

## К вопросу определения индекса Майера для задач упругопластического внедрения сферы

П.М. Огар<sup>a</sup>, Д.Б. Горохов<sup>b</sup>, Е.В. Угрюмова<sup>c</sup>

Братский государственный университет, ул. Макаренко 40, Братск, Россия

<sup>a</sup>ogar@brstu.ru, <sup>b</sup>denis\_gorohov@mail.ru, <sup>c</sup>weblab@brstu.ru

Статья поступила 15.11.2016, принята 24.11.2016

*Предложена методика определения индекса Майера  $m(\epsilon_y, n)$  в зависимости от свойств упругопластического материала со степенным законом упрочнения Холломона (Hollomon's power law)  $\epsilon_y = \sigma_y / E^*$  и экспоненты упрочнения  $n$ . При этом использован эмпирический закон Майера, связывающий усилие при вдавлении сферы с диаметром отпечатка  $d$ . Изначально закон Майера не связан с механическими характеристиками испытываемого материала. В исследованиях использованы результаты конечно-элементного анализа по внедрению сферы в упрочняемое упругопластическое полупространство. Для учета эффектов «sink-in/pile-up» использован параметр  $c^2 = h_c/h$ , где  $h_c$  — контактная глубина, по которой происходит касание сферы с материалом полупространства;  $h$  — глубина внедрения от уровня исходной поверхности. Определены границы применения предложенных выражений. Указано на отсутствие необходимости определения констант закона Майера. Приведено сравнение полученных результатов с опубликованными результатами конечно-элементного анализа по внедрению сферы в упругопластическое упрочняемое полупространство.*

**Ключевые слова:** внедрение сферы; упругопластический контакт; упрочнение материала; экспонента упрочнения; индекс Майера.

## On the issue of Mayer index definition for the tasks of elastic-plastic sphere indentation

P.M. Ogar<sup>a</sup>, D.B. Gorokhov<sup>b</sup>, E.V. Ugryumova<sup>c</sup>

Bratsk State University, 40, Makarenko St., Bratsk, Russia

<sup>a</sup>ogar@brstu.ru, <sup>b</sup>denis\_gorohov@mail.ru, <sup>c</sup>weblab@brstu.ru

Received 15.11.2016, accepted 24.11.2016

*The article describes the method for determining Mayer index  $m(\epsilon_y, n)$  depending on the elastic-plastic material properties with hardening Hollomon power-law  $\epsilon_y = \sigma_y / E^*$  and hardening exponents  $n$ . Herewith, the empirical law of Mayer, binding force indentation of a sphere with a diameter of indentation  $d$ , is used. Initially, Mayer law is not associated with mechanical characteristics of the test material. The study used the results of finite element analysis for sphere indentation into hardening elastoplastic half-space. To account the «sink-in/pile-up» effects, parameter  $c^2 = h_c/h$  is used, where  $h_c$  is the depth at which contact of a sphere occurs,  $h$  is an indentation depth from the level of original surface. The limit of application of suggested expressions is defined. It is shown that it is not necessary to determine the constants of Mayer law. The comparison of the obtained and published results of finite element study of sphere indentation in elastic-plastic hardening half-space is given.*

**Keywords:** sphere indentation; elastic-plastic contact; hardening of material; hardening exponent; Mayer law.

### Введение

При решении задач контактного взаимодействия шероховатых поверхностей трибомеханики широко используется дискретная модель, в которой микронеровности (далее — неровности) представлены сферическими сегментами, а распределение вершин неровностей соответствует опорной кривой профиля. При рассмотрении упругопластического контакта отдельной неровности возникает вопрос о необходимости учета упрочнения материала. Подход авторов к решению этой проблемы, получивший экспериментальное подтверждение, изложен в [1–5 и др.]. Суть метода заключается в использовании для описания упругопластиче-

ского контакта диаграммы кинетического индентирования, пластической твердости как характеристики сопротивления материала контактной пластической деформации, метода подобия деформационных характеристик. Пластическая твердость представляется в виде:

$$HD = K_h(\epsilon_y, n) \cdot \sigma_y,$$

где  $\sigma_y$  — предел текучести;  $K_h(\epsilon_y, n)$  — параметр, определенный методом «двукратного вдавливания» [6] с использованием опубликованных результатов конечно-элементного анализа [7].

В ряде работ [8; 9], в том числе в недавней работе [10–12], для учета упрочнения материала использовался эмпирический закон Майера, который устанавливает связь между усилием при вдавлении сферы и диаметром отпечатка. В работе [10] подчеркивается влияние индивидуальных физико-механических свойств реальных материалов на особенности формирования контактных упругопластических деформаций. Однако влияние таких индивидуальных характеристик упругопластического упрочняемого материала, как  $\sigma_y$ ,  $E^*$  и  $n$ , исследовано не было, что является недостатком такого подхода. Попытки устранить этот недостаток приведены в работах [13–15], в которых использованы зависимости взаимосвязи экспоненты упрочнения  $n$  и константы (индекса) закона Майера  $m$ , полученные С.И. Булычевым [16; 17]. Однако однозначной зависимости между  $n$  и  $m$  не существует: как показали исследования [18; 19], индекс Майера является функцией  $m(\epsilon_y, n)$ .

Целью настоящей работы является определение индекса Майера в зависимости от вышеуказанных характеристик упрочняемого тела для задач внедрения сферы по методике [13; 14].

**Решение задачи.** В зарубежной литературе при описании упругопластического упрочняемого полупространства широкое распространение получил степенной закон Холломоуна (Hollomon's power law), согласно которому связь между истинными напряжениями и деформациями при одноосном растяжении-сжатии описывается уравнениями:

$$S = \begin{cases} \epsilon E, & \epsilon \leq \epsilon_y; \\ K \epsilon^n, & \epsilon \geq \epsilon_y; \end{cases} \quad (1)$$

где  $n$  — экспонента упрочнения.

Константа  $K$  находится из условия равенства  $\sigma$  при  $\epsilon_y$ :

$$K = \epsilon_y^{1-n} E = \left( \frac{\sigma_y}{E} \right)^{1-n} E = \sigma_y^{1-n} E^n.$$

Тогда второе уравнение выражения (1) можно представить в виде:

$$\frac{S}{S_y} = \left( \frac{E \epsilon}{S_y} \right)^n = \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_y} \right)^n, \quad \epsilon > \epsilon_y, \quad (2)$$

где  $\epsilon_y = S_y / E$ .

Учитывая связь между истинными и условными напряжениями и деформациями:

$$S = \sigma (1 + \delta), \quad \epsilon = \ln(1 + \delta), \quad (3)$$

и то, что  $S_y \approx \sigma_y$ ,  $\epsilon_u = n$ , в работе [20] получено выражение для определения экспоненты упрочнения  $n$  из характеристик условной диаграммы растяжения:

$$5,215n + n \ln n - \ln \left( \frac{\sigma_u}{\sigma_y} \right) = 0. \quad (4)$$

Первым описал поведение материала в упругопла-

стической области Е. Майер, связавший нагрузку  $P$  с диаметром отпечатка  $d$  выражением:

$$P = A d^m. \quad (5)$$

Выражение (4) часто представляют в виде:

$$\frac{4P}{\pi d^2} = A^* \left( \frac{d}{D} \right)^{m-2} = A^* \left( \frac{a}{R} \right)^{m-2}, \quad (6)$$

где  $m, A, A^*$  — константы, причем  $A^*$  имеет размерность напряжения;  $D = 2R$  — диаметр сферы;  $d = 2a$ .

Выражение в левой части представляет собой давление на площадке контакта, которое называют твердостью по Майеру:

$$\frac{4P}{\pi d^2} = \frac{P}{\pi a^2} = p_m = HM, \quad (7)$$

где  $a$  — радиус площадки контакта.

В работе [9] константу  $A^*$  связывают с максимальной твердостью по Майеру  $HM_{\max}$ , которая соответствует внедрению сферы до экватора, т. е. когда  $d = D$ . В этом случае  $A^* = HM_{\max}$ . Далее авторы связывают  $HM_{\max}$  с твердостью по Бринеллю  $HB$ .

Здесь следует отметить важный момент: в отличие от твердости по Майеру  $HM$ , которая при  $0 \leq d/D \leq 1$  является монотонно возрастающей, твердость по Бринеллю  $HB$  в указанном диапазоне имеет максимальное значение при  $d/D < 1$ . Этот момент подробно рассмотрен в работе [13], где получено:

$$\frac{2HB_{\max}}{A^*} = k_m, \quad A^* = 2HB_{\max} / k_m, \quad (8)$$

где:

$$k_m = m^2 (m-1)^{1-m} (m-2)^{\frac{m-2}{2}}.$$

Подставляя константу  $A^*$  в выражение (6) с учетом (7), имеем:

$$p_m = HM = \frac{2}{k_m} HB_{\max} \left( \frac{a}{R} \right)^{m-2}. \quad (9)$$

Из работы [21] следует, что:

$$\sigma_u = k_\sigma \cdot HB, \quad (10)$$

где  $k_\sigma = 0,333$  для углеродистых и перлитных низколегированных сталей, для других материалов значения  $k$  приведены в [21, табл. 1.2; 22]. Как указано в [21], на практике хорошо оправдывается зависимость:

$$k_\sigma = 0,333 \cdot (\delta_u / \psi)^{0,25},$$

где  $\delta_u$  — равномерное относительное удлинение;  $\psi$  — деформация в отпечатке сферического индентора.

Из выражений (9) и (10) с учетом (2) имеем:

$$HB = \frac{\sigma_y}{k_\sigma} n^n e^{-n} \epsilon_y^{-n}, \quad (11)$$

$$p_m = HM = \frac{2\sigma_y}{k_m k_\sigma} n^n e^{-n} \varepsilon_y^{-n} \left(\frac{a}{R}\right)^{m-2}. \quad (12)$$

Для усилия  $P = \pi a^2 p_m$ :

$$P = \frac{2\pi\sigma_y a^2}{k_m k_\sigma} n^n e^{-n} \varepsilon_y^{-n} \left(\frac{a}{R}\right)^{m-2} \quad (13)$$

или:

$$\frac{P}{E^* R^2} = \frac{2\pi n^n}{k_\sigma k_m e^n} \varepsilon_y^{1-n} \left(\frac{a}{R}\right)^m, \quad (14)$$

где  $E^*$  — приведенный модуль упругости.

Радиус площадки контакта связан с глубиной внедрения сферы от исходной поверхности  $h$  выражением:

$$\bar{a}^2 \approx \sqrt{2c^2 \bar{h}}, \quad (15)$$

где  $\bar{a} = a/R$ ;  $\bar{h} = h/R$ .

Параметр  $c^2 = h_c/h$  можно определить согласно данным работы [11], в которой в результате конечно-элементного моделирования получено:

$$c^2 = c^2(\varepsilon_y, n) = M \frac{2}{N} (2h/R) \frac{2}{N-1}, \quad (16)$$

где:

$$M = M(\varepsilon_y, n) = \frac{(1,45 + 28,55n + 1745\varepsilon_y)(1 - 0,5n + 20\varepsilon_y)}{(1 + 21,4n + 1020\varepsilon_y)(1 + 0,4n + 60\varepsilon_y)},$$

$$N = N(\varepsilon_y, n) = \frac{(1,9 + 12,5n + 570\varepsilon_y)(1 + 0,1n)}{1 + 6,8n + 340\varepsilon_y}.$$

Тогда с учетом (16):

$$\bar{a} = (2M\bar{h}) \frac{1}{N}. \quad (17)$$

Подставляя выражение (17) в (14), имеем:

$$\frac{P}{E^* R^2} = \frac{2\pi n^n}{k_\sigma k_m e^n} \varepsilon_y^{1-n} (2M) \frac{m}{N} \bar{h} \frac{m}{N}. \quad (18)$$

Для оценки полученного выражения сравним его с результатами конечно-элементного анализа, полученными в [24]:

$$\frac{P}{E^* R^2} = e^{-B(\varepsilon_y, n)} \left(\frac{h}{R}\right)^{A(\varepsilon_y, n)}, \quad (19)$$

где:

$$A = \frac{0,93 + 290,65\varepsilon_y - 2340885\varepsilon_y^2 + 54640443\varepsilon_y^3 + 3,11n + 0,77n^2}{1 + 194,49\varepsilon_y - 17101,85\varepsilon_y^2 + 40700605\varepsilon_y^3 + 2,1684n}$$

$$B = \frac{5,30 + 81,12\varepsilon_y - 21284,04\varepsilon_y^2 + 381357,70\varepsilon_y^3 - 8,34n + 1,81n^2}{1 + 437,16\varepsilon_y - 9993,45\varepsilon_y^2 + 0,34,05n - 3,43n^2}.$$

Сравнивая показатели степени при  $\bar{h}$ , находим:

$$m(\varepsilon_y, n) = A(\varepsilon_y, n)N(\varepsilon_y, n). \quad (20)$$

Тогда выражение (18) запишем в виде:

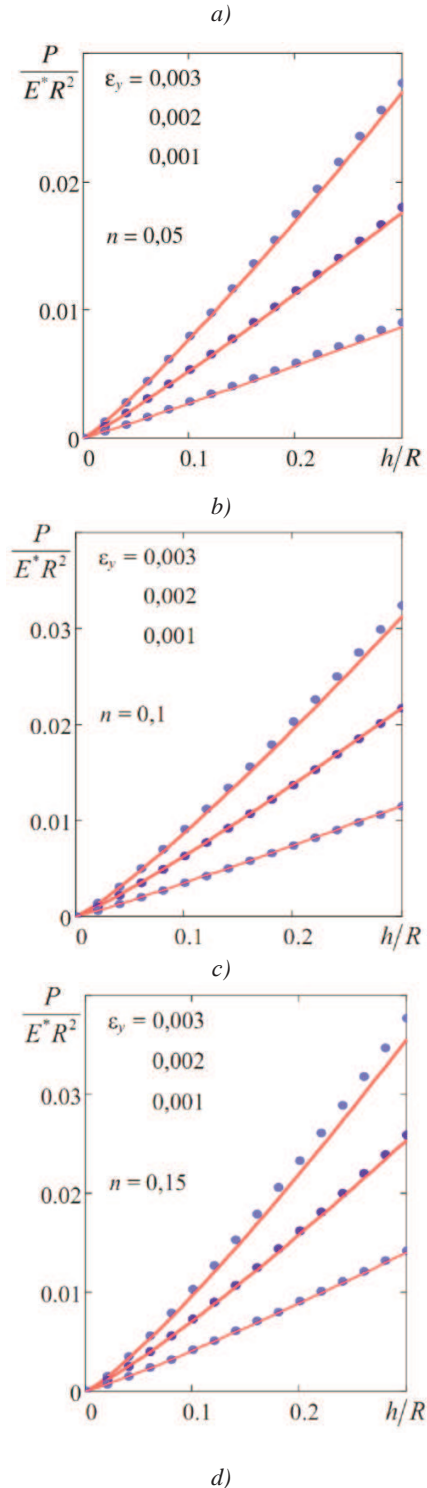
$$\frac{P}{E^* R^2} = \frac{2\pi n^n}{k_\sigma k_m} \varepsilon_y^{1-n} (2M)^A \bar{h}^{-A} \quad (21)$$

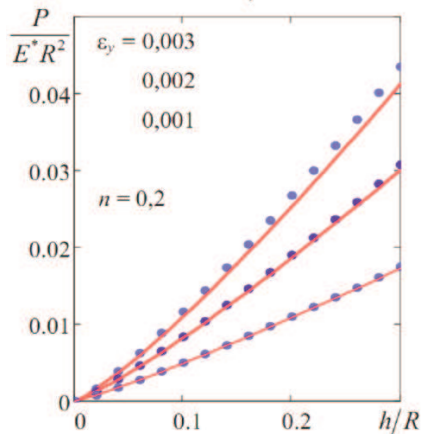
или:

$$\frac{P}{E^* R^2} = C(\varepsilon_y, n) \bar{h}^{-A(\varepsilon_y, n)}, \quad (22)$$

где  $C(\varepsilon_y, n) = \frac{2\pi n^n}{k_\sigma k_m e^n} \varepsilon_y^{1-n} (2M) \frac{m}{N}$ .

На рисунках представлены зависимости  $\bar{P} - \bar{h}$ , рассчитанные по выражениям (19) и (22).





Зависимости  $\bar{P} - \bar{h}$ : для значений  $\varepsilon_y = 0,001; 0,002; 0,003$ ; а)  $n = 0,05$ , б)  $n = 0,1$ , в)  $n = 0,15$ , д)  $n = 0,2$ ; сплошные линии — по выражению (19); пунктирные линии — по выражению (21)

Важно обозначить пределы использования полученных выражений. Нижним пределом является  $a_{ry} = a_y/R = 0,09$ , соответствующее пределу текучести [21; 22], а соответствующее усилие — из выражения (14):

$$P_y(\varepsilon_y, n) = P_y(\varepsilon_y, n, a_{ry}). \quad (23)$$

Верхний предел находится из условия:

$$h_c = c^2 h^* = 1$$

или, с учетом выражения (16), из уравнения:

$$\frac{h^*}{R} = \frac{2 \frac{N(\varepsilon_y, n)}{2} - 1}{M(\varepsilon_y, n)}. \quad (24)$$

Соответствующее усилие определяется из выражения (21):

$$P^*(\varepsilon_y, n) = P(\varepsilon_y, n, h^*/R). \quad (25)$$

Как показано на рисунках, имеется достаточно убедительное совпадение результатов, что позволяет применять выражение (22) для инженерных расчетов.

### Выводы

С использованием эмпирического закона Майера, который изначально не связан с физико-механическими свойствами материалов, получены выражения (14) и (22) для определения площади контакта и величины внедрения сферы в упругопластическое упрочняемое полупространство.

1. При этом учитываются характеристики упругопластического тела  $\varepsilon_y = \sigma_y/E^*$ , экспонента упрочнения  $n$  и отсутствует необходимость определения констант закона Майера  $m$  и  $A^*$ .

2. Определены границы применения предложенных выражений.

3. Приведенное сравнение полученных и ранее опубликованных результатов конечно-элементного анализа внедрения сферы в упругопластическое полупространство позволяет рекомендовать предложенные зависимости для инженерных расчетов.

### Литература

1. Огар П.М., Тарасов В.А., Турченко А.В. Развитие инженерных расчетов характеристик контакта жесткой сферы с упругопластическим полупространством // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2012. № 1(23). С. 80-87.
2. Тарасов В.А., Турченко А.В. Развитие инженерных расчетов характеристик контакта жесткой сферы с упругопластическим полупространством // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2012. № 1 (23). С. 80-87.
3. Огар П.М., Тарасов В.А., Турченко А.В. Описание взаимодействия жесткой сферы с упругопластическим полупространством // Труды Братского государственного университета. Сер. Естественные и инженерные науки. 2012. Т. 1. С. 163-169.
4. Ogar P.M., Tarasov V.A. Kinetic Indentation Application to Determine Contact Characteristics of Sphere and Elastoplastic Half-Space // Advanced Materials Research Vol. 664 (2013) P. 625-631.
5. Огар П.М., Тарасов В.А. Проектирование затворов специальной трубопроводной арматуры: моногр. Братск: Изд-во БрГУ, 2014. 191 с.
6. Огар П.М., Горохов Д.Б., Турченко А.В. Механика контактирования шероховатых поверхностей. Братск: Изд-во БрГУ, 2016. 282 с.
7. Дрозд М.С., Матлин М.М., Сидякин Ю.И. Инженерные расчеты упругопластической контактной деформации. М.: Машиностроение, 1986. 234 с.
8. Lee H., Lee J.H., Pharr G.M. A numerical approach to spherical indentation techniques for material property evaluation // J. Mech. Phys. Solids 2005. № 53. P. 2037-2069.
9. Демкин Н.Б. Контактное взаимодействие шероховатых поверхностей. М.: Наука, 1970. 226 с.
10. Мышкин Н.К., Петроковец М.И. Трение, смазка, износ. Физические основы и технические приложения трибологии. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 368 с.
11. Болотов А.Н., Мешков В.В., Сутягин О.В., Васильев М.В. Влияние упрочнения на характеристики упругопластического контакта микронеровностей поверхностей // Изв. Самар. науч. центра РАН. 2013. Т. 15, № 4 (2). С. 313-315.
12. Болотов А.Н., Мешков В.В., Сутягин О.В., Васильев М.В. Исследование упругопластического контакта сферического индентора с металлами и твердосмазочными покрытиями. Часть 1: Критические нагрузки // Трение и износ. 2013. Т. 34, № 1. С. 5-10.
13. Болотов А.Н., Мешков В.В., Сутягин О.В., Васильев М.В. Исследование упругопластического контакта сферического индентора с металлами и твердосмазочными покрытиями. Часть 2: Характеристики контактного взаимодействия // Трение и износ. 2013. Т. 34, № 2. С. 165-170.
14. Огар П.М., Тарасов В.А., Горохов Д.Б., Турченко А.В. Учет характеристик упрочняемого материала при применении эмпирического закона Майера // Системы. Методы. Технологии. 2013. № 4. С. 50-54.
15. Огар П.М., Тарасов В.А., Горохов Д.Б., Турченко А.В. Новые возможности использования эмпирического закона Майера для описания внедрения сферы в упругопластическое полупространство // Труды Братского государственного университета. Сер. Естественные и инженерные науки. 2013. Т. 2. С. 14-18.
16. Ogar P.M., Gorokhov D.B. Meyer law application for solving problems of surface plastic deformation by spherical indentation // Applied Mechanics and Materials. 2015. Vol. 788. P. 199-204.



17. Булычев С.И. Переход от диаграмм вдавливания к диаграммам растяжения с учетом упрочненного поверхностного слоя // Деформация и разрушение материалов. 2010. № 2. С. 43-48.

18. Булычев С.И. Твердость и гистерезис на пределе текучести // Деформация и разрушение материалов. 2011. № 1. С. 41-45.

19. Peng Jiang, Taihua Zhang, Yihui Feng, Rong Yang, Naigang Liang. Determination of plastic properties by instrumented spherical indentation: Expanding cavity model and similarity solution approach // Journal of Materials Research. 2009. Vol. 24, № 3. P. 1045-1053.

20. Огар П.М., Горохов Д.Б. Взаимосвязь деформации при вдавливании сферического индентора с деформацией при растяжении // Актуальные проблемы в машиностроении. 2016. № 3. С. 479-485.

21. Огар П.М., Горохов Д.Б. Определение экспоненты упрочнения материалов из характеристик условной диаграммы растяжения // Труды Братского государственного университета. Сер. Естественные и инженерные науки. 2015. Т. 1. С. 55-59.

22. Булычев С.И., Алехин В.П. Испытание материалов непрерывным вдавливанием индентора. М.: Машиностроение, 1990. 224 с.

23. Марковец М.П. Определение механических свойств металлов по твердости. М.: Машиностроение, 1979. 191 с.

24. Hernot X., Bartier O., Bekouche Y., El Abdi R., Mauvoisin G. Influence of penetration depth and mechanical properties on contact radius determination for spherical indentation // International Journal of Solids and Structures. 2006. № 43. P. 4136-4153.

25. Collin J.-M., Mauvoisin G., Pilvin P. Materials characterization by instrumented indentation using two different approaches // Materials and Design. 2010. Vol. 31. P. 636-640.

#### References

1. Ogar P.M., Tarasov V.A., Turchenko A.V. The development of engineering design of specifications of contact rigid sphere with elastic-plastic half space // Modern technologies. System analysis. Modeling. 2012. № 1 (23). P. 80-87.

2. Ogar P.M., Tarasov V.A., Turchenko A.V. Description of the interaction of a hard sphere with elastic-plastic half-space // Trudy Bratskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. Estestvennye i inzhenernye nauki. 2012. T. 1. P. 163-169.

3. Ogar P.M., Tarasov V.A. Kinetic Indentation Application to Determine Contact Characteristics of Sphere and Elastoplastic Half-Space // Advanced Materials Research Vol. 664 (2013) P. 625-631.

4. Ogar P.M., Tarasov V.A. Design of special pipeline valves gates: monogr. Bratsk: Izd-vo BrGU, 2014. 191 p.

5. Ogar P.M., Gorokhov D.B., Turchenko A.V. Mechanics of rough surfaces contacting. Bratsk: Izd-vo BrGU, 2016. 282 p.

6. Drozd M.S., Matlin M.M., Sidyakin Yu.I. Engineering calculations elastic-plastic deformation of the contact. M.: Mashinostroenie, 1986. 234 p.

7. Lee H., Lee J.H., Pharr G.M. A numerical approach to spherical indentation techniques for material property evaluation // J. Mech. Phys. Solids 2005. № 53. P. 2037-2069.

8. Demkin N.B. Contacting rough surfaces. M.: Nauka, 1970. 226 p.

9. Myshkin N.K., Petrokovets M.I. Friction, lubrication, wear. Physical basis and engineering applications of tribology. M.: FIZMATLIT, 2007. 368 p.

10. Bolotov A.N., Meshkov V.V., Sutyagin O.V., Vasil'ev M.V. Influence of hardening on the characteristics of elastic-plastic contact surface roughness // Proceedings of the Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences. 2013. T. 15, № 4 (2). P. 313-315.

11. Bolotov A.N., Meshkov V.V., Sutyagin O.V., Vasil'ev M.V. Study of elastoplastic contact of spherical indenter with metals and solid lubricating coating. Part 1: Critical loads // Journal of Friction and Wear. 2013. T. 34, № 1. P. 5-10.

12. Bolotov A.N., Meshkov V.V., Sutyagin O.V., Vasil'ev M.V. Study of elastoplastic contact of spherical indenter with metals and solid lubricating coating. Part 2: Characteristics of contact interaction // Journal of Friction and Wear. 2013. T. 34, № 2. P. 165-170.

13. Ogar P.M., Tarasov V.A., Gorokhov D.B., Turchenko A.V. The account of hardening material characteristics in applying of Meyer's empirical law // Systems. Methods. Technologies. 2013. № 4. P. 50-54.

14. Ogar P.M., Tarasov V.A., Gorokhov D.B., Turchenko A.V. New features of the empirical Meyer law to describe the implementation in elastoplastic half-sphere // Trudy Bratskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. Estestvennye i inzhenernye nauki. 2013. T. 2. P. 14-18.

15. Ogar P.M., Gorokhov D.B. Meyer law application for solving problems of surface plastic deformation by spherical indentation // Applied Mechanics and Materials. 2015. Vol. 788. P. 199-204.

16. Bulychev S.I. Transition from indentation diagrams to stress-strain diagrams taking into consideration hardened surface layer // Deformation and Fracture of Materials. 2010. № 2. P. 43-48.

17. Bulychev S.I. Hardness and hysteresis at the yield strength // Deformation and Fracture of Materials. 2011. № 1. P. 41-45.

18. Peng Jiang, Taihua Zhang, Yihui Feng, Rong Yang, Naigang Liang. Determination of plastic properties by instrumented spherical indentation: Expanding cavity model and similarity solution approach // Journal of Materials Research. 2009. Vol. 24, № 3. P. 1045-1053.

19. Ogar P.M., Gorokhov D.B. The relationship between the deformation of a spherical indenter under indentation and the deformation under tension // Actual problems in machine building. 2016. № 3. P. 479-485.

20. Ogar P.M., Gorokhov D.B. Determination of material hardening exponent of the characteristics of the engineering stress-strain diagram // Trudy Bratskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. Estestvennye i inzhenernye nauki. 2015. T. 1. P. 55-59.

21. Bulychev S.I., Alekhin V.P. Testing of materials by continuous depression of an indenter. M.: Mashinostroenie, 1990. 224 p.

22. Markovets M.P. Determination of mechanical properties of metal hardness. M.: Mashinostroenie, 1979. 191 p.

23. Hernot X., Bartier O., Bekouche Y., El Abdi R., Mauvoisin G. Influence of penetration depth and mechanical properties on contact radius determination for spherical indentation // International Journal of Solids and Structures. 2006. № 43. P. 4136-4153.

24. Collin J.-M., Mauvoisin G., Pilvin P. Materials characterization by instrumented indentation using two different approaches // Materials and Design. 2010. Vol. 31. P. 636-640.