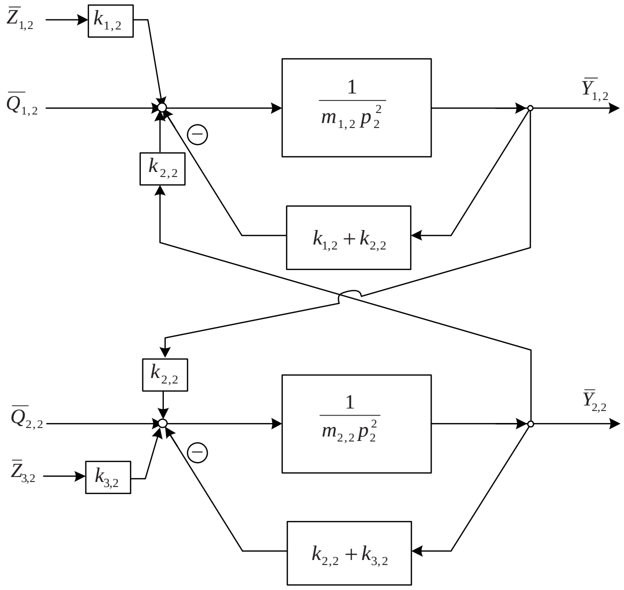


**Рис. 7.** Структурная схема, отражающая свойство системы в целом, при объединении парциальных блоков

Внешними возмущениями или входными сигналами структурной схемы (рис. 7) являются внешние силовые $\overline{Q}_{1,2}$, $\overline{Q}_{2,2}$ и кинематические воздействия $Z_{1,2}$ и $Z_{3,1}$. Упругие элементы, образующие цепь обратной связи $k_{1,2} + k_{2,2}$, $k_{2,2} + k_{3,2}$, упругие звенья с жесткостями $k_{1,2}$, $k_{2,2}$, $k_{3,2}$, массоинерционные звенья $1/m_{1,2}p_2^2$, $1/m_{2,2}p_2^2$ являются типовыми элементами; их состояние описывается обобщенными координатами $\overline{Y}_{1,2}$, $\overline{Y}_{2,2}$. Динамические свойства системы определяются передаточными функциями.

1. При силовом возмущении передаточные функции системы имеют вид:

$$W^{(2)} = \frac{\overline{Y}_{1,2}}{\overline{Q}_{1,2}} \ (\ \overline{Q}_{2,2} = 0,\ \overline{Z}_{1,2} = 0,\ \overline{Z}_{3,2} = 0\ ); \qquad (17)$$

$$W^{(2)} = \frac{\overline{Y}_{2,2}}{\overline{Q}_{1,2}} \ (\ \overline{Q}_{2,2} = 0,\ \overline{Z}_{1,2} = 0,\ \overline{Z}_{3,2} = 0\ ); \qquad (18)$$

$$W^{(2)} = \frac{\overline{Y}_{1,2}}{\overline{Q}_{2,2}} \ (\ \overline{Q}_{1,2} = 0,\ \overline{Z}_{1,2} = 0,\ \overline{Z}_{3,2} = 0\ ); \qquad (19)$$

$$W^{(2)} = \frac{\overline{Y}_{2,2}}{\overline{Q}_{2,2}} \ (\ \overline{Q}_{1,2} = 0,\ \overline{Z}_{1,2} = 0,\ \overline{Z}_{3,2} = 0\ ). \qquad (20)$$

2. Для кинематического возмущения динамические свойства системы определяются передаточными функциями:

$$W^{(2)} = \frac{\overline{Y}_{1,2}}{\overline{Z}_{1,2}} \ (\ \overline{Q}_{1,2} = 0, \overline{Q}_{2,2} = 0,\ \overline{Z}_{3,2} = 0\ ); \qquad (21)$$

$$W^{(2)} = \frac{\overline{Y}_{2,2}}{\overline{Z}_{1,2}} \ (\ \overline{Q}_{1,2} = 0, \overline{Q}_{2,2} = 0,\ \overline{Z}_{3,2} = 0\ ); \qquad (22)$$

$$W^{(2)} = \frac{\overline{Y}_{1,2}}{\overline{Z}_{3,2}} \; (\; \overline{Q}_{1,2} = 0 \, , \overline{Q}_{2,2} = 0 \, , \; \overline{Z}_{1,2} = 0 \,); \qquad (23)$$

$$W^{(2)} = \frac{\overline{Y}_{2,2}}{\overline{Z}_{3,2}} \; (\; \overline{Q}_{1,2} = 0 \, , \overline{Q}_{2,2} = 0 \, , \; \overline{Z}_{1,2} = 0 \,). \qquad (24)$$

В структурных схемах, представленных на рис. 7, нашли отражение некоторые основные свойства рассматриваемых механических систем. В частности, характерной является структура системы, состоящая из парциальных блоков, связанных между собой через соответствующие звенья, реализуемые пружинами с жесткостями $k_{i,j}$. В данном случае взаимодействия между парциальными системами являются упругими связями. Передаточные функции системы имеют разный физический смысл при разных силовых возмущениях.

В частности, при силовом возмущении передаточные функции (17) – (20) отражают свойства динамической податливости системы. Что касается кинематического возмущения, то передаточные функции (21) – (24) отражают такое свойство системы, как динамическое, т. е. зависящее от частоты, изменение коэффициента передачи амплитуды колебания от основания к объекту.

3. В случае одновременного приложения внешних сил и действия кинематического возмущения для построения передаточной функции используется приведение внешнего воздействия к эквивалентному силовому фактору либо к эквивалентному кинематическому возмущению со стороны опорных поверхностей.

К примеру, пусть рассматривается случай внешнего силового возмущения. Передаточная функция для силового возмущения имеет вид:

$$W_f^{\;(2)} = \frac{\overline{Y}_{1,2}}{\overline{Q}_{1,2}} \; (\overline{Q}_{2,2} = 0 \, , \overline{Z}_{1,2} = 0 \; , \; \overline{Z}_{3,2} = 0 \,). \qquad (25)$$

В случае внешнего кинематического возмущения передаточная функция имеет вид:

$$W_k^{\;(2)} = \frac{\overline{Y}_{1,2}}{\overline{Z}_{1,2}} \; (\; \overline{Q}_{2,2} = 0 \, , \; \overline{Q}_{1,2} = 0 \, , \overline{Z}_{3,2} = 0 \,). \qquad (26)$$

4. В предположении, что между кинематическим и силовым воздействием реализуется зависимость $k_{1,2}\overline{Z}_{1,2} = \alpha\overline{Q}_{1,2}$, внешнее воздействие может быть сведено к эквивалентному силовому $(1+\alpha)\,\overline{Q}_{1,2}$ или кинематическому воздействию $k_{1,2}\,(1+\alpha)/\alpha\,\overline{Z}_{1,2}$. В результате передаточная функция совместного кинематического и силового воздействия после приведения будет иметь вид:

$$W'^{(2)} = \frac{\alpha W_k^{\;(2)} + W_f^{\;(2)}}{\alpha + 1}. \qquad (27)$$

Задача исследования заключается в разработке технологии оценки динамических свойств системы с двумя степенями свободы на основе приведенной к системе с одной степенью свободы структурной математической модели.

**Структурные преобразования систем при силовом возмущении.** Рассматривается вариант, когда в системе реализуется только силовое возмущение, такое, что $\overline{Q}_{1,2} = \overline{Q}_{2,2} = \overline{Q}_{1,1} = \overline{Q}$, при этом $Z_{1,1} = Z_{2,1} = Z_{1,2} = Z_{3,2} = 0$. Соответствующая структурная схема системы с одной степенью свободы в предлагаемых обозначениях представлена на рис. 8, где принято $\overline{Q}_{1,1} = \overline{Q}$.

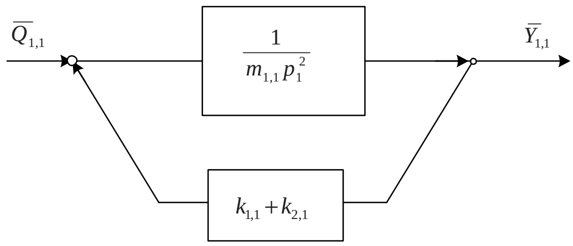


**Рис. 8.** Структурная схема системы с одной степенью свободы при силовом возмущении

Структурная схема системы с двумя степенями свободы при условии реализации только силового возмущения представлена на рис. 9, где используются обозначения $\overline{Q}_{1,2} = \overline{Q}_{2,2} = \overline{Q}$.

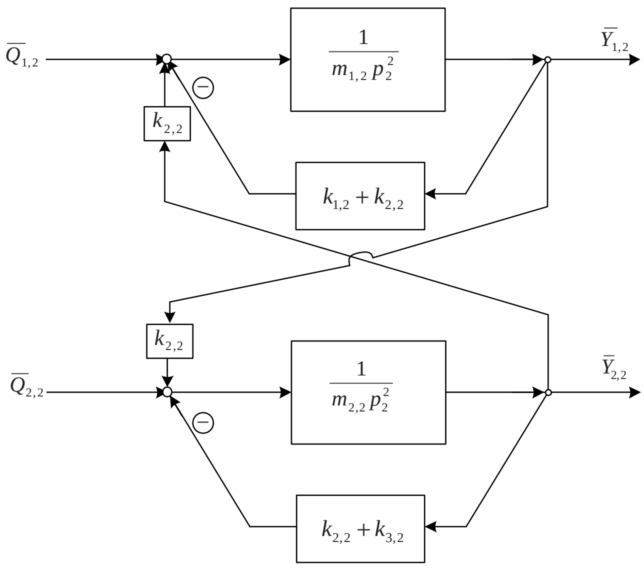


**Рис. 9.** Структурная схема системы с двумя степенями свободы при одновременном силовом возмущении по двум входам

Система уравнений движения по сравнению с (16) принимает вид:

$$\begin{cases} m_{1,2}\overline{Y}_{1,2}p_2^2 + (k_{1,2}+k_{2,2})\overline{Y}_{1,2} - k_{2,2}\overline{Y}_{2,2} = \overline{Q} \\ m_{2,2}\overline{Y}_{2,2}p_2^2 - k_{2,2}\overline{Y}_{1,2} + (k_{2,2}+k_{3,2})\overline{Y}_{2,2} = \overline{Q} \end{cases}. \qquad (28)$$

Система уравнений (28) в результате преобразования на основе соотношений:

$$\overline{Y}_{2,2} = \frac{\overline{Q} + k_{2,2}\overline{Y}_{1,2}}{m_{2,2}p_2^2 + k_{2,2} + k_{3,2}} \qquad (29)$$

может быть представлена после исключения переменной в виде:

$$m_{1,2}\overline{Y}_{1,2}p_2^2+(k_{1,2}+k_{2,2}-\frac{k_{2,2}^2}{m_{2,2}p_2^2+k_{2,2}+k_{3,2}})\overline{Y}_{1,2}= \\ =\overline{Q}+\frac{k_{2,2}}{m_{2,2}p_2^2+k_{2,2}+k_{3,2}}\overline{Q}\ . \quad (30)$$

Соответствующая структурная схема системы представлена на рис. 10:

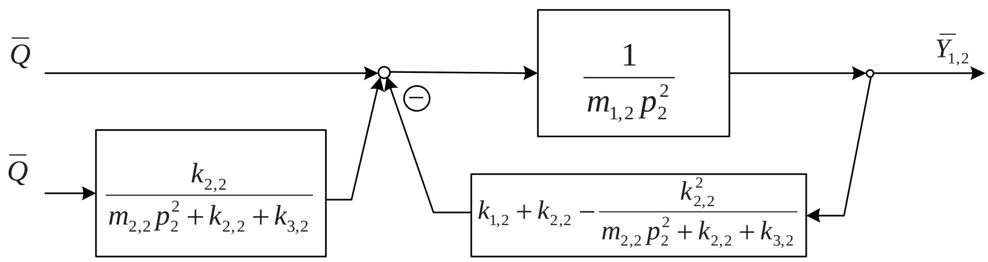


**Рис. 10.** Структурная схема системы с двумя степенями свободы при двух силовых возмущениях

1. Если выделить в качестве объекта, динамическое состояние которого определяется, массоинерционный элемент $m_{1,2}$, то структурная схема на рис. 10 может быть преобразована к виду, как это представлено на рис. 11.

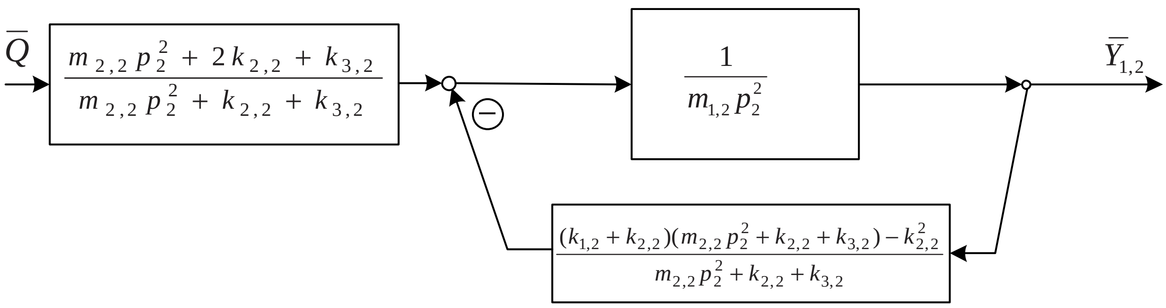


**Рис. 11.** Приведенная структурная схема системы с двумя степенями свободы в приведенном виде (с исключением координаты $\overline{Y}_{2,2}$)

Таким образом, преобразованная структурная схема на рис. 11 имеет элементы, сходные с основными элементами структурной схемы (рис. 8) с одной степенью свободы: массоинерционное звено $1/m_{1,2}p_2^2$; упругий элемент, который может быть назван квазипружиной с жесткостью:

$$K_{\text{ПР}}^{(2)}(p_2)=\frac{(k_{1,2}+k_{2,2})(m_{2,2}p_2^2+k_{2,2}+k_{3,2})-k_{2,2}^2}{m_{2,2}p_2^2+k_{2,2}+k_{3,2}}\ . \quad (31)$$

Жесткость $K_{\text{ПР}}^{(2)}(p_2)$ квазипружины зависит от частоты $\omega_2$ внешнего силового возмущения $p_2=\omega_2\sqrt{-1}$.

В дополнение к обозначенным звеньям в приведенной, или «редуцированной» схеме (рис. 11) в результате эквивалентного переноса приложенной силы $\overline{Q}$ к массе $m_{2,2}$ на массу $m_{1,2}$ образуется звено с передаточной функцией:

$$K_{\text{ВЛ}}^{(2)}=\frac{m_{2,2}p_2^2+2k_{2,2}+k_{3,2}}{m_{2,2}p_2^2+k_{2,2}+k_{3,2}}\ . \quad (32)$$

Данное звено, передаточная функция которого (32) отображает безразмерную зависимость, может быть названо условно «блокиратором» с передаточным отношением $K_{\text{ВЛ}}^{(2)}$. Физический смысл такого «блокиратора» связан с проявлениями присущих механическим колебательным системам рычажных свойств [16].

2. Следует отметить, что контур обратной связи может охватывать не только массоинерционный элемент $1/m_{1,2}p_2^2$, но и элемент $1/m_{2,2}p_2^2$. Дополнительно «выходным сигналом» может служить не только амплитуда обобщенной координаты $\overline{Y}_{1,2}$, но и $\overline{Y}_{2,2}$. Учитывая, что отношение $\overline{Y}_{2,2}/\overline{Y}_{1,2}$ может быть найдено из равенства:

$$m_{1,2}\overline{Y}_{1,2}p_2^2+(k_{1,2}+k_{2,2})\overline{Y}_{1,2}-k_{2,2}\overline{Y}_{2,2}= \\ =m_{2,2}\overline{Y}_{2,2}p_2^2-k_{2,2}\overline{Y}_{1,2}+(k_{2,2}+k_{3,2})\overline{Y}_{2,2}\ , \quad (33)$$

после преобразования выражения отношение $\overline{Y}_{2,2}/\overline{Y}_{1,2}$ принимает вид:

$$\frac{\overline{Y}_{2,2}}{\overline{Y}_{1,2}}=\frac{m_{1,2}p_2^2+k_{1,2}+2k_{2,2}}{m_{2,2}p_2^2+2k_{2,2}+k_{3,2}}\ . \quad (34)$$

В результате структурная схема (рис. 11) может быть преобразована, как показано на рис. 12.

Таким образом, обобщенный вариант редуцированной системы к системе с одной степенью свободы формируется из четырех блоков — $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$ (рис. 13).

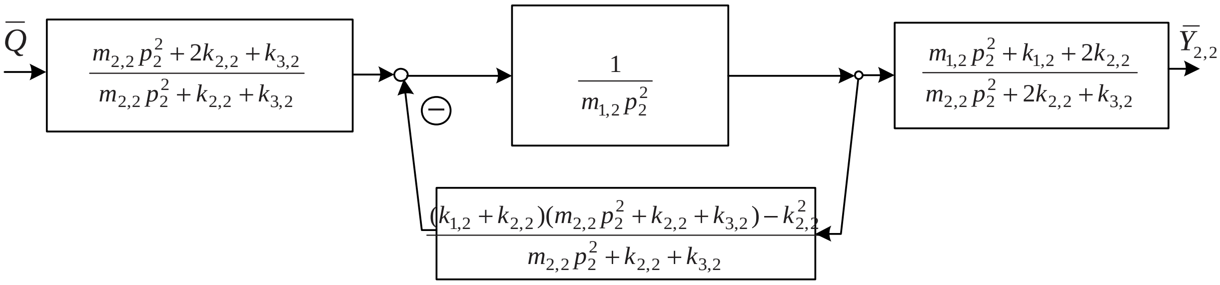


**Рис. 12.** Преобразованная структурная схема системы с двумя степенями свободы при силовом возмущении по двум входам

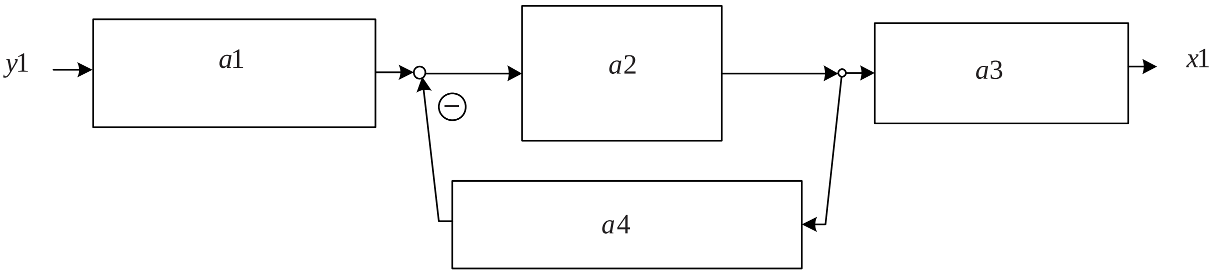


**Рис. 13.** Форма структурной схемы: $a_1$ — «распределитель»; $a_2$ — «объект приведения», или массоинерционное звено; $a_3$ — «распределитель»; $a_4$ — квазипружина

Первое звено (блок), условно называемое «блокиратором», определяется параметрами приведения силы к выделенному объекту; второе звено (блок) характеризует объект, представленный массоинерционным элементом; третье звено (блок), характеризуется приведенным к заданной координате безразмерным коэффициентом и условно может быть названо «распределителем». Физический смысл такого «распределителя» заключается в отражении передаточного отношения межпарциальной рычажной связи. Четвертое звено (блок) представляет собой квазипружину с жесткостью, зависящей от частоты внешнего воздействия.

В табл. 1 представлены значения передаточных функций звеньев структурных схем систем с одной и двумя степенями свободы, представленных в форме, отображенной на рис. 13.

Таким образом, «приведение» структурной схемы системы с двумя степенями свободы к некоторой форме, изначально заданной системой с одной степенью свободы, определяет набор передаточных функций звеньев структурной схемы.

*3. Приведение сил без функциональной зависимости.* На рис. 14 представлено преобразование структурной схемы, отражающее приведение приложенного силового возмущения от элемента с сосредоточенной массы $m_{1,2}$ к элементу с массой $m_{1,2}$ ($Q_{1,2}=Q_{2,2}=Q$, объект приведения) $1/m_{2,2}p_2^2$.

*Таблица 1*

*Соответствие содержания блоков структурной схемы фиксированной формы для систем с одной и двумя степенями свободы*

| | Система с одной степенью свободы | Система с двумя степенями свободы | Условное название блока |
|---|---|---|---|
| $y1$ | $\overline{Q}_{1,1}$ | $\overline{Q}$ | «входной сигнал» |
| $x1$ | $\overline{Y}_{1,1}$ | $\overline{Y}_{2,2}$ | «выходной сигнал» |
| $a1$ | 1 | $\frac{m_{2,2}p_2^2+(1+q)k_{2,2}+k_{3,2}}{m_{2,2}p_2^2+k_{2,2}+k_{3,2}}$ | «блокиратор» |
| $a2$ | $\frac{1}{m_{1,1}p_1^2}$ | $\frac{1}{m_{1,2}p_2^2}$ | «массоинерционный элемент», «объект» |
| $a3$ | 1 | $\frac{qm_{1,2}p_2^2+qk_{1,2}+(1+q)k_{2,2}}{m_{2,2}p_2^2+(q+1)k_{2,2}+k_{3,2}}$ | квазипружина |
| $a4$ | $k_{1,1}+k_{2,1}$ | $\frac{(k_{1,2}+k_{2,2})(m_{2,2}p_2^2+k_{2,2}+k_{3,2})-k_{2,2}^2}{m_{2,2}p_2^2+k_{2,2}+k_{3,2}}$ | «распределитель» |

На структурной схеме приведение силы отражено приложением к элементу с массой $m_{2,2}$ приведенной силы параллельно действующего силового фактора. Полученная структурная схема приводится к виду, где содержатся «блокиратор» и квазипружина в виде, представленном на рис. 14.

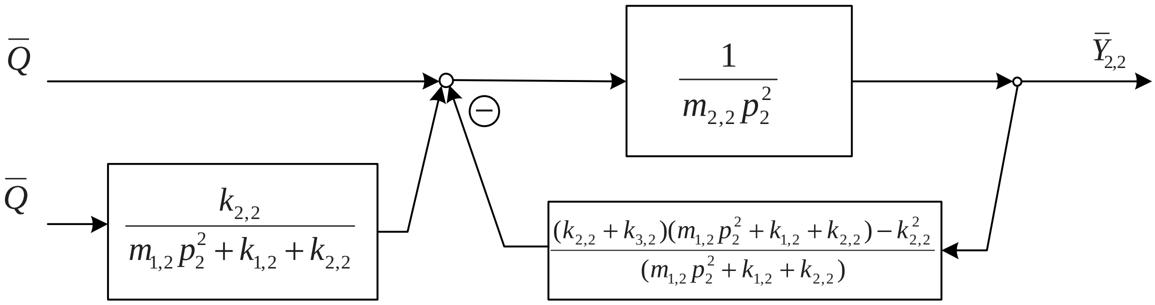


**Рис. 14.** Структурная схема. Приведение силового фактора к объекту

*4. Приведение сил с функциональной зависимостью.* Наличие функциональной связи между приложенными силами, выраженное в коэффициенте $\beta$, отражено на структурной схеме (рис. 16). С помощью исключения переменной $\bar{Y}_{2,2}$ сила, приложенная к элементу с массой $m_{2,2}$, приводится к элементу с массой $m_{1,2}$. Результат преобразования структурной схемы с приведенной силой представлен на рис. 17.

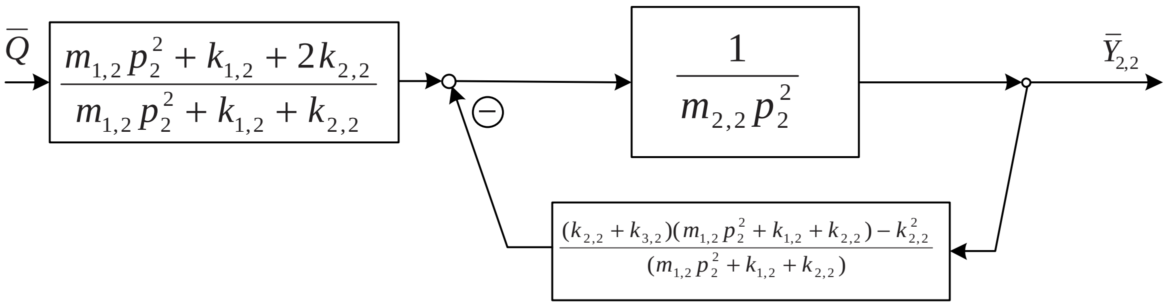


**Рис. 15.** Структурная схема, приведенная к элементу $m_{2,2}$

Таким образом, приведение силы с элемента с массой $m_{2,2}$ к элементу с массой $m_{1,2}$ эквивалентно добавлению звена параллельно входному внешнему возмущению $\bar{Q}_{1,1}$. Сложение параллельных силовых факторов отображается звеном с передаточной функцией:

$$W_{\beta}^{(2)} = \frac{m_{2,2} p_2^2 + (1+\beta) k_{2,2} + k_{3,2}}{m_{2,2} p_2^2 + k_{2,2} + k_{3,2}}. \qquad (35)$$

Пусть приложенные силы к различным сосредоточенным массам связаны между собой некоторой функциональной зависимостью, т. е. задан параметр $\beta$ :

$$\bar{Q}_{1,2} = \bar{Q}, \; \bar{Q}_{2,2} = \beta \cdot \bar{Q}. \qquad (36)$$

В этом случае система уравнений движения принимает вид:

$$\begin{cases} m_{1,2} \bar{Y}_{1,2} p_2^2 + (k_{1,2} + k_{2,2}) \bar{Y}_{1,2} - k_{2,2} \bar{Y}_{2,2} = \bar{Q} \\ m_{2,2} \bar{Y}_{2,2} p_2^2 - k_{2,2} \bar{Y}_{1,2} + (k_{2,2} + k_{3,2}) \bar{Y}_{2,2} = \beta \bar{Q} \end{cases}. \qquad (37)$$

Соответствующая структурная схема системы с двумя степенями свободы будет иметь вид, как показано на рис. 16.

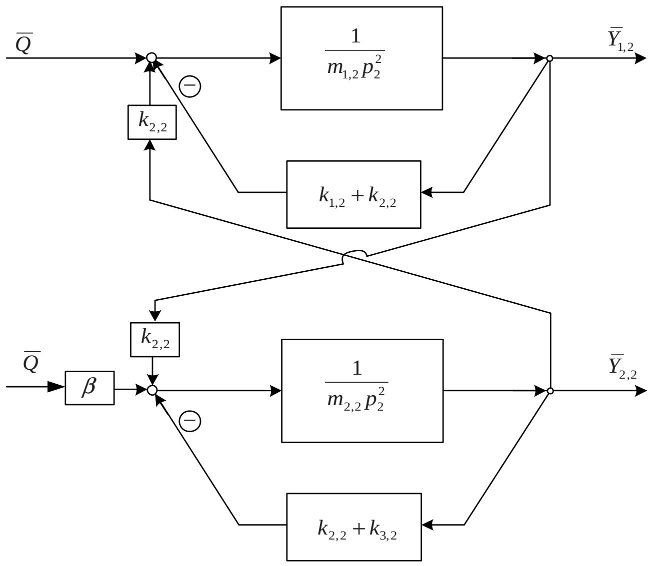


**Рис. 16.** Структурная схема. Силы, приложенные к разным входам, функционально зависимы

Выражение обобщенной координаты из системы уравнений определяется в виде:

$$\bar{Y}_{2,2} = \frac{\beta \bar{Q} + k_{2,2} \bar{Y}_{1,2}}{m_{2,2} p_2^2 + k_{2,2} + k_{3,2}}. \qquad (38)$$

Подстановка полученного выражения (38) в систему (37) приводит к следующей записи:

$$m_{1,2}\overline{Y}_{1,2}\,p_2^2+(k_{1,2}+k_{2,2})\overline{Y}_{1,2}- \\ -k_{2,2}\frac{\beta\overline{Q}+k_{2,2}\overline{Y}_{1,2}}{m_{2,2}\,p_2^2+k_{2,2}+k_{3,2}}=\overline{Q}\,. \qquad (39)$$

или:

$$m_{1,2}\overline{Y}_{1,2}\,p_2^2+(k_{1,2}+k_{2,2}-\frac{k_{2,2}^2}{m_{2,2}\,p_2^2+k_{2,2}+k_{3,2}})\overline{Y}_{1,2}= \\ =\overline{Q}+\frac{\beta k_{2,2}}{m_{2,2}\,p_2^2+k_{2,2}+k_{3,2}}\overline{Q}\,. \qquad (40)$$

Соответствующая структурная схема, представленная на рис. 17, в качестве основных элементов имеет «блокиратор», который в физическом смысле выполняет функцию силового рычага, «объект приведения» или массоинерционный элемент и квазипружину — обобщенный упругий элемент, жесткость которого зависит от частоты внешнего силового воздействия.

Имея наглядное представление о передаточной функции «блокиратора» и явный аналитический вид, можно определить частоту динамического гашения выражением:

$$\omega^2=\frac{(1+\beta)k_{2,2}+k_{3,2}}{m_{2,2}}=\frac{k_{2,2}+k_{3,2}}{m_{2,2}}+\frac{k_{2,2}}{m_{2,2}}\beta\,. \qquad (41)$$

При несовпадении с резонансом режим динамического гашения может быть найден из условия:

$$\beta>-\frac{k_{2,2}+k_{3,2}}{k_{2,2}}\,. \qquad (42)$$

Наличие функциональной связи между силами, приложенными к разным элементам с сосредоточенными массами, может быть представлено эквивалентным способом в виде специального звена. Таким образом, действие одновременно двух силовых факторов изменяет передаточную функцию системы.

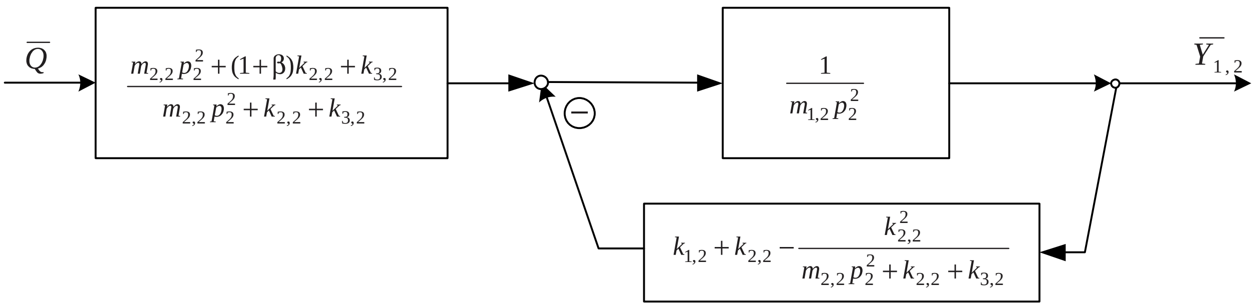


**Рис. 17.** Структурная схема. Приведение двух силовых факторов к одному

Ключевым моментом преобразования структурной схемы является «объект» приведения сил. Таким «объектом» служит одна из масс механической колебательной системы. Выбор объекта приведения определяет характеристики приведенный структурной схемы. После выбора объекта приведения возможна постановка задачи на определение режимов, характеризующих динамические особенности механической колебательной системы.

**Свойства элементов редуцированной схемы.** Элементы редуцированной системы формируются в результате выбора объекта или нескольких объектов, приведения приложенных сил к выбранному набору объектов и формирования структурной схемы с результирующим набором элементов и связи между ними. Под процедурой редуцирования системы с двумя и более степенями свободы к системе с одной степенью свободы подразумевается аналитическая операция исключения переменных и отражение полученного результата в виде структурной схемы. Преобразованная структурная схема, в свою очередь, определяется звеньями, которые характеризуются передаточными функцией и связями. Физический смысл преобразований заключается во введении в парциальную систему выбранного объекта, квазипружины, обладающей жесткостью, принимающей нулевые, бесконечные, отрицательные и положительные значения  в зависимости от частоты внешнего воздействия.

Вместе с тем, наравне с введением в парциальную систему квазипружин, преобразование приводит к тому, что приведение силы $\overline{Q}_{2,2}$, приложенной к  элементу $m_{2,2}$, связано с формированием некоторого дополнительного механизма преобразования силы (рычаг силы). Данное звено или механизм, по существу, выполняют функцию усиления при коэффициенте усиления, зависящем от частоты. В физическом плане усиление может реализоваться через механизм. Если $m_{2,2}=0$, тогда рычажный механизм будет иметь передаточное отношение, не зависящее от частоты. Это передаточное отношение определяется:

$$\mathrm{K}_{\Pi}=\frac{2k_{2,2}+k_{3,2}}{k_{2,2}+k_{3,2}}\,. \qquad (43)$$

Особенностью работы «блокиратора» является то обстоятельство, что числитель на определенной частоте становится равным нулю. В этом случае движение по координате останавливается на частоте динамического гашения $\omega=\sqrt{(2k_{2,2}+k_{3,2})/m_{2,2}}$. В то же время, при действии только одной силы в качестве частоты динамического гашения служит частота

$$\omega=\sqrt{(k_{2,2}+k_{3,2})/m_{2,2}}\;.$$

Каждое из звеньев редуцированной системы представлено передаточной функцией, образованной числителем и знаменателем, зависящими от частоты внешнего воздействия. Если частота внешнего воздействия равна нулю, то полагается, что система находится в состоянии покоя.

1. *Некоторые характеристики квазипружины.* Основной характеристикой квазипружины служит передаточная функция:

$$K^{(2)}_{\text{ПР}}(p_2)=\frac{(k_{1,2}+k_{2,2})(m_{2,2}p_2^2+k_{2,2}+k_{3,2})-k_{2,2}^2}{m_{2,2}p_2^2+k_{2,2}+k_{3,2}}. \quad (44)$$

Если $\omega=0$, то $K^{(2)}_{\text{ПР}}=k_{1,2}+k_{2,2}-\dfrac{k_{2,2}^2}{k_{2,2}+k_{3,2}}$. Если частота внешнего силового воздействия $\omega\to(k_{2,2}+k_{3,2})/m_{2,2}$, то жесткость пружины $K^{(2)}_{\text{ПР}}\to\infty$. Если частота внешнего силового воздействия возрастает, то есть $\omega\to\infty$, то $K^{(2)}_{\text{ПР}}\to k_{1,2}+k_{2,2}$.

2. *Особенности свойств «блокиратора».* Передаточная функция «блокиратора» представлена выражением:

$$K^{(2)}_{\text{БЛ}}=\frac{m_{2,2}p_2^2+2k_{2,2}+k_{3,2}}{m_{2,2}p_2^2+k_{2,2}+k_{3,2}}. \quad (45)$$

К особенностям свойств «блокиратора» следует отнести полюса, нули и предельные значения. Так, если $\omega=0$, то:

$$K^{(2)}_{\text{БЛ}}=\frac{2k_{2,2}+k_{3,2}}{k_{2,2}+k_{3,2}}, \quad (46)$$

а «блокиратор» обнуляется на частоте $\omega^2=(2k_{2,2}+k_{3,2})/m_{2,2}$. Если $\omega^2\to(k_{2,2}+k_{3,2})/m_{2,2}$, то $K^{(2)}_{\text{БЛ}}\to\infty$.

3. *Межпарциальные связи.* Передаточная функция межпарциальной связи (блок «распределитель») определяется из структурной схемы в виде:

$$K^{(2)}_{\text{РП}}=\frac{m_{1,2}p_2^2+k_{1,2}+2k_{2,2}}{m_{2,2}p_2^2+2k_{2,2}+k_{3,2}}. \quad (47)$$

Если $\omega=0$, то $K^{(2)}_{\text{РП}}=(k_{1,2}+2k_{2,2})/(2k_{2,2}+k_{3,2})$.

Если частота внешнего силового воздействия $\omega\to(2k_{2,2}+k_{3,2})/m_{2,2}$ и $(2k_{2,2}+k_{3,2})/m_{2,2}\neq(k_{1,2}+2k_{2,2})/m_{1,2}$, то $K^{(2)}_{\text{РП}}\to\infty$. Если частота внешнего силового воздействия $\omega\to(k_{1,2}+2k_{2,2})/m_{1,2}$ $(2k_{2,2}+k_{3,2})/m_{2,2}\neq(k_{1,2}+2k_{2,2})/m_{1,2}$, то $K^{(2)}_{\text{РП}}\to 0$. Если частота внешнего силового воздействия $\omega\to\infty$, то $K^{(2)}_{\text{РП}}\to m_{1,2}/m_{2,2}$.

Таким образом, «распределитель» характеризуется также полюсами, нулями и предельными значениями частот.

4. *Взаимосвязи элементов редуцированной системы.* В рамках обобщенного рассмотрения элементами системы являются массоинерционное звено, квазипружина, «блокиратор» и «распределитель». Для определения взаимосвязи передаточных функций данных звеньев структурную схему можно представить в виде трех последовательно соединенных элементов (рис. 18).

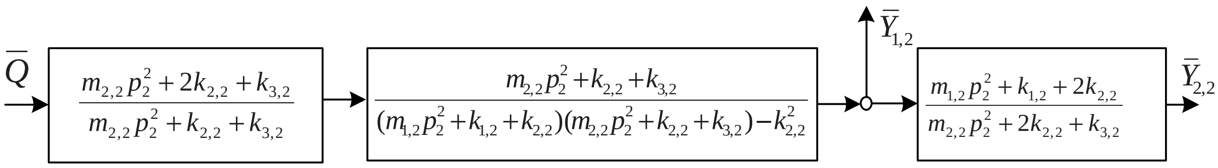


**Рис. 18.** Структурная схема преобразованной системы с двумя степенями свободы

Данная структурная схема имеет в своем составе «свертку» массоинерционного звена и квазипружины в одно «инерционно-упругое» звено с передаточной функцией:

$$W(p_2)=\frac{m_{2,2}p_2^2+k_{2,2}+k_{3,2}}{(m_{1,2}p_2^2+k_{1,2}+k_{2,2})(m_{2,2}p_2^2+k_{2,2}+k_{3,2})-k_{2,2}^2}. \quad (48)$$

Приведенная к двум звеньям система, в которой звено «блокиратора» объединяется с «инерционно-упругим» звеном, представлена на рис. 19.

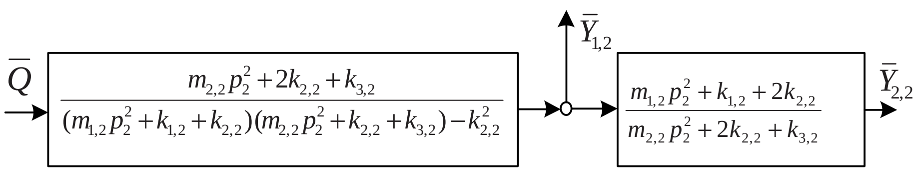


**Рис. 19.** Структурная схема, приведенная к двум звеньям

Представленная на рис. 19 структурная схема состоит из двух звеньев. Первое звено, условно называемое «обобщенным блокиратором», имеет передаточную функцию:

$$W(p_2)=\frac{m_{2,2}p_2^2+2k_{2,2}+k_{3,2}}{(m_{1,2}p_2^2+k_{1,2}+k_{2,2})(m_{2,2}p_2^2+k_{2,2}+k_{3,2})-k_{2,2}^2}\ .(49)$$

Частота, которая «обнуляет» числитель передаточной функции (49), представляет собой частоту динамического гашения обобщенной координаты $\overline{Y}_{1,2}$. Представленная структурная схема может быть «свернута» в следующие звенья, представленные на рис. 20.

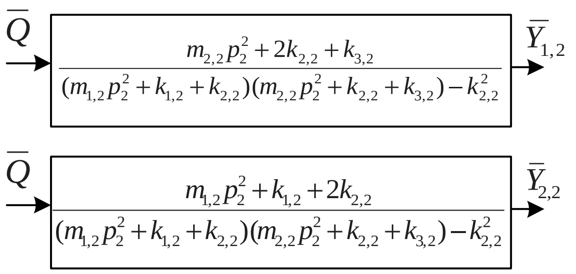


**Рис. 20.** Структурные элементы

Эта квазипружина «работает» параллельно с обычными пружинами, но зависит от частоты. Если частота будет равна нулю, то имеем систему с одной степенью свободы, которая размещается только на упругих элементах. Система может быть преобразована к виду, в котором квазипружина будет обладать следующей передаточной функцией:

$$W_{\text{ПР},2}=\frac{m_{2,2}p_2^2+k_{2,2}+k_{3,2}}{(m_{1,2}p_2^2+k_{1,2}+k_{2,2})(m_{2,2}p_2^2+k_{2,2}+k_{3,2})-k_{2,2}^2}\ . \quad (50)$$

В свою очередь, передаточная функция всей системы будет получена как результат произведения передаточной функции звена «блокиратора» и передаточной функции квазипружины в виде:

$$W^{(2)}=\frac{m_{2,2}p_2^2+2k_{2,2}+k_{3,2}}{m_{2,2}p_2^2+k_{2,2}+k_{3,2}}\cdot \\ \cdot\frac{m_{2,2}p_2^2+k_{2,2}+k_{3,2}}{(m_{1,2}p_2^2+k_{1,2}+k_{2,2})(m_{2,2}p_2^2+k_{2,2}+k_{3,2})-k_{2,2}^2}\ , \quad (51)$$

$$W^{(2)}= \\ =\frac{m_{2,2}p_2^2+2k_{2,2}+k_{3,2}}{(m_{1,2}p_2^2+k_{1,2}+k_{2,2})(m_{2,2}p_2^2+k_{2,2}+k_{3,2})-k_{2,2}^2}\ . \quad (52)$$

Частота, при которой «блокиратор» обнуляется, представляет собой частоту динамического гашения координаты $\overline{Y}_{1,2}$. Передаточная функция «блокиратора» образована числителем и знаменателем. Если $\omega^2\to(2k_{2,2}+k_{3,2})/m_{2,2}$, то числитель «блокиратора» приближается к нулю. На этой частоте возможен режим динамического гашения. Если $\omega^2\to(k_{2,2}+k_{3,2})/m_{2,2}$, то знаменатель «блокиратора» приближается к нулю. В таком случае на выходе «блокиратора» возникает бесконечная сила, но эта же бесконечная сила компенсируется следующим звеном. Особенности взаимосвязи звеньев требуют отдельного детализированного рассмотрения.

Под действием дополнительной силы динамические свойства системы изменяются. И это в первую очередь наблюдается через изменение частоты динамического гашения.

Необходимо отметить, что дробно-рациональное выражение имеет частоту, на которой общий коэффициент усиления или значение передаточного отношения будут стремиться к бесконечности. Это происходит на частоте, которая соответствует режиму динамического гашения, без учета дополнительной силы $\overline{Q}_{2,2}$. Особенности этого эффекта могут быть изучены при проведении дополнительных преобразований, в ходе которых неоднозначность, связанная с эффектами зануления передаточной функции «блокиратора», аннулируется. Преобразованная схема с двумя степенями свободы может быть представлена с учетом возможностей введения дополнительного звена, отражающего передаточное отношение межпарциальных связей. Передаточная функция межпарциальных связей имеет вид:

$$W_{\text{МП}}{}^{(2)}=\frac{\overline{Y}_{2,2}}{\overline{Y}_{1,2}}=\frac{m_{1,2}p_2^2+k_{1,2}+2k_{2,2}}{m_{2,2}p_2^2+2k_{2,2}+k_{3,2}}\ . \quad (53)$$

Такое звено отражает в обобщенном виде рычажные связи, характерные для совместного движения системы с двумя степенями свободы. В физическом смысле $\overline{Y}_{2,2}/\overline{Y}_{1,2}$ представляет собой передаточное отношение рычага, параметры которого зависят от частоты. Введение такого звена представлено на структурной схеме (рис. 13, звено «распределитель»). Если учесть особенность преобразованной исходной системы в эквивалентную форму, содержащую «блокиратор», «распределитель» и приведенную структуру, то все вопросы, возникшие с оценкой динамического состояния, не входят в противоречие с существующими представлениями.

**Заключение**

Исследование возможности редукции вида структурной схемы линейной механической колебательной системы с двумя степенями свободы при одновременном действии двух внешних гармонических сил к виду структурной схемы системы с одной степенью свободы показало, что приведенная схема может быть представлена формой, образованной с помощью четырех звеньев. Образованные звенья условно названы «блокиратор», «объект приведения», квазипружина и «распределитель». Приведение схемы к виду системы с одной степенью свободы обеспечивается возможностью приведения всех сил к одному объекту и допущения о существовании линейной зависимости между приложенными силами. Физические свойства образованных звеньев определяются полюсами и нулями соответствующих передаточных функций. Особого рассмотрения требуют эффекты, возникающие в результате прохождения силового воздействия через звенья, когда частота внешнего воздействия обнуляет числитель или знаменатель передаточной функции соответствующего звена. К примеру, обнуление соответствующего звена приводит к эффекту динамического гашения координаты системы. Дополнительного исследования требуют эффекты, соответствующие обнулению знаменателей звеньев. Показано, что существенным фактором, определяющим динамические свойства звеньев по отдельности и системы в целом, является взаимное расположение полюсов и нулей звеньев системы и соотношение сил, одновременно приложенных к массоинерционным элементам системы.

**Выводы**

1. Предложены методологические основы технологии оценки динамических свойств системы с двумя степенями свободы, в основе которой лежит метод редукции степеней свободы.

2. Показана принципиальная возможность исследования систем с двумя степенями свободы на основе приведенных характеристик систем с одной степенью свободы. Основными элементами приведенной структурной схемы являются элементы, условно названные «блокиратор», «приведенная структура», содержащая в своем составе квазипружину, и «распределитель», отображающий рычажные связи системы.

3. Передаточная функция каждого из элементов приведенной структуры в общем случае представляет собой дробно-рациональное выражение. Особенностью передаточной функции «блокиратора» является зависимость от приложенных сил.

4. Показано, что в качестве приведенной структурной схемой с одной степенью свободы может быть выбрана структурная схема с фиксированным набором звеньев.

5. Разработанные подходы к приведению структурной схемы с двумя степенями свободы к виду схемы с одной степенью свободы могут быть обобщены на цепные механические колебательные системы с произвольным количеством степеней свободы.

*Литература*


1. Clarence W. de Silva. Vibration. Fundamentals and Practice.Boca Raton, London, New York, Washington, D.C.: CRC Press, 2000. 957 p.

2. Harris C.M., Piersol A.G. Shock and Vibration Handbook. New York: McGraw Hill Book Co, 2002. 1457 p.

3. Karnovsky I.A., Lebed E. Theory of Vibration Protection. Springer International Publishing, Switzerland, 2016. 708 p.

4. Елисеев С.В., Артюнин А.И. Прикладная теория колебаний в задачах динамики линейных механических систем: моногр. Новосибирск: Наука, 2016. 459 с.

5. Белокобыльский С.В., Елисеев С.В., Кашуба В.Б. Прикладные задачи структурной теории виброзащитных систем. СПб.: Политехника, 2013. 363 с.

6. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. 2-е изд., испр. М.: Физматлит, 2001. 320 с.

7. Елисеев С.В., Резник Ю.Н., Хоменко А.П. Мехатронные подходы в динамике механических колебательных систем: моногр. Новосибирск: Наука, 2011. 383 с.

8. Елисеев С.В., Хоменко А.П. Динамическое гашение колебаний: концепция обратной связи и структурные методы математического моделирования. Новосибирск, 2014. 357 с.

9. Вибрации в технике: справочник: в 6 т. Т. 6. Защита от вибрации и ударов / под ред. К.В.Фролова. М.: Машиностроение, 1981. 456 с.

10. Eliseev S.V. Динамика механических систем с дополнительными связями: моногр. Иркутск, 2006. 315 с.

11. Елисеев С.В., Резник Ю.Н., Хоменко А.П., Засядко А.А. Динамический синтез в обобщенных задачах виброзащиты и виброизоляции технических объектов. Иркутск: ИГУ, 2008. 523 с.

12. Белокобыльский С.В., Ситов И.С. Динамика механических систем. Рычажные и инерционно-упругие связи. СПб., 2013. 319 с.

13. Хоменко А.П., Елисеев С.В., Каимов Е.В. Формы проявления рычажных связей в динамических взаимодействиях элементов механических колебательных систем // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2016. № 3 (51). С. 8-18.

14. Хоменко А.П., Елисеев С.В., Большаков Р.С. Динамические гасители колебаний в виде структур с несколькими элементами // Вестн. СамГУПС. 2015. № 1 (27). С. 152-163.

15. Белокобыльский С.В., Елисеев С.В., Кашуба В.Б. Упругие элементы: динамические свойства, возможности обобщенных подходов. Квазипружины // Системы. Методы. Технологии. 2016. № 2 (30) С. 7-17.

16. Елисеев С.В., Кузнецов Н.К., Большаков Р.С., Нгуен Д.Х. О возможностях использования дополнительных связей инерционного типа в задачах динамики технических систем // Вестн. Иркут. гос. техн. ун-та. 2016. № 5 (112). С. 19-36.


*References*


1. Clarence W. de Silva. Vibration. Fundamentals and Practice. Boca Raton, London, New York, Washington, D.C.: CRC Press, 2000. 957 p.

2. Harris S.M., Piersol A.G. Shock and Vibration Handbook. New York: McGraw Hill Book So, 2002. 1457 p.

3. Karnovsky I.A., Lebed E. Theory of Vibration Protection. Springer International Publishing, Switzerland, 2016. 708 p.

4. Eliseev S.V., Artyunin A.I. Applied theory of oscillations in problems of dynamics of linear mechanical systems: monogr. Novosibirsk: Nauka, 2016. 459 p.

5. Belokobylsky S.V., Eliseev S.V., Kashuba V.B. Applications of the theory of structural vibration isolation systems. – St. Petersburg: Politehnica. 2013. 363 p.

6. Samarskii A.A., Mikhailov A.P. Mathematical modeling: Idei. Metody. Primery. 2-e izd., ispr. M.: Fizmatlit, 2001. 320 p.

7. Eliseev S.V., Reznik Yu.N., Khomenko A.P. Mechatronic approaches in the dynamics of mechanical oscillation systems: monogr. Novosibirsk: Nauka, 2011. 383 p.

8. Eliseev S.V., Khomenko A.P. Dynamic oscillations: concept of feedback and structural methods of mathematical modeling. Novosibirsk, 2014. 357 p.

9. Vibration in engineering: Handbook in 6 volumes. Volume 6. Protection from vibration and shock / pod red. K.V. Frolova. M.: Mashinostroenie, 1981. 456 p.

10. Eliseev S.V. Dynamics of mechanical Systems with Additional Ties: monogr. Irkutsk, 2006. 315 p.

11. Eliseev S.V., Reznik Yu.N., Khomenko A.P., Zasya-dko A.A. Dynamic synthesis of generalized problems of vibration and vibration control of technical objects. Irkutsk: IGU, 2008. 523 p.

12. Belokobyl'skii S.V., Sitov I.S. Dynamics of mechanical systems. Lever and inertial - elastic connection. SPb., 2013. 319 p.

13. Khomenko A.P., Eliseev S.V., Kaimov E.V. Forms of linkage in dynamic interactions of elements of mechanical oscillation systems // Modern technologies. System analysis. Modeling. 2016. № 3 (51). P. 8-18.

14. Khomenko A.P., Eliseev S.V., Bol'shakov R.S. Dynamic vibration absorbers in the form of structures with multiple elements // Vestn. SamGUPS. 2015. № 1 (27). P. 152-163.

15. Belokobyl'skii S.V., Eliseev S.V., Kashuba V.B. Elastic elements: dynamic properties, the possibility of generalised approaches. Quasi springs // Systems. Methods. Technologies. 2016. № 2 (30) P. 7-17.

16. Eliseev S.V., Kuznetsov N.K., Bol'shakov R.S., Nguen D.Kh. The possibilities of using additional ties inertial type in problems of dynamics of technical systems // Bulletin of Irkutsk State Technical University. 2016. № 5 (112). P. 19-36.