

Режимы динамического гашения колебаний в системах с несколькими степенями свободы

Н.Ж. Кинаш^{1 a}, В.Б. Кашуба^{2 b}, Д.Х. Нгуен^{3 c}

¹Московская железная дорога — филиал ОАО «РЖД», ул. Краснопрудная 20, Москва, Россия

²Братский государственный университет, ул. Макаренко, 40, Братск, Россия

³Иркутский государственный университет путей сообщения, ул. Чернышевского 15, Иркутск, Россия

^a kinashnikita@yandex.ru, ^b nauka@brstu.ru, ^c huynhnd1987@gmail.com

Статья поступила 31.01.2017, принята 3.02.2017

Исследованы особенности динамических свойств виброзащитных систем с двумя степенями свободы при одновременном связанном силовом возмущении по двум координатам. Предлагается метод построения математических моделей для оценки эффектов связанного силового возмущения и введения в систему дополнительных связей на основе устройств для преобразования движения. Используется структурное математическое моделирование, в рамках которого механической колебательной системе сопоставляется структурная схема эквивалентной в динамическом отношении системы автоматического управления. Для определения режимов динамического гашения колебаний используются на основе принципа суперпозиции передаточные функции системы. Показано, что дополнительное внешнее связанное воздействие приводит к появлению режимов динамического гашения колебаний по двум координатам, но на различных частотах. Одновременное полное динамическое гашение колебаний по двум координатам возможно при совпадении собственных частот систем и частот динамического гашения, что соответствует проявлению неустойчивости процессов. Введение дополнительных связей с использованием устройств для преобразования движения позволяет изменять амплитудно-частотные характеристики системы и находить условия одновременного уменьшения амплитуд колебаний по двум координатам одновременно в условиях, близких к режимам динамического гашения колебаний. Разработана методика построения частотных диаграмм для выбора настроечных параметров системы. Результаты исследований представляют интерес для специалистов в области динамики машин, вибрационной защиты оборудования и разработки вибрационных технологий.

Ключевые слова: структурные математические модели; динамическое гашение колебаний; частотные характеристики; введение дополнительных связей; связность движений.

Modes of dynamic damping in systems with multiple degrees of freedom

N.Zh. Kinash^{1 a}, V.B. Kashuba^{2 b}, D.H. Nguyen^{3 c}

¹Moscow Railway, Branch of JSC «Russian Railways», 20, Krasnoprudnaya St., Moscow, Russia

²Bratsk State University, 40, Makarenko St., Bratsk, Russia

³Irkutsk State Transport University, 15, Chernyshevskiy St., Irkutsk, Russia

^a kinashnikita@yandex.ru, ^b nauka@brstu.ru, ^c huynhnd1987@gmail.com

Received 31.01.2017, accepted 3.02.2017

The study features dynamic properties of vibration isolation systems with two degrees of freedom under a coherent force perturbation in two coordinates. To estimate the effects of cohesive force of perturbation and introduce the system of additional connections on the base of converting motion devices, the method of mathematical models construction is proposed. The structural mathematical modeling, in which the mechanical oscillation system is contrasted with an equal dynamic structural scheme of the automatic control system, is used. To determine the dynamic damping modes, the transfer functions of the system, according to the principle of superposition, are used. It is shown that additional coherent external effects lead to the appearance of dynamic modes of vibration damping in two coordinates, but at different frequencies. Complete simultaneous dynamical damping of oscillations in two coordinates is possible when natural frequencies of systems coincide with dynamic damping frequency, but it leads to instability processes appearance. The introduction of additional connections, when using converting motion devices, allows changing the frequency response of the system and finding the conditions for simultaneous reduction of vibration amplitudes in two coordinates simultaneously in special conditions close to the modes of dynamic damping. To select the setting parameters of the system, the method for constructing a frequency diagram has been developed. The research results are of interest to the specialists in the field of dynamics of machines, vibration protection of equipment and development of vibration technology.

Keywords: structural mathematical models; dynamic vibration damping; frequency characteristics; introduction of additional connections; cohesiveness of movements.

Введение

Динамическое гашение колебаний широко используется в задачах динамики машин, в теории и практике

вибрационной защиты технических объектов различного назначения [1–3]. Условия динамического равновесия во взаимодействиях элементов механических колебательных систем, как правило, рассматриваются в линейных постановках задач с учетом действия одного силового фактора при наличии нескольких степеней свободы. Введение дополнительных связей и расширение представлений о возможностях использования новых типовых звеньев, реализующих связи инерционного типа, нашло отражение в ряде работ, посвященных развитию методов структурного математического моделирования [4–6].

Эффекты динамического гашения колебаний достаточно разнообразны и определяются возможностями существенного уменьшения колебаний или полной остановки при отсутствии сил трения массоинерционного элемента системы, к которому приложена внешняя сила, за счет динамических реакций, возникающих при воздействиях с другими элементами виброзащитной системы.

Динамические гасители колебаний отличаются разнообразием конструктивно-технических форм [7–10], в том числе и в виде специальных механизмов и устройств для преобразования движения [11]. В меньшей

степени внимание уделялось проявлениям динамического гашения колебаний в системах с несколькими степенями свободы при действии нескольких внешних возмущений, которые определенным образом связаны в движениях между собой. В частности, такие ситуации возникают при кинематических возмущениях со стороны опорных поверхностей. Подобного рода задачи характерны для динамики транспортных средств, вибрационной защиты приборов и оборудования.

В предлагаемой статье рассматриваются возможности создания условий для проявления форм одновременного динамического гашения колебаний в механических колебательных системах с двумя степенями свободы.

Некоторые общие положения. Постановка задачи исследования. Рассматривается линейная механическая колебательная система с двумя степенями свободы при гармонических внешних воздействиях Q_1 и Q_2 , которые приложены соответственно к двум массоинерционным элементам m_1 и m_2 , как показано на рис. 1.

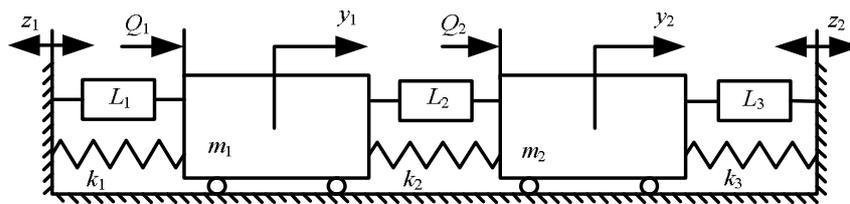


Рис. 1. Принципиальная схема цепной механической системы при силовом (Q_1 и Q_2) и кинематическом (z_1, z_2) возмущениях

Система на рис. 1 имеет массоинерционные элементы m_1, m_2 и упругие связи, представленные пружинами с жесткостями k_1, k_2, k_3 . Помимо обычных элементов в системе используются устройства для преобразования движения (УПД), которые создают при взаимодействиях дополнительные инерционные связи и формируют силовые воздействия на элементы системы в зависимости от ускорений относительных смещений точек крепления УПД [4–6]. Представленные на рис. 1 элементы L_1, L_2, L_3 обладают приведенными массами, значения которых определяются конструктивными особенностями УПД. Математическая модель системы строится в соответствии с обычными приемами использования уравнений Лагранжа 2-го рода [6; 12]. Исходные выражения для кинетической и потенциальной энергий имеют вид:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}_2^2 + \frac{1}{2} L_1 (\dot{y}_1 - \dot{z}_1)^2 + \frac{1}{2} L_2 (\dot{y}_2 - \dot{y}_1)^2 + \frac{1}{2} L_3 (\dot{y}_2 - \dot{z}_2)^2, \quad (1)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} k_1 (y_1 - z_1)^2 + \frac{1}{2} k_2 (y_2 - y_1)^2 + \frac{1}{2} k_3 (y_2 - z_2)^2, \quad (2)$$

где y_1, y_2 — координаты в системе, связанной с неподвижным базисом.

После проведения соответствующих выкладок и преобразования системы линейных дифференциальных

уравнений по Лапласу (при нулевых начальных условиях) получим на основе (1), (2) математическую модель системы (рис. 1) в операторной форме, что представлено коэффициентами уравнений в табл. 1.

Таблица 1

Коэффициенты уравнений движения системы в координатах \bar{y}_1, \bar{y}_2 в операторной форме

a_{11}	a_{12}
$(m_1 + L_1 + L_2)p^2 + k_1 + k_2$	$-(L_2 p^2 + k_2)$
a_{21}	a_{22}
$-(L_2 p^2 + k_2)$	$(m_2 + L_2 + L_3)p^2 + k_2 + k_3$
Обобщенные силы	
$\bar{Q}_1 + (L_1 p^2 + k_1) \bar{z}_1$	$\bar{Q}_2 + (L_3 p^2 + k_3) \bar{z}_2$

Примечание: $p = j\omega$ — комплексная переменная ($j = \sqrt{-1}$); значок \leftrightarrow соответствует изображению переменной по Лапласу [3; 5; 13]

Используя табл. 1, построим структурную математическую модель в виде структурной схемы эквивалентной в динамическом отношении системы автоматического управления [3; 5], которая приведена на рис. 2.

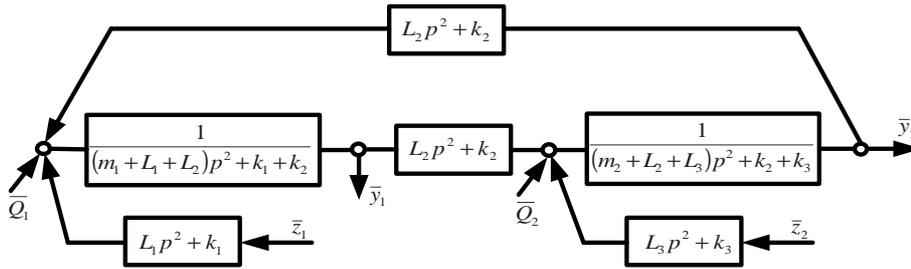


Рис. 2. Структурная математическая модель механической колебательной системы по рис. 1

Как видно на рис. 2, механическая колебательная система (МКС) состоит из двух парциальных блоков, которые соединены между собой (в прямой и обратных линиях связи) звеном с передаточной функцией $W_0(p) = L_2 p^2 + k_2$. При $L_1 = L_2 = L_3 = 0$, а также при выполнении условий $Q_1 = Q$, $Q_2 = 0$, $z_1 = z_2 = 0$ структурная схема может быть трансформирована через последовательные этапы структурных преобразований, как показано на рис. 3 а – в, для последующих детализированных исследований.

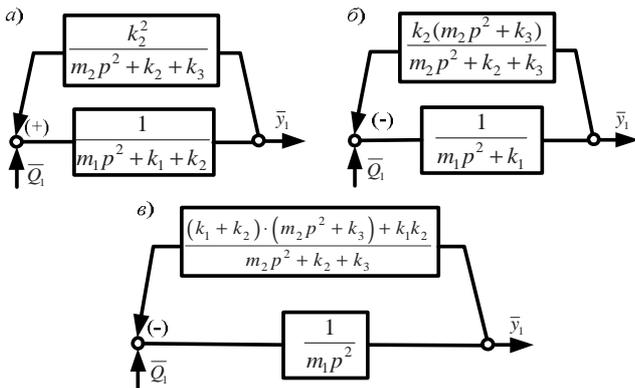


Рис. 3. Варианты преобразований структурной схемы (рис. 2) при $L_1 = L_2 = L_3 = 0$ и действии силового фактора Q_1 : а — объект защиты m_1 представлен в виде парциального блока; б — объект защиты m_1 представлен в виде системы с одной пружиной k_1 ; в — объект защиты m_1 представлен с передаточной функцией интегрирующего звена второго порядка

В данном случае в качестве объекта защиты рассматривается массоинерционный элемент m_1 ; к m_1 приложено внешнее силовое возмущение \bar{Q}_1 . Объект защиты в трех формах отображения (рис. 3) имеет цепь обратной связи со знаменателем, определяемым выражением:

$$W_{\text{пар.}}(p) = m_2 p^2 + k_2 + k_3, \quad (3)$$

Из (3), полагая, что $p = j\omega$, найдем значения частоты динамического гашения колебаний:

$$\omega_{\text{дин}}^2 = \frac{k_2 + k_3}{m_2}. \quad (4)$$

Выражение (4) соответствует известным результатам, приведенным, например, в работах [7–9; 11].

В рамках структурного математического моделирования на частоте $\omega_{\text{дин}}^2$ обратная связь приобретает бесконечно большое значение коэффициента усиления, что предопределяет нулевое значение выходного сигнала \bar{y}_1 . В свою очередь, обратная отрицательная связь (рис. 3 в) в физическом смысле определяет динамическую жесткость квазипружины в структурной схеме исходной системы на рис. 2, приведенной к упрощенному виду (рис. 3 в), получаемому при исключении координаты \bar{y}_2 . Таким образом, при частоте $\omega_{\text{дин}}$ силового возмущения Q_1 динамическая жесткость квазипружины в системе (рис. 3 в) становится бесконечно большой, что приводит к нулевому значению координаты y_1 .

Структурный подход дает возможность, кроме режима динамического гашения колебаний на частоте $\omega_{\text{дин}}$ (выражение (4)), рассмотреть случай, когда обратная связь будет иметь нулевую приведенную динамическую жесткость, при этом:

$$\omega_0^2 = \frac{k_1 k_2 + k_2 k_3 + k_3 k_1}{(k_1 + k_2) m_2}. \quad (5)$$

В этом режиме объект защиты не испытывает действия динамической реакции, что соответствует движению системы в определенной форме самоорганизации своих движений по координатам y_1 и y_2 . Более подробно также формы движения рассмотрены в работах [14; 15].

Задача исследования заключается в расширении понятия режима динамического гашения колебаний на объект защиты, характеризуемый двумя координатами, и разработке метода построения математических моделей, отображающих особенности динамического гашения колебаний одновременно по двум координатам.

Построение математических моделей динамического гашения колебаний в МКС при силовых возмущениях. Для рассмотрения типовых ситуаций в режимах динамического гашения колебаний используется структурная схема (рис. 1) при различных сочетаниях параметров.

1. Силовое возмущение $Q_1 = Q$ (при $Q_2 = 0$, $z_1 = z_2 = 0$, $L_1 = L_2 = L_3 = 0$) обеспечивает развитие ситуации в соответствии с обычными представлениями [1; 2; 7–9; 11].

Используя структурную схему (рис. 2), запишем передаточные функции системы:

$$W_1(p) = \frac{\bar{y}_1}{Q_1} = \frac{m_2 p^2 + k_2 + k_3}{A_0(p)}, \quad (6)$$

$$W_2(p) = \frac{\bar{y}_2}{Q_1} = \frac{k_2}{A_0(p)}, \quad (7)$$

где:

$$A_0(p) = (m_1 p^2 + k_1 + k_2) \cdot (m_2 p^2 + k_2 + k_3) - k_2^2 \quad (8)$$

является частотным характеристическим уравнением.

Из (6), (7) следует, что при действии одиночной силы \bar{Q}_1 , приложенной к объекту защиты m_1 , режим динамического гашения колебаний определяется из числителя передаточной функции (6). Приравняем числитель (6) нулю, находим $\omega_{дин}$, что совпадает с результатами из выражения (4). В системе может возникнуть один режим динамического гашения колебаний по координате \bar{y}_1 ; при этом по координате \bar{y}_2 будет происходить движение с параметрами, определяемыми из выражения (7) при подстановке в него $\omega_{дин}^2$, рассчитываемого из выражения (4).

2. При введении дополнительных связей $L_1 \neq 0, L_2 \neq 0, L_3 \neq 0$ выражения (6), (7) для передаточных функций трансформируются к виду:

$$W_1'(p) = \frac{\bar{y}_1}{Q_1} = \frac{(m_2 + L_2 + L_3)p^2 + k_2 + k_3}{A_0'(p)}, \quad (9)$$

$$W_2'(p) = \frac{\bar{y}_2}{Q_1} = \frac{L_2 p^2 + k_2}{A_0'(p)}, \quad (10)$$

где:

$$A_0'(p) = \left(\left[(m_1 + L_1 + L_2)p^2 + k_1 + k_2 \right] \times \left[(m_2 + L_2 + L_3)p^2 + k_2 + k_3 \right] - (L_2 p^2 + k_2)^2 \right) \quad (11)$$

Режим динамического гашения колебаний возможен по координате y_1 на частоте:

$$\omega_{дин.1}^2 = \frac{k_2 + k_3}{m_2 + L_2 + L_3}. \quad (12)$$

Из (12) следует, что частота динамического гашения при $L_1 \neq 0, L_2 \neq 0, L_3 \neq 0$ по координате \bar{y}_1 , по сравнению с обычной ситуацией без дополнительных связей, сместится в область меньших значений.

Что касается координаты \bar{y}_2 , то «обнуление» координаты \bar{y}_2 возникает на частоте:

$$\omega_{дин.2}^2 = \frac{k_2}{L_2}. \quad (13)$$

В этом случае частотное характеристическое уравнение (11) принимает частный вид:

$$A_{01}'(p) = \left[(m_1 + L_1)p^2 + k_1 \right] \cdot \left[(m_2 + L_3)p^2 + k_3 \right] \quad (14)$$

После подстановки (13) в выражение (9) получим:

$$W_{01}'(p) = \frac{\bar{y}_1}{Q_1} = \frac{1}{(m_1 + L_1)p^2 + k_1}, \quad (15)$$

откуда следует, что на частоте $\omega_{дин.2}^2$, определяемой из (13), будет возникать не режим динамического гашения колебаний, а переход к вырожденному случаю, когда межпарциальная связь исчезает. В этом случае движение первой парциальной системы характеризуется выражением (15) и осуществляется отдельно в статусе системы с одной степенью свободы. Движение ко второй парциальной системе не передается, поэтому частота $\omega_{дин.2}$ не является частотой динамического гашения колебаний в исходном понимании этого эффекта, а относится к ситуации, когда на вторую парциальную систему не поступает внешних возмущений, и она остается в невозбужденном состоянии. Надо отметить, что рассматриваемый случай относится к числу идеальных ситуаций и не учитывает полностью реальных условий возбуждения колебаний.

3. При одновременном действии двух силовых возмущений $Q_1 = Q, Q_2 = Q$ (при $z_1 = z_2 = 0, L_1 = L_2 = L_3 = 0$) возникают ситуации, требующие применения принципа суперпозиции. В этом случае одновременно происходит возмущение по входам двух парциальных систем. Практически такой вид возмущения вполне реализуем при использовании специальных приспособлений, создающих совместное силовое возмущение. Запишем передаточные функции системы, учитывая структурную схему на рис. 2:

$$W_1''(p) = \frac{\bar{y}_1}{Q} = \frac{m_2 p^2 + 2k_2 + k_3}{A_0''(p)}, \quad (16)$$

$$W_2''(p) = \frac{\bar{y}_2}{Q} = \frac{m_1 p^2 + 2k_2 + k_1}{A_0''(p)}, \quad (17)$$

где:

$$A_0''(p) = (m_1 p^2 + k_1 + k_2) \cdot (m_2 p^2 + k_2 + k_3) - k_2^2. \quad (18)$$

Особенностью подхода является то, что в системе возможно появления двух режимов динамического гашения колебаний:

по координате y_1 : $\omega_{дин.1}'^2 = \frac{2k_2 + k_3}{m_2}, \quad (19)$

по координате y_2 : $\omega_{дин.2}'^2 = \frac{k_1 + 2k_2}{m_1}. \quad (20)$

Режимы динамического гашения колебаний реализуются на разных частотах и разных координатах. По существу, в рассматриваемой постановке задачи динамического гашения колебаний происходит переход к пониманию другого процесса, когда для объекта защиты предлагается оценка двух параметров динамического состояния \bar{y}_1 и \bar{y}_2 . Это состояние формируется одновременно действием двух силовых факторов, $\bar{Q}_1 = \bar{Q}$ и $\bar{Q}_2 = \bar{Q}$.

Если для объекта защиты в упомянутой выше постановке задачи ориентироваться по невозможности совпадения частот, то такое условие принимает вид:

$$\frac{k_1 + 2k_2}{m_1} = \frac{2k_2 + k_3}{m_2}. \quad (21)$$

После соответствующих подстановок (21) в (18) выражения (16), (17) принимают вырожденный вид, что свидетельствует о невозможности физической реализации ситуации.

4. При введении дополнительных элементов $L_1 \neq 0$, $L_2 \neq 0$, $L_3 \neq 0$ при $z_1 = z_2 = 0$ и внешних силовых факторов $Q_1 = Q$, $Q_2 = Q$ передаточные функции системы принимают вид:

$$W_1^*(p) = \frac{\bar{y}_1}{Q} = \frac{(m_2 + 2L_2 + L_3)p^2 + 2k_2 + k_3}{A_0^*(p)}, \quad (22)$$

$$W_2^*(p) = \frac{\bar{y}_2}{Q} = \frac{(m_1 + 2L_2 + L_1)p^2 + 2k_2 + k_1}{A_0^*(p)}, \quad (23)$$

где:

$$A_0^*(p) = A_0'(p) = \left(\begin{matrix} (m_1 + L_1 + L_2)p^2 + k_1 + k_2 \\ \times \\ (m_2 + L_2 + L_3)p^2 + k_2 + k_3 \end{matrix} \right) - (L_2 p^2 + k_2)^2. \quad (23')$$

Частоты динамического гашения колебаний будут отличаться от частот, определенных выражениями (12), (13) и (19), (20) и могут быть найдены из выражений:

$$\omega_{\text{дин.1}}^{\omega_2} = \frac{2k_2 + k_3}{m_2 + 2L_2 + L_3}, \quad (24)$$

$$\omega_{\text{дин.2}}^{\omega_2} = \frac{k_1 + 2k_2}{m_1 + 2L_2 + L_1}. \quad (25)$$

При введении дополнительных связей происходит смещение значений $\omega_{\text{дин.1}}^{\omega_2}$ и $\omega_{\text{дин.2}}^{\omega_2}$ в область более низких частот, но режимы динамического гашения колебаний происходят по разным координатам не одновременно. При подстановке (24), (25) в выражения (17), а также (22) и (23), получим, что физическая реализация полной совместности режимов динамического гашения колебаний по координатам y_1 и y_2 также невозможна.

5. Большой интерес представляет случай совместного действия сил \bar{Q}_1 и \bar{Q}_2 при наличии между ними функциональной связи $\bar{Q}_1 = \bar{Q}$ и $\bar{Q}_2 = \alpha \bar{Q}$. Полагая, что $z_1 = z_2 = 0$, а также что $L_1 = L_2 = L_3 = 0$, запишем выражения для передаточных функций по координатам y_1 и y_2 :

$$W_1^{IV}(p) = \frac{\bar{y}_1}{Q} = \frac{m_2 p^2 + k_2 + k_3 + \alpha k_2}{A_0^*(p)} = \frac{m_2 p^2 + k_2(1 + \alpha) + k_3}{A_0^*(p)}, \quad (26)$$

$$W_2^{IV}(p) = \frac{\bar{y}_2}{Q} = \frac{\alpha(m_1 p^2 + k_1 + k_2) + k_2}{A_0^*(p)} = \frac{\alpha m_1 p^2 + k_2(1 + \alpha) + \alpha k_1}{A_0^*(p)}. \quad (27)$$

Используя (26), (27), найдем частоты динамического гашения колебаний по координатам \bar{y}_1 и \bar{y}_2 :

$$\omega_{\text{дин.1}}^{\omega_2} = \frac{k_2(1 + \alpha) + k_3}{m_2}, \quad (28)$$

$$\omega_{\text{дин.2}}^{\omega_2} = \frac{\alpha k_1 + k_2(1 + \alpha)}{\alpha m_1}. \quad (29)$$

Запишем условия одновременного гашения колебаний по координатам \bar{y}_1 и \bar{y}_2 :

$$\frac{k_2(1 + \alpha) + k_3}{m_2} = \frac{\alpha k_1 + k_2(1 + \alpha)}{\alpha m_1}. \quad (30)$$

Отметим, что при $\alpha = 1$ выражение (30) трансформируется к случаю, рассмотренному выше, в разделе п. 3. При $\alpha \neq 1$ ситуация позволяет искать условия одновременности режимов динамического гашения колебаний. В данном случае при заданных значениях параметров m_1, m_2, k_1, k_2, k_3 можно построить уравнение для определения α :

$$\alpha m_1 k_2 (1 + \alpha) + \alpha m_1 k_3 = m_2 \alpha k_1 + m_2 k_2 (1 + \alpha)$$

или:

$$m_1 k_2 \alpha^2 + (m_1 k_2 + m_1 k_3 - m_2 k_1 - m_2 k_2) \alpha - m_2 k_2 = 0. \quad (31)$$

Решение уравнения (31) дает возможность при заданных значениях параметров МКС найти параметр α , обеспечивающий одновременное динамическое гашение колебаний по двум координатам, \bar{y}_1 и \bar{y}_2 .

6. Аналогичным образом может быть учтено влияние дополнительных связей $L_1 \neq 0, L_2 \neq 0, L_3 \neq 0$ при $z_1 = z_2 = 0$ и внешних силовых факторов $Q_1 = Q, Q_2 = \alpha Q$. Передаточные функции системы по координатам \bar{y}_1 и \bar{y}_2 примут вид:

$$W_1^V(p) = \frac{\bar{y}_1}{Q} = \frac{[m_2 + (1 + \alpha)L_2 + L_3]p^2 + (1 + \alpha)k_2 + k_3}{A_0^*(p)}, \quad (32)$$

$$W_2^V(p) = \frac{\bar{y}_2}{Q} = \frac{[(m_1 + L_1)\alpha + (1 + \alpha)L_2]p^2 + (1 + \alpha)k_2 + \alpha k_1}{A_0^*(p)}. \quad (33)$$

Выражения для определения частот динамического гашения одновременно по координатам \bar{y}_1 и \bar{y}_2 принимают вид:

$$\omega_{\text{дин.1}}^{IV^2} = \frac{(1 + \alpha)k_2 + k_3}{m_2 + (1 + \alpha)L_2 + L_3}, \quad (34)$$

$$\omega_{\text{дин.2}}^{IV^2} = \frac{(1 + \alpha)k_2 + \alpha k_1}{\alpha(m_1 + L_1) + (1 + \alpha)L_2}. \quad (35)$$

Используя (34) и (35), можно построить уравнения для определения значений α , обеспечивающих возможности динамического гашения колебаний одновременно по двум координатам \bar{y}_1 и \bar{y}_2 , тогда:

$$\frac{(1 + \alpha)k_2 + k_3}{m_2 + (1 + \alpha)L_2 + L_3} = \frac{(1 + \alpha)k_2 + \alpha k_1}{\alpha(m_1 + L_1) + (1 + \alpha)L_2},$$

откуда:

$$\alpha^2 \left(\begin{matrix} m_1 k_2 + \\ + k_2 L_1 - k_1 L_2 \end{matrix} \right) + \alpha \left[\begin{matrix} (m_1 + L_1 + L_2)(k_2 + k_3) - \\ - (k_1 + k_2)(m_2 + L_2 + L_3) \end{matrix} \right] + k_3 L_2 - k_2(m_2 + L_3) = 0. \quad (36)$$

Решение уравнения (36) при заданных значениях параметров МКС даст возможность найти значение настроечного параметра α .

Методические подходы к определению параметров системы при одновременном динамическом гашении колебаний по двум координатам, y_1 и y_2 . Для случая, рассмотренного в п. 6 раздела II, может быть предложена схема графоаналитического решения уравнения (36).

1. Для случая $L_1 = 0, L_2 = 0, L_3 = 0$ преобразуем (34), (35) к виду:

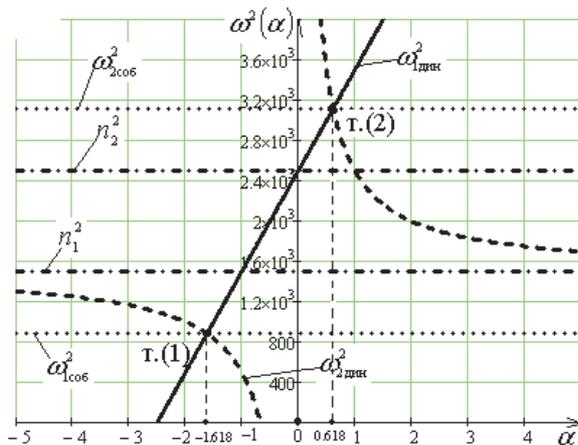
$$\omega_{\text{дин.1}}^2 = \frac{k_2 + k_3}{m_2} + \frac{\alpha k_2}{m_2} = n_2^2 + \frac{\alpha k_2}{m_2}, \quad (37)$$

$$\omega_{\text{дин.2}}^2 = \frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2}{\alpha m_1} = n_1^2 + \frac{k_2}{\alpha m_1}, \quad (38)$$

где n_1 и n_2 — собственные частоты парциальных систем (парциальные частоты) структурной математической модели на рис. 2.

Важно отметить, что частоты одновременного динамического гашения колебаний не совпадают с парциальными частотами. При $\alpha > 0$ эти частоты больше парциальных, а при $\alpha < 0$ частоты будут сдвигаться в сторону меньших значений. При $\alpha = 0$ система будет иметь только один режим динамического гашения колебаний на парциальной частоте n_2 (то есть по координате y_1). По координате y_2 динамическое гашение невозможно по определению. При $\alpha = 1$ возможны режимы динамического гашения колебаний и по координате y_1 , и по координате y_2 , по отдельности, но невозможно одновременное динамическое гашение колебаний одновременно на одной частоте.

2. Рассмотрим принципиальную схему (рис. 3) решения по выбору α , используя выражения (37), (38) (рис. 3), полагая, что $L_1 = 0, L_2 = 0, L_3 = 0$.



$n_1 = 38.73$ рад/сек
 $n_2 = 50$ рад/сек
 $\omega_{1\text{соб}} = 29.70$ рад/сек

$\omega_{2\text{соб}} = 55.84$ рад/сек

Рис. 3. Диаграмма режимов динамических взаимодействий при связанных силовых возмущениях ($Q, \alpha Q$)

На рис. 3 обозначены графики собственных частот $\omega_{1\text{соб}}^2, \omega_{2\text{соб}}^2$ МКС, которые представляют собой прямые линии, параллельные оси абсцисс, так как эти частоты не зависят от параметра α , а определяются через характеристическое уравнение (23'), что обозначено на рис. 3 точечными линиями (+ + +). Парциальные частоты n_1^2, n_2^2 также не зависят от коэффициента связности внешних сил α и на рис. 3 представлены линиями, параллельными оси абсцисс. Эти линии обозначены штрих-пунктирными прямыми (+ - + -). На рис. 3, кроме вышеупомянутых графиков, обозначены зависимости $\omega_{\text{дин}}^2(\alpha), \omega_{2\text{дин}}^2(\alpha)$, которые определяется выражениями (34), (35) соответственно.

Необходимые расчеты и построения выполнялись при следующих параметрах модельной задачи: $m_1 = 10$ кг, $m_2 = 10$ кг, $k_1 = 5000$ Н, $k_2 = 10000$ Н, $k_3 = 15000$ Н. Кривая $\omega_{\text{дин}}^2(\alpha)$ представлена графиком в виде сплошной линии (—); кривая $\omega_{2\text{дин}}^2(\alpha)$ отображается штриховой линией (- - -) на рис. 3.

В тт. (1) и (2) одновременно пересекаются два графика, $\omega_{\text{дин}}^2(\alpha)$ и $\omega_{2\text{дин}}^2(\alpha)$, что соответствует случаю одновременного динамического гашения колебаний по двум координатам. Характерным является то обстоятельство, что это происходит при одновременном совпадении с частотами собственных колебаний системы $\omega_{1\text{соб}}^2$ и $\omega_{2\text{соб}}^2$. Такой режим физически не может быть реализован и относится к числу неустойчивых форм движения, однако это не исключает возможностей использования режимов, близких к режиму одновременного динамического гашения колебаний.

3. Так как знаменатель передаточных функций (22) и (23) не зависит от α , можно, используя числители (22) и (23), построить графики зависимости $y_1'(\omega)$ и $y_2'(\omega)$ в условном масштабе как функции частоты. На рис. 4 приводятся оба графика, которые имеют точку пересечения, обозначенную как т. (1). В этой точке, лежащей на оси абсцисс ω , обе кривые пересекаются, имея нулевые значения, что происходит на частоте $\omega_{2\text{соб}} = 55.84$ рад/сек при $\alpha = 0.618$ (рис. 4 а). В свою очередь, пересечения $y_1'(\omega)$ и $y_2'(\omega)$ при $\alpha = -1.618$ можно отметить в т. (2) на рис. 4 б, что соответствует частоте собственных колебаний $\omega_{1\text{соб}} = 29.70$ рад/сек. При этом также $y_1' = 0$ и $y_2' = 0$.

Графики на рис. 4 а, б построены при $L_1 = 0, L_2 = 0, L_3 = 0$ и отражают особенности динамических свойств системы в том, что одновременные режимы динамического гашения колебаний при связанных силовых возмущениях совпадают с частотами собственных колебаний.

Можно полагать, что на этих частотах использование режимов динамического гашения колебаний не представляется целесообразным в силу проявления неустойчиво-

сти динамического состояния. Однако определенный интерес связан с выбором частот динамического гашения колебаний в окрестностях точек «обнуления» координат,

где амплитуды колебаний могут принимать малые значения в определенных частотных диапазонах.

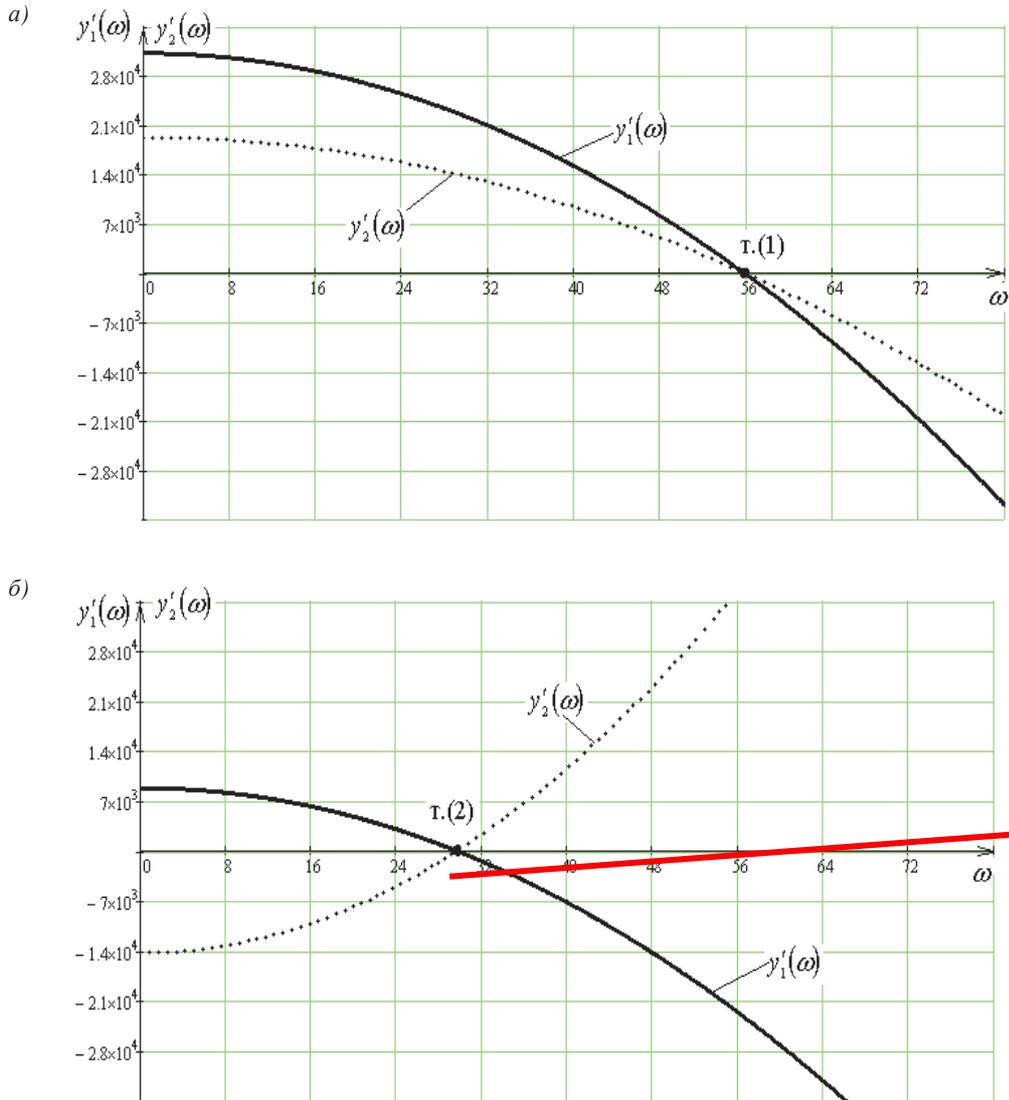


Рис. 4. Графики зависимостей амплитуды колебаний по координатам y_1 и y_2 в зависимости от частоты при $L_1 = L_2 = L_3 = 0$: a — при $\alpha = 0.618$; b — при $\alpha = -1.618$

4. На рис. 5 $a, б$ показаны семейства амплитудно-частотных характеристик по координатам y_1 — внешних сил (рис. 5 a) и координатам y_2 — при различных значениях коэффициента связности α (рис. 5 $б$). В предлагаемых примерах, в целях упрощения представления зависимостей, было принято, что приведенные массы устройств для преобразования движения L_1, L_2, L_3 считаются нулевыми. При разных значениях α кривые отличаются различными обозначениями линий, как это показано на рис. 3.

Характерной особенностью для координат y_1 (рис. 5 a) и y_2 (рис. 5 $б$) является возможность построения в диапазонах $0 \div \omega_{1\text{соб}}$ и $\omega_{1\text{соб}} \div \omega_{1\text{соб}}$ АЧХ с «плоскими» участками и малыми амплитудами, что позволяет формировать условия для реализации необходимых режимов динамического гашения колебаний. Изменение значений параметра связности α существенным образом влияет на форму АЧХ и расположение

характерных точек, определяющих частоты режимов динамического гашения колебаний.

5. Учет значений L_1, L_2, L_3 оказывает влияние на распределение характерных частот диаграммы. Отметим, что тт. (1) и (2) на диаграмме отражают пересечения трех графиков $\omega_{\text{дин}}^2(\alpha), \omega_{2\text{дин}}^2(\alpha)$ и частот собственных колебаний $\omega_{1\text{соб}}^2$ и $\omega_{2\text{соб}}^2$, что свидетельствует о проявлениях динамического эффекта, возникающего при реализации режимов динамического гашения колебаний при связанных силовых внешних возмущениях.

При введении дополнительных устройств для преобразования движения в структуру механической системы (как показано на рис. 6), если иметь в виду сопоставление диаграмм на рис. 3 и 6, общие формы взаимодействия и проявления устойчивых связей сохраняются, но

формы АЧХ при этом могут отличаться большими изменениями.

6. На рис. 7 а, б показаны взаимные деформации АЧХ по координатам y_1 и y_2 при различных значениях коэффициента связности α .

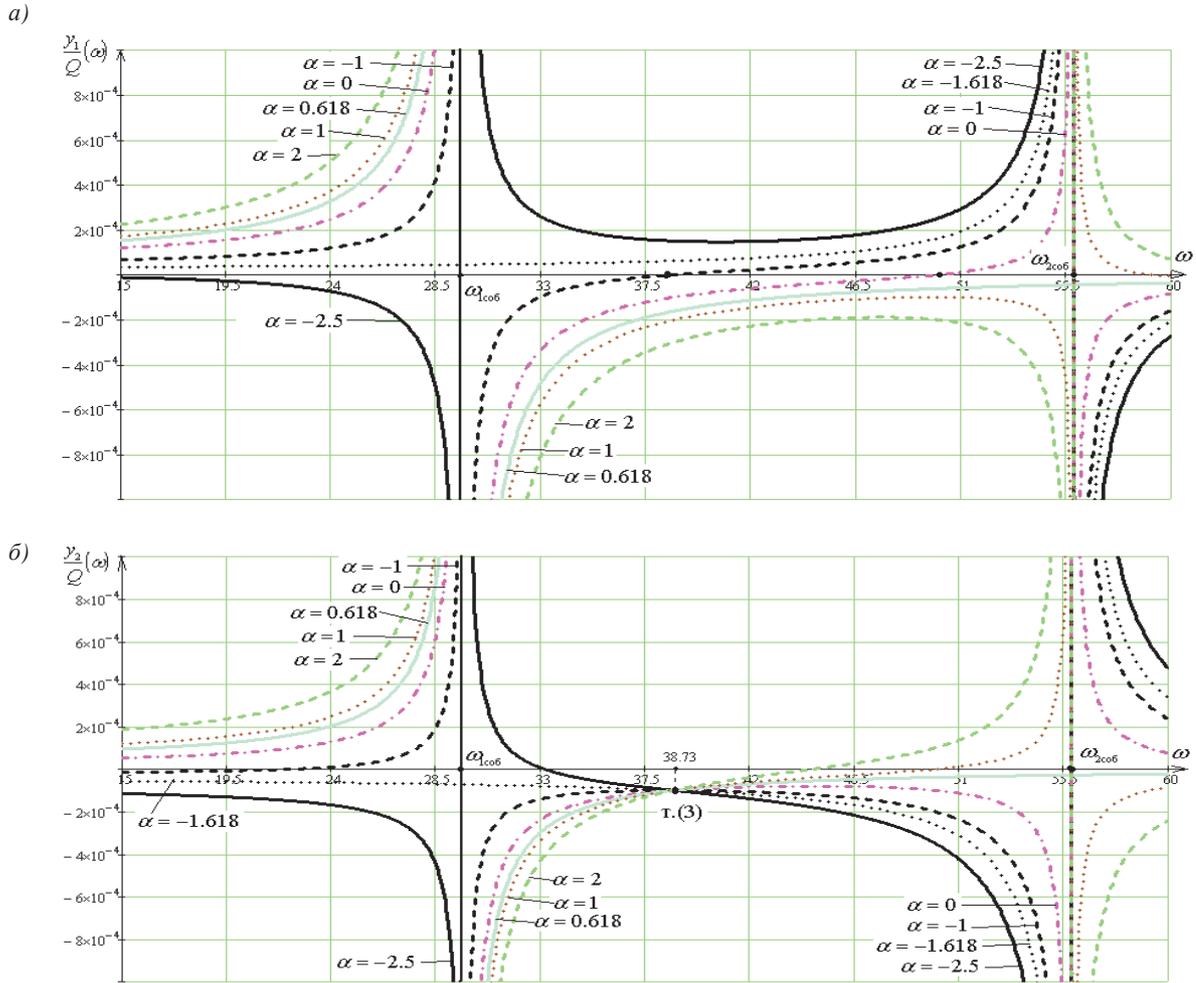


Рис. 5. Амплитудно-частотные характеристики механической колебательной системы по рис. 1 при $L_1 = L_2 = L_3 = 0$ при действии двух «связанных» силовых возмущений и различных значениях параметра связности α : а — для координаты y_1 ; б — для координаты y_2

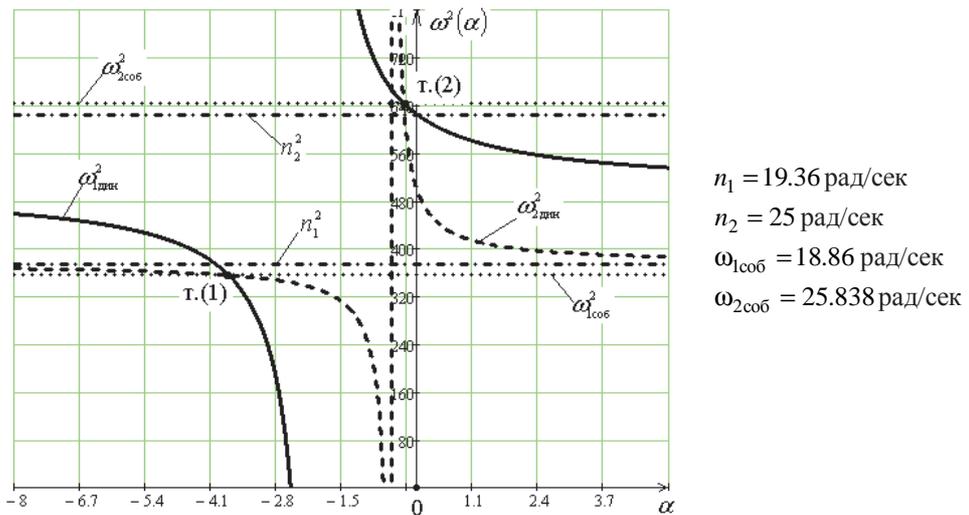


Рис. 6. Диаграмма частотных характеристик механической колебательной системы по рис. 2 при $L_1 = 10$ кг, $L_2 = 20$ кг, $L_3 = 10$ кг

при различных значениях параметра связности α силовых внешних возмущений

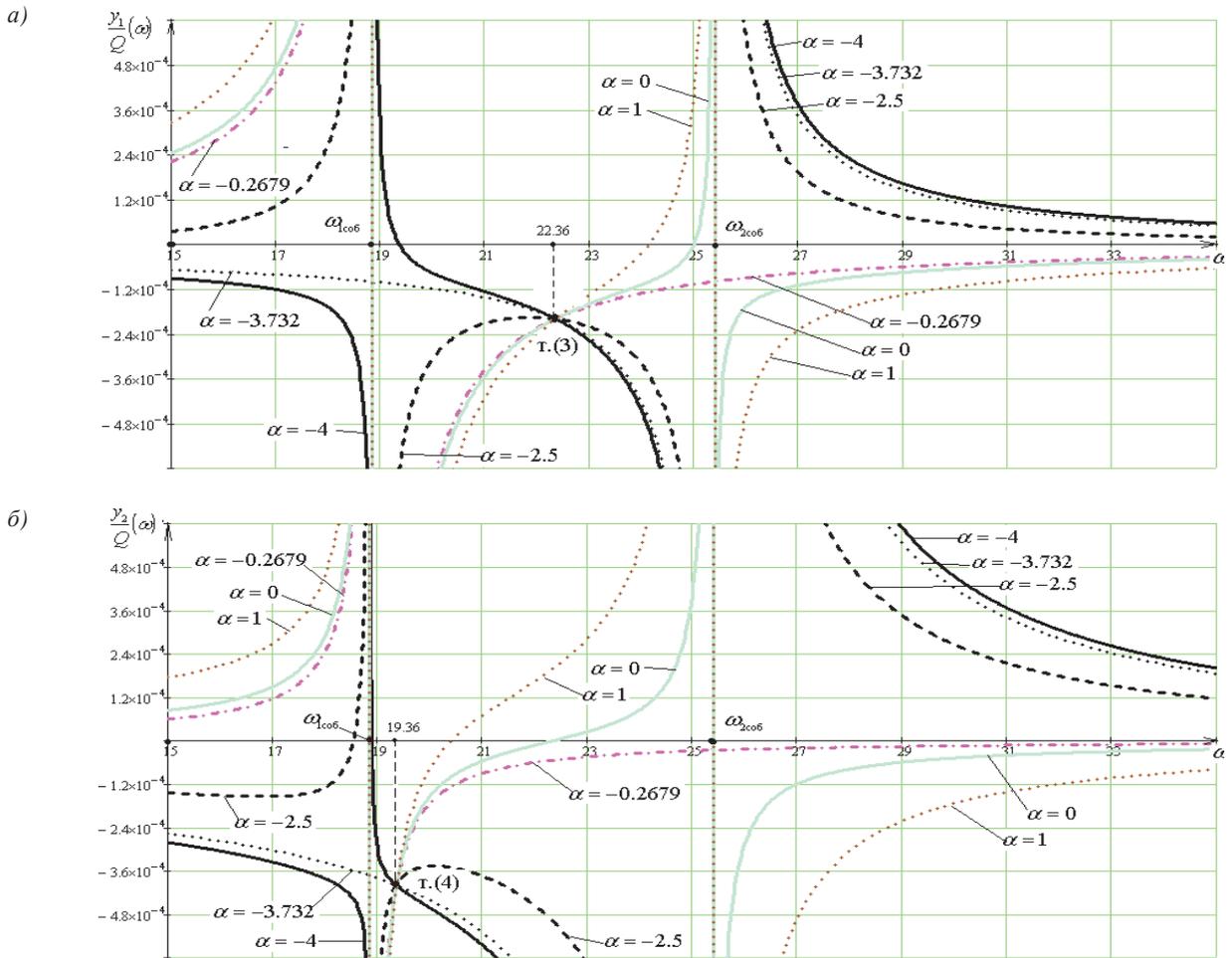


Рис. 7. Амплитудно-частотные характеристики механической колебательной системы по рис. 2 при введении устройств для преобразования движения с приведенными массами $L_1 = 10$ кг, $L_2 = 20$ кг, $L_3 = 10$ кг при различных значениях параметра связности внешних сил α : *a* — для координаты y_1 ; *b* — для координаты y_2

Можно отметить, что при изменении α создаются возможности целенаправленного изменения форм АЧХ в выбранных частотных диапазонах, а также в формировании режимов динамического гашения колебаний по разным координатам (y_1 и y_2) в различных частотных диапазонах. Точки пересечения АЧХ — тт. (3) и (4) на рис. 7 и т. (3) на рис. 5 — отражают особенности изменения АЧХ при изменениях коэффициента связности α при его отсутствии в знаменателе передаточных функций.

Заключение

1. Система с двумя степенями свободы при силовом возмущении (МКС цепного типа) при выделении объекта защиты в виде одного массоинерционного звена имеет один режим динамического гашения колебаний. При введении дополнительных связей в виде УПД ситуация не меняется. Введение в структуру цепной системы дополнительных связей в виде УПД позволяет изменять тип межпарциальных связей, от упругих до инерционных и инерционно-упругих. Полученные результаты могут применяться к системам, где объект защиты представлен твердым телом, совершающим

плоское движение, то есть имеющим две степени свободы движений.

2. Введение дополнительного внешнего воздействия, которое может быть приложено к промежуточной массе, оказывает существенное влияние на свойства исходной системы. В частности, дополнительное воздействие возмущающей силы может интерпретироваться как способ изменения ее приведенных массоинерционных и жесткостных характеристик. Вместе с тем, введение дополнительной силы, которая идентична по своим параметрам (величина и фаза) силе, приложенной к другому массоинерционному элементу, не создает возможности для формирования режимов одновременного полного динамического гашения колебаний по двум координатам. Однако возможности изменения позволяют находить решение в определенных частотных диапазонах, близких к динамическому гашению колебаний.

3. Предлагается способ изменения динамических свойств МКС с двумя степенями свободы на основе введения двух силовых внешних факторов, имеющих функциональные связи. В рассматриваемом случае $Q_2 = \alpha Q_1$.

4. Предложен метод построения математических моделей для оценки возможностей поиска и определения параметров совместных режимов, близких к режимам динамического гашения колебаний при силовых внешних воздействиях.

Литература

1. Корнев Б.Г., Резников Л.М. Динамические гасители колебаний. Теория и технические приложения. М.: Наука, 1963. Т. 2. 535 с.
2. Елисеев С.В., Нерубенко Г.П. Динамические гасители колебаний. Новосибирск: Наука, 1982. 144 с.
3. Елисеев С.В., Хоменко А.П. Динамическое гашение колебаний: концепция обратной связи и структурные методы математического моделирования. Новосибирск: Наука, 2014. 357 с.
4. Eliseev S.V., Lukyanov A.V., Reznik Yu.N., Khomenko A.P. Dynamics of mechanical system with additional ties. Irkutsk, 2006. 315 p.
5. Елисеев С.В., Резник Ю.Н., Хоменко А.П., Засядко А.А. Динамический синтез в обобщенных задачах виброзащиты и виброизоляции технических объектов. Иркутск: ИГУ, 2008. 523 с.
6. Белокобыльский С.В., Елисеев С.В., Кашуба В.Б. Прикладные задачи структурной теории виброзащитных систем. СПб.: Политехника, 2013. 363 с.
7. Вибрации в технике: справочник в 6 т. Т.1 Колебания линейных систем / под ред. В.В. Болотина. М.: Машиностроение, 1978. 352 с.
8. Harris' C.M., Allan G. Shock and Vibration Handbook. USA. Mc Graw-Hill, New-York, 2002. 877 p.
9. De Silva C.W. Vibration. Fundamentals and Practice. Boca Raton, London, New York, Washington, D.C.: CRC Press, 2000. 957 p.
10. Nerubenko G. Engine noise reduction using self-tuning torsional vibration damper, SAE Technical Paper 2016-01-1063, 2016. doi: 10.4271/2016-01-1063.
11. Karnovsky I. A., Lebed E. Theory of vibration protection. Switzerland, 2016. 669p. doi 10.1007/978-3-319-28020-2.
12. Елисеев С.В., Резник Ю.Н., Хоменко А.П. Мехатронные подходы в динамике механических колебательных систем. Новосибирск: Наука, 2011. 384 с.
13. Хоменко А.П., Елисеев С.В., Ермошенко Ю.В. Системный анализ и математическое моделирование в мехатронике виброзащитных систем. Иркутск: ИрГУПС, 2012. 288 с.
14. Белокобыльский С.В., Елисеев С.В., Кашуба В.Б., Большаков Р.С. Самоорганизация взаимодействия элементов механических систем в соединениях с устройствами для преобразования движения // Системы. Методы. Технологии 2016. № 1 (29). С. 7-18.

15. Елисеев С.В., Трофимов А.Н., Каимов Е.В., Кинаш Н.Ж. Прикладные задачи теории динамического гашения колебаний. Иркутск, 2015. 105 с. Деп. в ВИНТИ 27.02.2015, № 39.

References

1. Korenev B.G., Reznikov L.M. Dynamic dampers. Theory and technical applications. M.: Nauka, 1963. T. 2. 535 p.
2. Eliseev S.V., Nerubenko G.P. Dynamic dampers. Novosibirsk: Nauka, 1982. 144 p.
3. Eliseev S.V., Khomenko A.P. Dynamic vibration damping: the feedback concept and structural methods of mathematical modeling. Novosibirsk: Nauka, 2014. 357 p.
4. Eliseev S.V., Lukyanov A.V., Reznik Yu.N., Khomenko A.P. Dynamics of mechanical system with additional ties. Irkutsk, 2006. 315 p.
5. Eliseev S.V., Reznik Yu.N., Khomenko A.P., Zasyadko A.A. Dynamic Synthesis in generalized problems of vibration protection and vibration technical objects. Irkutsk: IGU, 2008. 523 p.
6. Belokobyl'skii S.V., Eliseev S.V., Kashuba V.B. Applications of the theory of structural vibration isolation systems. SPb.: Politekhnik, 2013. 363 p.
7. Vibrations in equipment: the reference book in 6 volumes. T. 6. The vibrations of linear systems / pod red. V.V. Bolotina. M.: Mashinostroenie, 1978. 352 p.
8. Harris' C.M., Allan G. Shock and Vibration Handbook. USA. Mc Graw-Hill, New-York, 2002. 877 p.
9. De Silva C.W. Vibration. Fundamentals and Practice. Boca Raton, London, New York, Washington, D.C.: CRC Press, 2000. 957 p.
10. Nerubenko G. Engine noise reduction using self-tuning torsional vibration damper, SAE Technical Paper 2016-01-1063, 2016. doi: 10.4271/2016-01-1063.
11. Karnovsky I.A., Lebed E. Theory of vibration protection. Switzerland, 2016. 669p. doi 10.1007/978-3-319-28020-2.
12. Eliseev S.V., Reznik Yu.N., Khomenko A.P. Mechatronic approaches in the dynamics of mechanical vibration systems. Novosibirsk: Nauka, 2011. 384 p.
13. Khomenko A.P., Eliseev S.V., Ermoshenko Yu.V. System analysis and mathematical modeling in mechatronics vibration isolation systems. Irkutsk: IrGUPS, 2012. 288 p.
14. Belokobyl'skii S.V., Eliseev S.V., Kashuba V.B., Bol'shakov R.S. Self-organization of the interaction of elements of mechanical systems in connection with devices for converting the movement // Systems. Methods. Technologies. 2016. № 1 (29). P. 7-18.
15. Eliseev S.V., Trofimov A.N., Kaimov E.V., Kinash N.Zh. Applications of dynamic damping theory. Irkutsk, 2015. 105 p. Dep. v VINITI 27.02.2015, № 39.