

## Распределение амплитуд колебаний между элементами системы как форма проявления межпарциальных связей

В.Б. Кашуба<sup>1 a</sup>, Н.Ж. Кинаш<sup>2 b</sup>, И.С. Ситов<sup>1 c</sup>, А.В. Елисеев<sup>3 d</sup>, Д.Х. Нгуен<sup>3 e</sup>

<sup>1</sup>Братский государственный университет, ул. Макаренко 40, Братск, Россия

<sup>2</sup>Московский инженерный центр Московской железной дороги — филиала ОАО «РЖД», ул. Краснопрудная 20, Москва, Россия

<sup>3</sup>Иркутский государственный университет путей сообщения, ул. Чернышевского 15, Иркутск, Россия

<sup>a</sup>sitov@ya.ru, <sup>b</sup>n.kinash@mzd.ru, <sup>c</sup>sitov@ya.ru, <sup>d</sup>eavsh@ya.ru, <sup>e</sup>huynhnd1987@gmail.com

Статья поступила 31.06.2016, принята 14.08.2016

*Рассматриваются особенности формирования взаимодействия в движениях элементов для системы с двумя степенями свободы. Показано, что специфика взаимодействия определяется свойствами парциальных систем, определяющих значения парциальных частот. Предлагается метод построения математических моделей взаимосвязанности движений между элементами систем в различных системах координат. Основой метода построения математических моделей является использование специально вводимой передаточной функции межпарциальных связей. В статическом варианте при действии постоянной внешней силы такая функция принимает вид передаточного отношения в параметрах движения между отдельными координатами системы, что можно интерпретировать как форму проявления присущих системе рычажных связей. При действии вибрационного гармонического внешнего возмущения передаточная функция межпарциальных связей может быть представлена в виде частотной характеристики. Показаны свойства частотных характеристик, отражающих основные свойства отношений амплитуд колебаний по координатам движения элементов системы. Показано, что отношение амплитуд колебаний, которые проявляются при вынужденном движении элементов, вызванном действием гармонического силового возмущения, характеризует основные динамические эффекты связанности движений. Показано, что распределение амплитуд колебаний по координатам движения элементов зависит от частоты возмущающей силы и места ее приложения. Выявлены особенности реализации режимов динамического гашения колебаний и прохождения через резонанс. Приведены результаты исследований, отражающих специфику проявления эффектов распределения амплитуд колебаний в различных системах координат. Показана неоднозначность проявления соотношений между собственными частотами колебаниями систем.*

**Ключевые слова:** отношение амплитуд колебаний; парциальная система; передаточные функции межпарциальных связей; парциальные частоты; динамическое гашение колебаний.

## Distribution of oscillation amplitude between system elements as a form of manifestation of partial ties

V.B. Kashuba<sup>1 a</sup>, N.Zh. Kinash<sup>2 b</sup>, I.S. Sitov<sup>1 c</sup>, A.V. Eliseev<sup>3 d</sup>, D.H. Nguyen<sup>3 e</sup>

<sup>1</sup>Bratsk State University; 40, Makarenko St., Bratsk, Russia

<sup>2</sup>Moscow Engineering Center of the Moscow railway, branch of JSC «Russian Railways»; 20, Krasnoprudnaya St., Moscow, Russia

<sup>3</sup>Irkutsk State Transport University; 15, Chernyshevskiy St., Irkutsk, Russia

<sup>a</sup>sitov@ya.ru, <sup>b</sup>n.kinash@mzd.ru, <sup>c</sup>sitov@ya.ru, <sup>d</sup>eavsh@ya.ru, <sup>e</sup>huynhnd1987@gmail.com

Received 31.06.2016, accepted 14.08.2016

*Peculiarities of forming the interaction in the movements of the elements for a system with two degrees of freedom are considered. It is shown that the specificity of interaction is determined by the properties of the partial system, characterizing the values of partial frequencies. The method of construction is proposed for mathematical models of the interrelatedness of the movements between the elements of the system in different coordinate systems. Specially introduced transfer function of interpartial ties is acted as basis of method of constructing mathematical models. In the static variant under constant external power this feature takes the form of the reduction ratio in the parameters of the movements between the individual coordinate system, which can be interpreted as a form of expression inherent to the lever-type ties. Under vibration-harmonic external disturbance, transfer function of interpartial relations can be represented as frequency characteristics. The properties of frequency characteristics, reflecting the basic properties of relations of amplitudes on the coordinates of the movement elements of the system, are described. It is shown that the ratio of oscillation amplitudes characterizes the main dynamic effects of the connectedness of movements. The oscillations occur when the forced movement of the elements caused by the action of a harmonic force perturbation. It is shown that the distribution of vibration amplitude on the coordinates of the movement elements depends on the frequency of the external force and the application point of the force. Peculiarities of the realization of modes of dynamic damping of vibrations and the passage through the resonance are identified. The results of the studies, reflecting the specific manifestation of the effects of the distribution of the amplitudes of the oscillations in different coordinate systems are presented. The uncertainties between the manifestations of the relationships between the natural frequencies and vibrations of systems are shown.*

**Key words:** ratio of oscillation amplitudes; partial system; transfer functions for interpartial ties; partial frequencies; dynamic oscillation damping.

## Введение

Свободные колебания в упругих системах достаточно хорошо изучены в приложениях к задачам оценки взаимодействий между типовыми элементами электрических и механических линейных систем [1–4]. Знание собственных частот колебаний систем и особенностей переходных процессов служит основой для прогнозирования динамических свойств технических объектов, которые проявляются при вынужденных движениях, возникающих при действии внешних периодических возмущений. Подходы в формировании детализированных представлений об особенностях движений отдельных элементов и их взаимодействиях между собой достаточно разнообразны и определяют возможности решения многочисленных прикладных задач [5–10]. Свободные колебания связанных систем отличаются проявлениями широкого спектра форм взаимодействия элементов, которые в целом зависят от особенностей парциальных систем, реализуются в сочетаниях различных видов поступательных и вращательных движений. Вопросы динамических взаимодействий рас-

сматривались в ряде работ отечественных и зарубежных авторов [11–13].

Вместе с тем в свободных движениях механических колебательных систем имеется ряд интересных форм взаимодействий элементов, которые в определенном смысле еще не получили должного внимания, что связано, в частности, с возможностью проявления движений в некоторых формах, отражающих различные виды фазовых соотношений взаимных движений по координатам инерционных элементов систем.

В предлагаемой статье рассматриваются особенности взаимодействия парциальных систем при различном выборе систем координат и возможные формы совместных движений в механических колебательных системах.

**Общие положения. Постановка задачи исследования.** Рассматривается линейная механическая колебательная система с двумя инерционными элементами  $m_1$  и  $m_2$ , образующими механическую цепь путем последовательных соединений упругих элементов  $k_1, k_2, k_3$  (рис. 1).

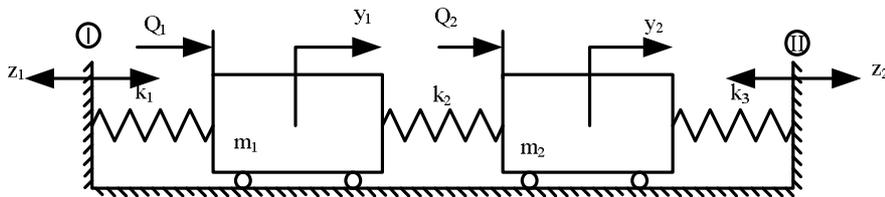


Рис. 1. Расчетная схема линейной механической колебательной системы с двумя степенями свободы

Система расположена горизонтально таким образом, что реакции связи между элементами системы и опорными поверхностями I, II (рис. 1) в статическом положении равны нулю. Силы сопротивления в данном случае не учитываются. Внешние возмущения могут быть силовыми  $Q_1, Q_2$  или кинематическими воздействиями  $z_1, z_2$ , которые принимаются гармоническими. В ходе исследований будут конкретизироваться отдельно условия внешних возмущений.

Система дифференциальных уравнений движения в соответствии с рис. 1 может быть представлена в виде:

$$m_1 \ddot{y}_1 + y_1(k_1 + k_2) - k_2 y_2 = k_1 z_1 + Q_1, \quad (1)$$

$$m_2 \ddot{y}_2 + y_2(k_2 + k_3) - k_2 y_1 = k_3 z_2 + Q_2. \quad (2)$$

После преобразований Лапласа (1), (2) при начальных нулевых условиях принимают вид:

$$\bar{y}_1(m_1 p^2 + k_1 + k_2) - k_2 \bar{y}_2 = k_1 \bar{z}_1 + \bar{Q}_1, \quad (3)$$

$$\bar{y}_2(m_2 p^2 + k_2 + k_3) - k_2 \bar{y}_1 = k_3 \bar{z}_2 + \bar{Q}_2, \quad (4)$$

где знак  $(-)$  над  $\bar{y}_1, \bar{y}_2$  и др. соответствует изображению по Лапласу ( $p = j \cdot \omega$ ,  $j = \sqrt{-1}$  — комплексная переменная [9; 10]). Движение системы (рис. 1) рассматривается в координатах, связанных с неподвижным базисом. Уравнения (3), (4) образуют структурную математическую модель, как показано на рис. 2 а–г, где динамические взаимодействия отображаются структурной схемой эквивалентной в динамическом отношении системе автоматического управления. Исходная

структурная схема (рис. 2 а) может быть преобразована с возможностями выделения форм, удобных для решения определенных задач. Подробности таких преобразований можно найти в [9; 10].

Преобразование структурной схемы на рис. 2 а к различным формам, приведенным на рис. 2 б–г, дают возможности определять динамические реакции, возникающие в точках соединения упругих и инерционных элементов между собой, а также в соединениях с опорными поверхностями [14].

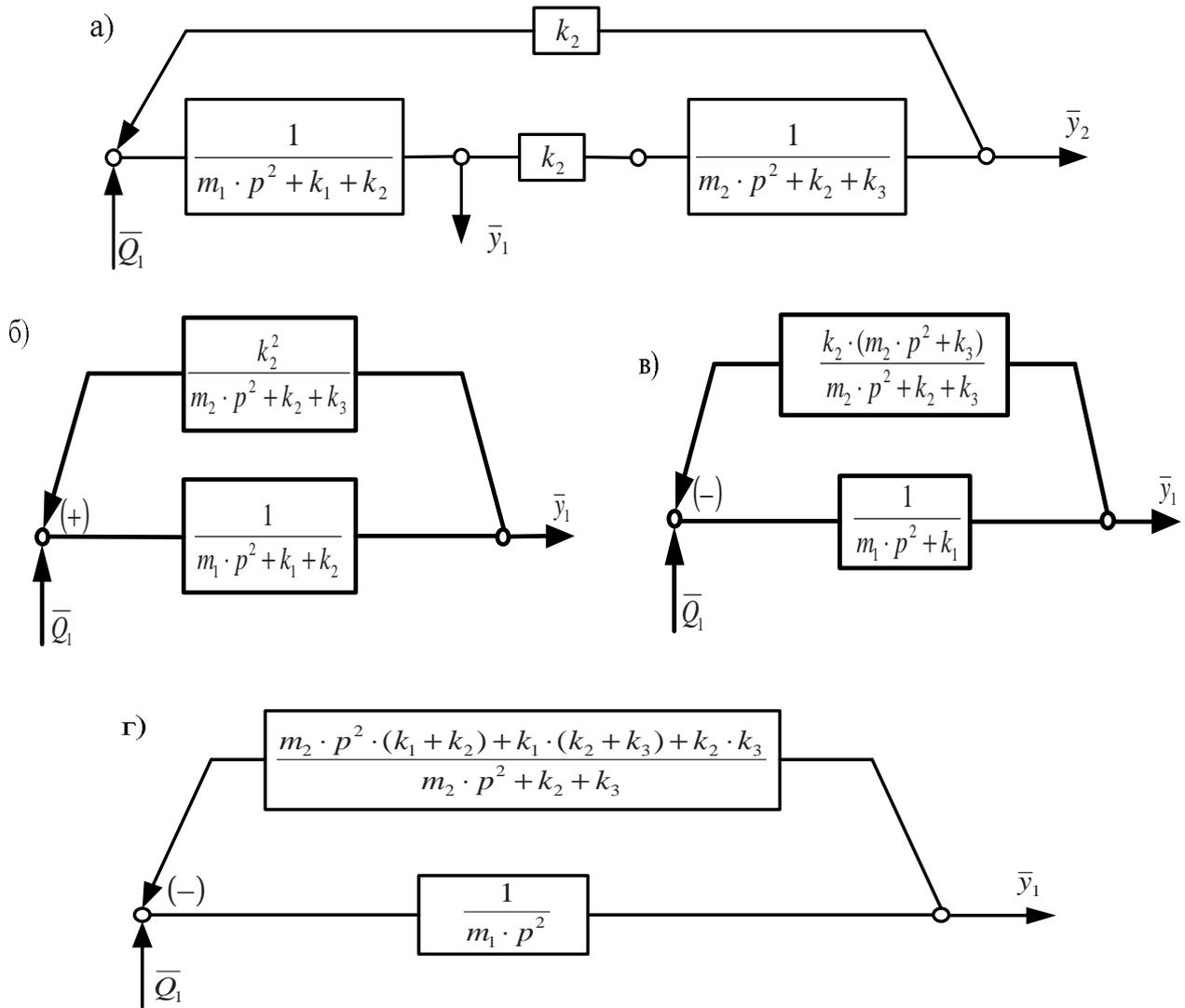
Задача исследования заключается в изучении особенностей динамических взаимодействий между элементами систем при выборе различных систем координат и оценке возникающих при этом отношений между координатами движения инерционных элементов, а также особенностей взаимодействия элементов при свободных движениях.

**Особенности движения системы в различных системах координат.** Введем систему координат  $y_2 - y_1 = y_0$  и  $y_1$ . В этом случае  $y_2 = y_0 + y_1$ . Используя аналогичные п. I подходы, получим систему дифференциальных уравнений в операторном виде при силовом возмущении по координате  $\bar{y}_1$ :

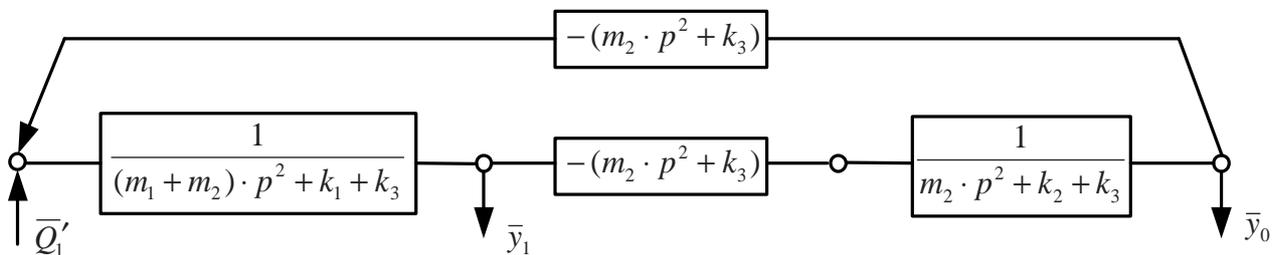
$$\bar{y}_1(k_1 + k_3 + (m_1 + m_2)p^2) + (k_3 + m_2 p^2)\bar{y}_0 = \bar{Q}_1', \quad (5)$$

$$\bar{y}_0(k_2 + k_3 + m_2 p^2) + (k_3 + m_2 p^2)\bar{y}_1 = 0. \quad (6)$$

Системе уравнений (5), (6) соответствует структурная схема (рис. 3).



**Рис. 2.** Варианты представления структурной математической модели исходной системы (рис. 1): а — структурная схема системы при входном воздействии  $\bar{Q}_1$  ( $\bar{Q}_2 = 0, \bar{z}_1 = 0, \bar{z}_2 = 0$ ); б — структурная схема при исключении координаты  $\bar{y}_2$ ; в — структурная схема с выделением парциальной системы  $m_1 \cdot p^2, k_1$ ; г — структурная схема с выделением массоинерционного элемента  $m_1$  как объекта вибрационной защиты (или объекта управления)



**Рис. 3.** Структурная схема исходной системы (рис. 1) в системе координат  $y_1, y_0$

При построении математической модели (5), (6) принимается во внимание, что работа обобщенных сил в новой системе координат при виртуальных перемещениях координат в обеих системах координат должна

быть равна [15]. В данном случае  $\bar{Q}'_1 = \bar{Q}_1$  (при  $\bar{Q}_2 = 0, \bar{z}_1 = 0, \bar{z}_2 = 0$ ). Структурная схема на рис. 3 может быть преобразована к виду, как показано на рис. 4.

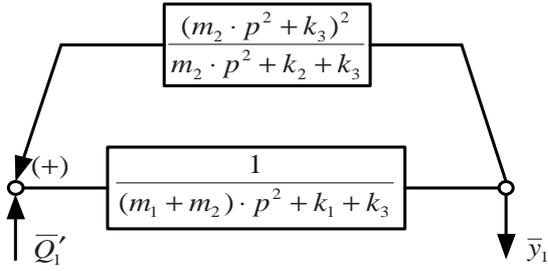


Рис. 4. Преобразованная структурная схема с исключением координаты  $\bar{y}_0$

Отметим, что при построении математической модели исходной системы (рис. 1) в системе координат  $\bar{y}_1$  и  $\bar{y}_0$  произошли изменения в представлениях о парциальных системах.

**Особенности системы координат  $\bar{y}_1$  и  $\bar{y}_2$ .** Передаточные функции системы при  $\bar{Q}_1 \neq 0$  ( $\bar{Q}_2 = 0$ ,  $\bar{z}_1 = 0$ ,  $\bar{z}_2 = 0$ ) имеют вид:

$$W_1(p) = \frac{\bar{y}_1}{\bar{Q}_1} = \frac{m_2 \cdot p^2 + k_2 + k_3}{A_0}, \quad (7)$$

$$W_2(p) = \frac{\bar{y}_2}{\bar{Q}_1} = \frac{k_2}{A_0}, \quad (8)$$

$$\text{где } A_0 = (m_1 \cdot p^2 + k_1 + k_2) \cdot (m_2 \cdot p^2 + k_2 + k_3) - k_2^2. \quad (9)$$

Выражение (9) определяет характеристическое частотное уравнение системы. В этом случае могут быть найдены парциальные частоты:

$$n_1^2 = \frac{k_1 + k_2}{m_1}, \quad (10)$$

$$n_2^2 = \frac{k_2 + k_3}{m_2}. \quad (11)$$

Частоты собственных колебаний в данном случае определяются по известным формулам (9):

$$\omega_{1,2sob}^2 = \frac{(k_1 + k_2)m_2 + (k_2 + k_3)m_1 \pm \frac{1}{2m_1m_2} \times \sqrt{[m_1(k_2 + k_3) + m_2(k_1 + k_2)]^2 - 4m_1m_2[(k_1 + k_2)(k_2 + k_3) - k_2^2]}}{2m_1m_2}. \quad (12)$$

Выражение (12) также может быть записано в виде:

$$\omega_{1,2sob}^2 = \frac{(k_1 + k_2)m_2 + (k_2 + k_3)m_1 \pm \frac{1}{2m_1m_2} \times \sqrt{[m_1(k_2 + k_3) - m_2(k_1 + k_2)]^2 + 4m_1m_2k_2^2}}{2m_1m_2}$$

или:

$$\omega_{1,2sob}^2 = \frac{n_1^2 + n_2^2}{2} \pm \frac{1}{2m_1m_2} \times \sqrt{[m_1m_2(n_2^2 - n_1^2)]^2 + 4m_1m_2k_2^2}. \quad (13)$$

Из (13) следует, в частности, что соотношения между частотами собственных колебаний зависят от параметров системы. При этом парциальные системы (см. структурную схему на рис. 2 а) имеют упругую связь, определяемую жесткостью  $k_2$  и значениями  $m_1$  и  $m_2$ . Более подробно вопросы взаимодействия между парциальными системами, рассматриваемые через понятия о связности колебаний, обсуждаются в [11; 13], где вводится ряд условий:

$$\omega_1^2 < n_1 < n_2 < \omega_2^2, \quad (14)$$

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = n_1^2 + n_2^2, \quad (15)$$

$$\omega_2^2 - \omega_1^2 = \frac{1}{m_1 \cdot m_2} \cdot \sqrt{[m_1 \cdot m_2 \cdot (n_2^2 - n_1^2)]^2 + 4 \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot k_2^2}. \quad (16)$$

2. В координатах  $\bar{y}_1$  и  $\bar{y}_0$  парциальные системы принимают другой вид, что приводит к иным соотношениям и значениям парциальных частот. Из структурной схемы на рис. 3 следует, что:

$$n_{10}^2 = \frac{k_1 + k_3}{m_1 + m_2}, \quad (17)$$

$$n_{20}^2 = \frac{k_2 + k_3}{m_2}. \quad (18)$$

В системе координат  $y_1, y_0$  частотное характеристическое уравнение (9) принимает вид

$$A'_0 = [(m_1 + m_2)p^2 + k_1 + k_3] \times (m_2 p^2 + k_2 + k_3) - (m_2 p^2 + k_3)^2. \quad (19)$$

Сопоставление двух систем координат показывает, что выбор обобщенных координат  $y_0 = y_2 - y_1$  соответствует выделению такой формы движения массоинерционных элементов  $m_1$  и  $m_2$ , при которой осуществляется движение, близкое к форме собственных колебаний на низкой частоте. В этом случае оба элемента перемещаются в фазе, то есть реализуется вполне определенная форма синхронизации движения (движение в одной фазе).

**Особенности синхронного движения массоинерционных элементов при силовом возмущении.** Используем выражения (7), (8) и найдем отношение координат  $\bar{y}_2$  и  $\bar{y}_1$  в форме:

$$W_{12}(p) = \frac{y_2}{y_1} = \frac{k_2}{m_2 \cdot p^2 + k_2 + k_3}. \quad (20)$$

При действии внешнего возмущения  $\bar{Q}_2 \neq 0$  ( $\bar{Q}_1 = 0$ ,  $\bar{z}_1 = 0$ ,  $\bar{z}_2 = 0$ ) передаточные функции имеют вид:

$$W'_1(p) = \frac{\bar{y}_1}{\bar{Q}_2} = \frac{k_2}{A_0}, \quad (21)$$

$$W'_2(p) = \frac{\bar{y}_2}{\bar{Q}_2} = \frac{m_1 \cdot p^2 + k_1 + k_2}{A_0}, \quad (22)$$

тогда:

$$W'_{12}(p) = \frac{m_1 \cdot p^2 + k_1 + k_2}{k_2}. \quad (23)$$

Таким образом, отношение движений по координатам  $y_1$  и  $y_2$  зависит от таких обстоятельств, как место приложения внешнего возмущения.

В рассматриваемых случаях принимается, что в системе имеется одно внешнее возмущение (силового или кинематического вида) и, соответственно, формируется один выходной сигнал. В линейных системах при действии нескольких внешних воздействий может применяться принцип суперпозиции. Обычно внешние воздействия принимаются одночастотными, иначе при сложении гармонических сигналов будут возникать эффекты нестационарности. Отметим, что кинематические внешние воздействия  $z_1(t)$  и  $z_2(t)$  со стороны опорных поверхностей могут приводиться к эквивалентным возмущениям силового типа [17]. Вместе с тем, в линейных системах возможны также эквивалентные переносы сил из одной точки приложения в другую, при условии, что силы должны быть приложены к массоинерционным элементам непосредственно, что показано, в частности, в работах [18; 19].

Задача совместного действия двух внешних возмущений может быть упрощена при наличии между внешними воздействиями некоторой функциональной связи ( $Q_1 = Q$ ,  $Q_2 = \alpha \cdot Q$ , где  $\alpha$  является положительной или отрицательной величиной). Такие подходы представлены, в частности, в [20; 21]. При совпадении частот кинематического и силового возмущений также возможны упрощения вышеупомянутого типа.

Вышесказанное позволяет ввести в рассмотрение случаи совместного действия нескольких сил в форме их приведения к некоторому эквивалентному возмущению, одновременно формирующему несколько совместных входных сигналов, определяющих один сигнал на выходе системы.

Возможным приложением таких представлений о действии нескольких сил в задачах вибрационной защиты является введение дополнительной силы, действующей в противофазе, что может создавать эффекты, соответствующие динамическому гашению колебаний [22; 23].

**Динамические свойства отношения координат движения  $y_2$  и  $y_1$ .** Из выражения (20) следует, что  $W_{12}(p)$  имеет ряд характерных значений, как показано на рис. 5. Полагая  $p = j \cdot \omega$ , получим:

$$W_{12}(\omega) = \frac{y_2}{y_1} = \frac{k_2}{-m_2 \cdot \omega^2 + k_2 + k_3}. \quad (24)$$

На графиках зависимостей амплитуд  $y_1(\omega)$  и  $y_2(\omega)$  видно, что система дважды проходит через резонансы (при частотах  $\omega_1^2 = \frac{1,76k}{m}$  и  $\omega_2^2 = \frac{6,24k}{m}$ ), полученных расчетным путем при следующих значениях парамет-

ров:  $k_1 = k$ ,  $k_2 = 2k$ ,  $k_3 = 3k$  и  $m_1 = m_2 = m$ . По оси абсцисс откладываются квадраты характерных частот: парциальные частоты  $n_1^2 = \frac{3k}{m}$ ,  $n_2^2 = \frac{5k}{m}$ ; частоты соб-

ственных колебаний соответственно равны  $\omega_{1,sob}^2 = \frac{1,76k}{m}$ ,  $\omega_{2,sob}^2 = \frac{6,24k}{m}$ . Динамическое гашение

колебаний происходит при частоте  $\omega_{din}^2 = \frac{5k}{m}$ . На час-

тоте динамического гашения отношение амплитуд  $W_{12}(\omega)$  стремится к бесконечности. Что касается амплитуды колебаний по координате  $y_1$ , то она стремится к нулю, при этом амплитуда колебаний по координате  $y_2$  имеет значение  $y_2 = Q_{10} \cdot k_2$ , где  $Q_{10}$  — максимальное значение внешней силы  $Q_1$ , приложенной к элементу массой  $m_1$ .

На графиках 1, 2 (рис. 5) имеются характерные точки, соответствующие отношению амплитуд колебаний  $W_{12}(\omega)$ , равных единице, когда  $\omega^2 = \frac{3k}{m}$ , а также

$W_{12}(\omega) = -1$  при частоте  $\omega^2 = \frac{7k}{m}$ . Отметим, что частота собственных колебаний  $\omega_1^2$  лежит левее парциальной частоты  $n_1^2$ , однако отношение амплитуд колеба-

ний  $\frac{y_2}{y_1}$  при резонансе определяется графиком 3 (рис. 5), и это отношение амплитуд будет меньше единицы. До частоты динамического гашения  $\omega_{din}^2 = \frac{5k}{m}$

доминирует синфазное движение, когда элементы  $m_1$  и  $m_2$  перемещаются в одном направлении, то есть в фазе, хотя амплитуды колебаний меняются от значений

$\frac{k_2}{k_2 + k_3}$  при  $p \rightarrow 0$  до  $\infty$  при  $p \rightarrow \frac{5k}{m}$ . Частота динамического гашения, при которой  $y_1$  останавливается при переходе граничного значения  $\frac{5k}{m}$ , приводит к возник-

новению новой формы движения массоинерционных элементов:  $m_1$  и  $m_2$  взаимодействуют в противофазе, как это отражено на графике 3 (рис. 5).

Отметим, что границами для частот собственных колебаний являются парциальные частоты  $n_1^2 = \frac{3k}{m}$  и

$n_2^2 = \frac{5k}{m}$ . Что касается частот собственных колебаний, то они отстают от нижних и верхних границ на величину  $\frac{1,24k}{m}$ , поскольку:

$$\omega_1^2 = \frac{1,76k}{m} = \frac{3k}{m} - \frac{1,24k}{m},$$

$$\omega_2^2 = \frac{6,24k}{m} = \frac{5k}{m} + \frac{1,24k}{m}.$$

Отметим, что в системе координат  $y_1, y_2$  парциальные системы совершают движения одного вида (поступательные).

**Оценка динамических взаимодействий при выборе системы координат  $y_0 = y_2 - y_1$  и  $y_1$ .** Запишем выражение для отношения координат движения:

$$W_{12}''(\omega) = \frac{\bar{y}_2 - \bar{y}_1}{\bar{y}_1} = \frac{k_2 - m_2 p^2 - k_2 - k_3}{m_2 \cdot p^2 + k_2 + k_3} = -\frac{m_2 \cdot p^2 + k_3}{m_2 \cdot p^2 + k_2 + k_3}. \quad (25)$$

Найдем передаточные функции системы:

$$W_3(\omega) = \frac{\bar{y}_1}{Q_1} = \frac{m_2 \cdot p^2 + k_2 + k_3}{A'_0}, \quad (26)$$

$$W_4(\omega) = \frac{\bar{y}_2}{Q_1} = -\frac{m_2 \cdot p^2 + k_3}{A'_0}. \quad (27)$$

На рис. 6 приведены амплитудные частотные характеристики и графики отношения амплитуд. Определим парциальные частоты для системы, структурная схема которой приведена на рис. 4 (сохранив данные для расчета):

$$n_{10}^2 = \frac{k_1 + k_3}{m_1 + m_2} = \frac{4k}{2m} = \frac{2k}{m}, \quad (28)$$

$$n_{10}^2 = \frac{k_2 + k_3}{m_2} = \frac{5k}{m}. \quad (29)$$

Отметим, что при выборе системы координат  $y_1$  и  $y_2$  парциальная частота  $n_1^2 = \frac{k_1 + k_2}{m_1} = \frac{3k}{m}$ , а при выборе координат  $y_0$  и  $y_1$  соответственно  $n_{10}^2 = \frac{2k}{m}$ , при этом частота собственных колебаний соответствует  $\omega_1^2 = \frac{1,76k}{m}$ . Таким образом, выбрав систему координат соответствующим образом, то есть выделив: доминантную форму колебаний, которая соответствует первой форме колебаний (это можно назвать первой модой), можно получить достаточно близкое значение границы по отношению к нижней частоте собственных колебаний. Соотношение по собственной частоте  $\omega_2^2$  и парциальной частотой  $n_{20}^2$  осталось таким же, как и в системе координат  $y_1$  и  $y_2$ . Однако соотношения между границами  $\omega_1^2 < n_{10}^2 < n_{20}^2 < \omega_2^2$  изменились и перестали быть симметричными.

Отметим характерные точки на графике зависимостей  $\bar{y}_0(\omega)$ ,  $\bar{y}_1(\omega)$  и  $W_{12}(\omega) = \frac{\bar{y}_0}{\bar{y}_1}$ . Так как  $n_{10}^2 = \frac{2k}{m}$ , а  $n_{20}^2 = \frac{5k}{m}$ , то можно отметить, что интервал частотных соотношений принимает вид:

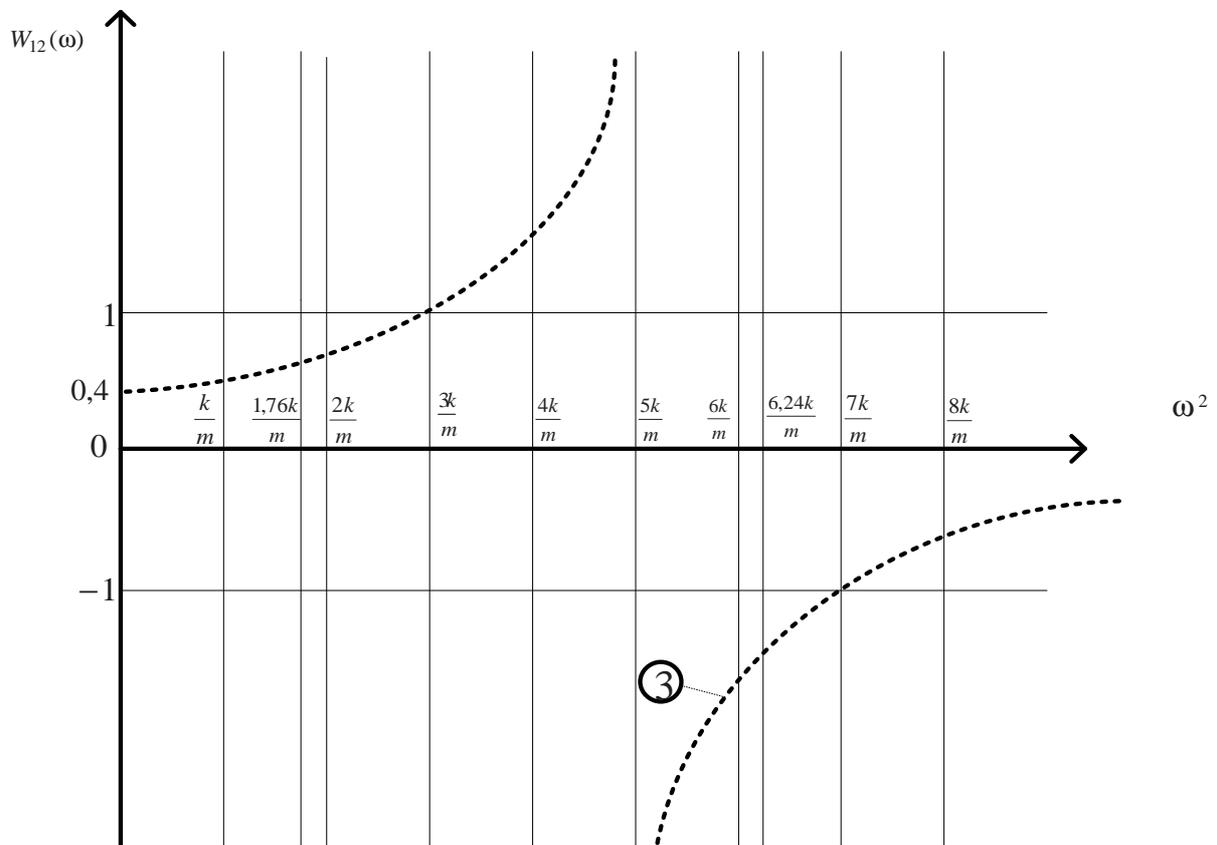
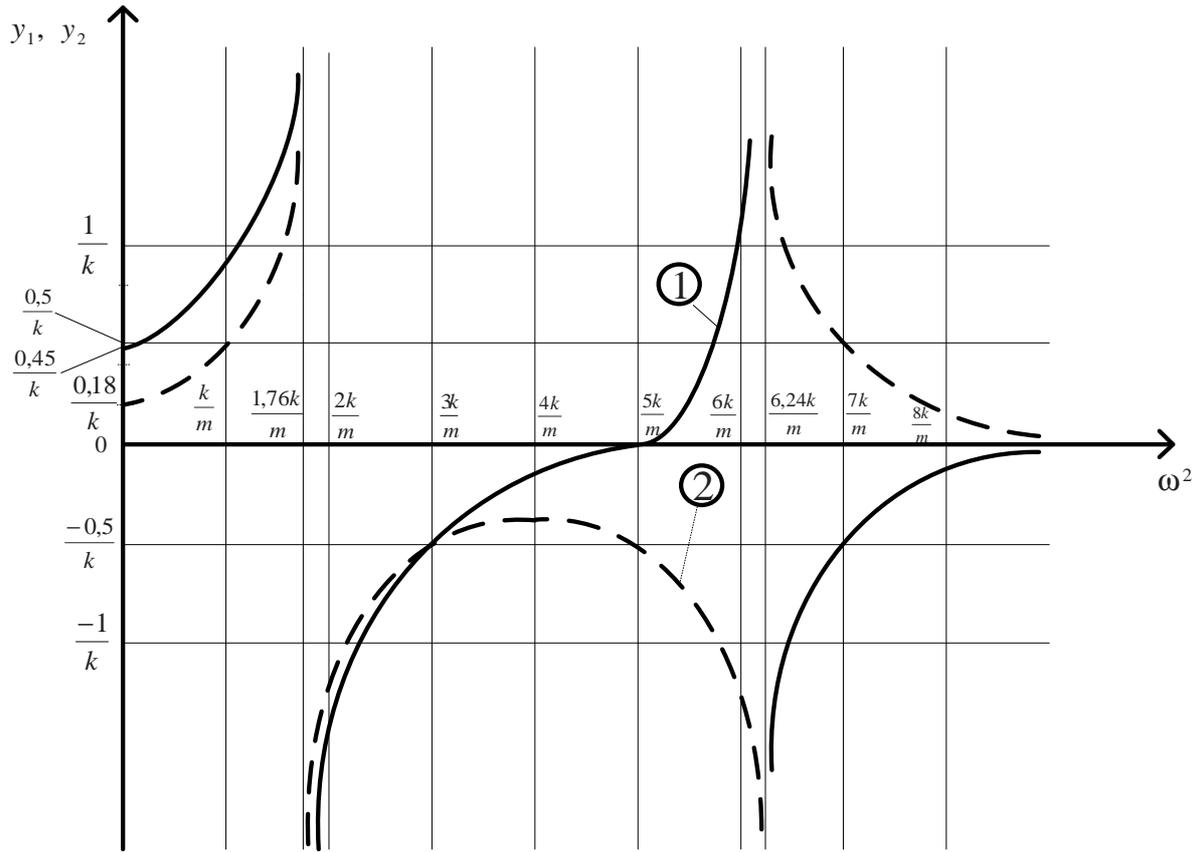
$$\omega_1^2 < \frac{2k}{m} < \frac{5k}{m} < \omega_2^2. \quad (30)$$

При этом разность частоты собственных колебаний  $\omega_1^2 = \frac{1,76k}{m}$  по сравнению с парциальной частотой  $n_{10}^2 = \frac{2k}{m}$  составляет  $\frac{0,24k}{m}$ , тогда как в системе координат  $y_1, y_2$  эта величина имеет значение  $\frac{1,24k}{m}$ . Что касается разницы между  $n_{20}^2 = \frac{5k}{m}$  и второй частотой собственных колебаний  $\omega_2^2 = \frac{6,24k}{m}$ , то она одинакова в системах координат  $y_1, y_2$  и  $y_1, y_0$ .

Таким образом, изменения системы координат, если при этом находят отражение особенности первой моды (или формы колебаний), дают положительный результат. Для графика  $W_{12}(\omega)$  в частотном диапазоне от 0 до  $\frac{3k}{m}$  разность  $y_0 = y_2 - y_1$  и  $y_1$  имеет отрицательное значение. Это значит, что массоинерционный элемент  $m_2$  движется с меньшей амплитудой, чем массоинерционный элемент  $m_1$ . Это отношение сохраняется при частотах возмущения меньше  $\frac{3k}{m}$ . Если частота возмущения равна  $\frac{3k}{m}$ , то  $y_0 = 0$ , что соответствует выполнению условия  $y_2 = y_1$ . Отношение амплитуд  $y_0$  и  $y_1$  будет равно нулю, что также соответствует пересечению графика  $y_0(\omega)$  и  $y_1(\omega)$  (кривые 1 и 2 на рис. 6). Отметим, что при прохождении частоты собственных колебаний  $\omega_1^2 = \frac{1,76k}{m}$  соотношение амплитуд  $y_0$  и  $y_1$ , несмотря на резонанс, не изменяется, хотя значения амплитуд возрастают до бесконечно больших размеров.

После прохождения резонанса в движениях по координатам  $y_0$  и  $y_1$  продолжает развиваться таким образом, что отношение  $y_0$  к  $y_1$  стремится к бесконечности при частоте возмущения, равной  $\frac{5k}{m}$ . В данном случае  $y_2$  стремится к минимальному отклонению; на рис. 5 это соответствует минимуму графика  $y_2(\omega)$  при частоте  $\frac{5k}{m}$ . В этой ситуации происходит динамическое гашение колебаний по координате  $y_1$ , а ее значение становится нулевым.

Координата  $y_0$ , таким образом, проявляет высокую чувствительность к частоте динамического гашения  $\frac{5k}{m}$ , и разность  $y_0 = y_2 - y_1$  может изменять свой знак при малых колебаниях частоты относительно частоты динамического гашения.



**Рис. 5.** Схема расположения частотных зон отношений амплитуд колебаний по координатам  $y_2$ ,  $y_1$  при силовом возмущении  $Q_1$ , приложенном к массоинерционному элементу  $m_1$ : 1 — график амплитудно-частотной зависимости  $y_1(\omega)$ ; 2 — график амплитудно-частотной зависимости  $y_2(\omega)$ ; 3 — график амплитудно-частотной зависимости отношения  $y_2$  и  $y_1$  от частоты  $W_{12}(\omega)$

При дальнейшем увеличении частоты возмущения  $y_0 = y_2 - y_1$  становится отрицательным, движение по координатам  $y_2$  и  $y_1$  будет происходить в разные стороны, но отношение  $y_0$  к  $y_1$  будет стремиться к значению  $-1$ , что показано на рис. 6 (кривая 3).

Движение по координатам  $y_0$  и  $y_1$  при резонансной частоте  $\frac{6,24k}{m}$  сохраняет отношение амплитуд колебаний

$\frac{y_0}{y_1}$  в соответствии с графиком зависимости  $W_{12}(\omega)$

(кривая 3, рис. 6). Что касается разницы между значением второй частоты собственных колебаний

$\omega_2^2 = \frac{6,24k}{m}$ , то разница с ближайшей парциальной частотой

$n_{20}^2 = \frac{5k}{m}$  составляет  $\frac{1,24k}{m}$ , как и в системе координат  $y_1, y_2$ .

Можно отметить, что для второй моды (или второй формы колебаний) выбор системы координат  $y_0 = y_2 - y_1$  и  $y_1$  не является рациональным.

Вместе с тем очевидно, что выбор систем координат меняет позиции соотношений между парциальными частотами и частотами собственных колебаний.

**VI. Система координат  $y_{00} = y_1 + y_2$  и  $y_1$ .** Введение новой системы координат учитывает особенности относительных движений между элементами при повышенных частотах внешних воздействий. Запишем выражения для кинетической и потенциальной энергий, учитывая, что  $y_{00} = y_1 + y_2$ , а  $y_2 = y_{00} - y_1$ :

$$T = \frac{1}{2} \cdot m_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}_2^2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{y}_{00} - \dot{y}_1)^2 \quad (31)$$

$$\begin{aligned}
 \Pi &= \frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot y_1^2 + \frac{1}{2} \cdot k_2 \cdot (y_{00} - y_1 - y_1)^2 + \\
 &+ \frac{1}{2} \cdot k_3 \cdot (y_{00} - y_1)^2.
 \end{aligned} \quad (32)$$

Сделаем ряд вспомогательных выкладок и запишем уравнения движения системы при внешнем воздействии  $Q_1 \neq 0$ :

$$\begin{aligned}
 \ddot{y}_1(m_1 + m_2) + y_1(k_1 + 4k_2 + k_3) - m_2 \ddot{y}_{00} - \\
 - y_{00}(2k_2 + k_3) = Q_1,
 \end{aligned} \quad (33)$$

$$\ddot{y}_{00} m_2 + y_{00}(k_2 + k_3) - \ddot{y}_1 m_2 - y_1(2k_2 + k_3) = 0. \quad (34)$$

С учетом преобразований Лапласа уравнения (37), (38) можно записать:

$$\begin{aligned}
 \bar{y}_1 \cdot [(m_1 + m_2) \cdot p^2 + k_1 + 4 \cdot k_2 + k_3] - \\
 - \bar{y}_{00} \cdot (m_2 \cdot p^2 + 2 \cdot k_2 + k_3) = \bar{Q}_1,
 \end{aligned} \quad (35)$$

$$\bar{y}_{00}(m_2 p^2 + k_2 + k_3) - \bar{y}_1(m_2 p^2 + 2k_2 + k_3) = 0. \quad (36)$$

Структурная схема системы на основании (39), (40) может быть представлена в виде рис. 7.

Определим парциальные частоты:

$$n_{00}^2 = \frac{k_2 + k_3}{m} = \frac{5k}{m}, \quad (37)$$

$$n_{100}^2 = \frac{k_1 + 4 \cdot k_2 + k_3}{m_1 + m_2} = \frac{6k}{m}. \quad (38)$$

При определенных ранее частотах собственных колебаний  $\omega_1^2$  и  $\omega_2^2$  частотные соотношения можно представить в виде:

$$\frac{1,76k}{m} < \frac{5k}{m} < \frac{6k}{m} < \frac{6,24k}{m}. \quad (39)$$

Отметим, что в данном случае совпадение по второй моде (или второй форме колебаний) достаточно высокое и составляет  $\frac{0,24k}{m}$ .

Такое совпадение наблюдается по частоте собственных колебаний  $\omega_1^2$  в системе координат  $y_{00}$  и  $y_1$ .

Запишем передаточные функции системы:

$$W_5(p) = \frac{\bar{y}_1}{Q_1} = \frac{m_2 \cdot p^2 + k_2 + k_3}{A_0''}, \quad (40)$$

$$W_6(p) = \frac{\bar{y}_{00}}{Q_1} = \frac{-(m_2 \cdot p^2 + 2 \cdot k_2 + k_3)}{A_0''}, \quad (41)$$

где характеристическое уравнение  $A_0''$  принимает вид:

$$\begin{aligned}
 A_0'' &= \\
 &= [(m_1 + m_2)p^2 + k_1 + 4k_2 + k_3](m_2 p^2 + k_2 + k_3) - \\
 &- (m_2 p^2 + 2k_2 + k_3)^2.
 \end{aligned} \quad (42)$$

Характерной особенностью для системы координат является наличие режима (или частоты), когда между парциальными системами нарушается связность:

$$\omega^2 = \frac{2k_2 + k_3}{m} = \frac{7k}{m}. \quad (43)$$

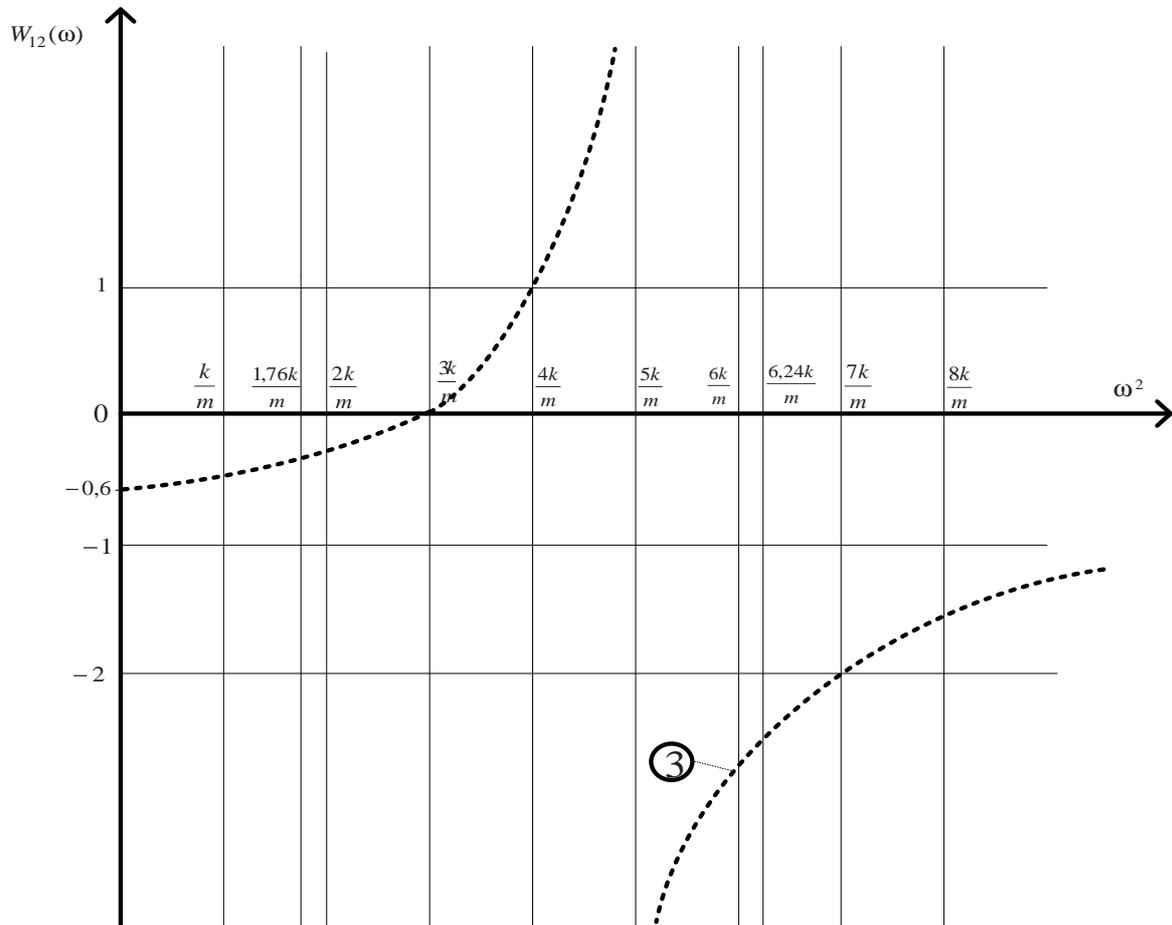
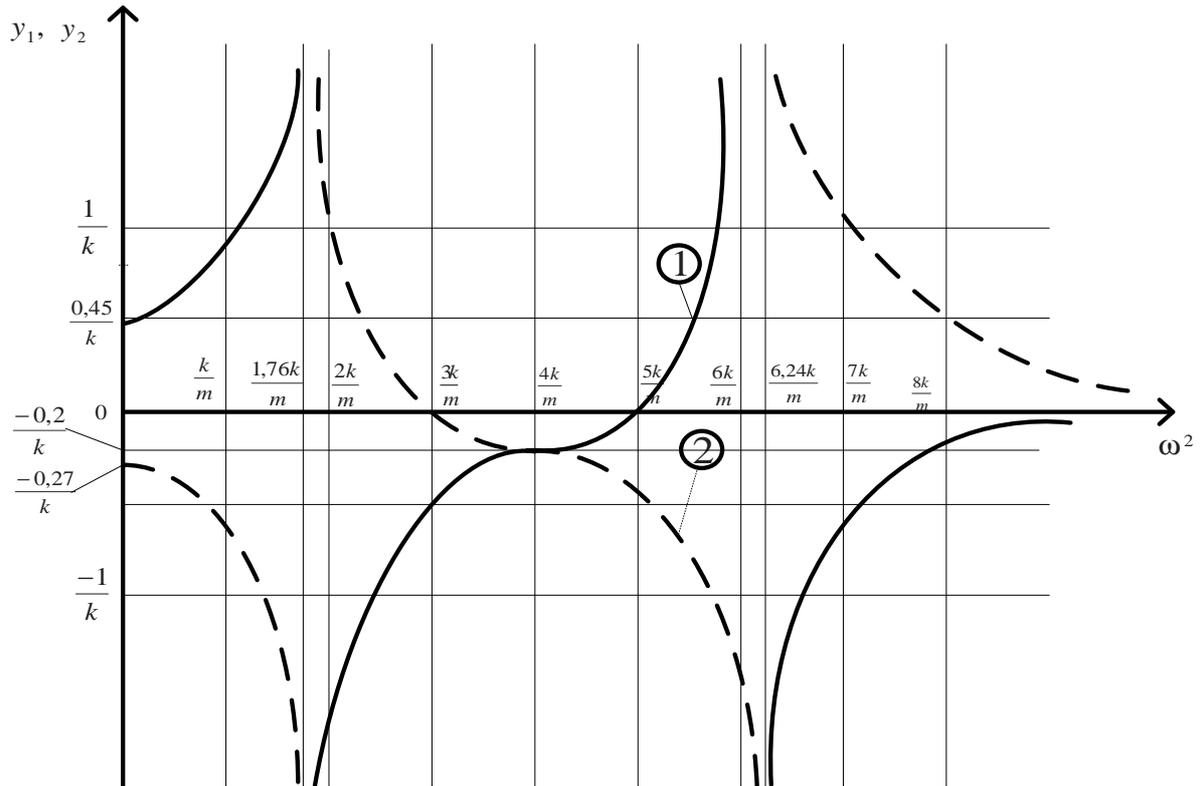
Отметим, что для системы координат  $y_0$  и  $y_1$  аналогичный случай появляется при  $\omega^2 = \frac{k_3}{m} = \frac{3k}{m}$ .

Запишем выражение для отношения координат движения:

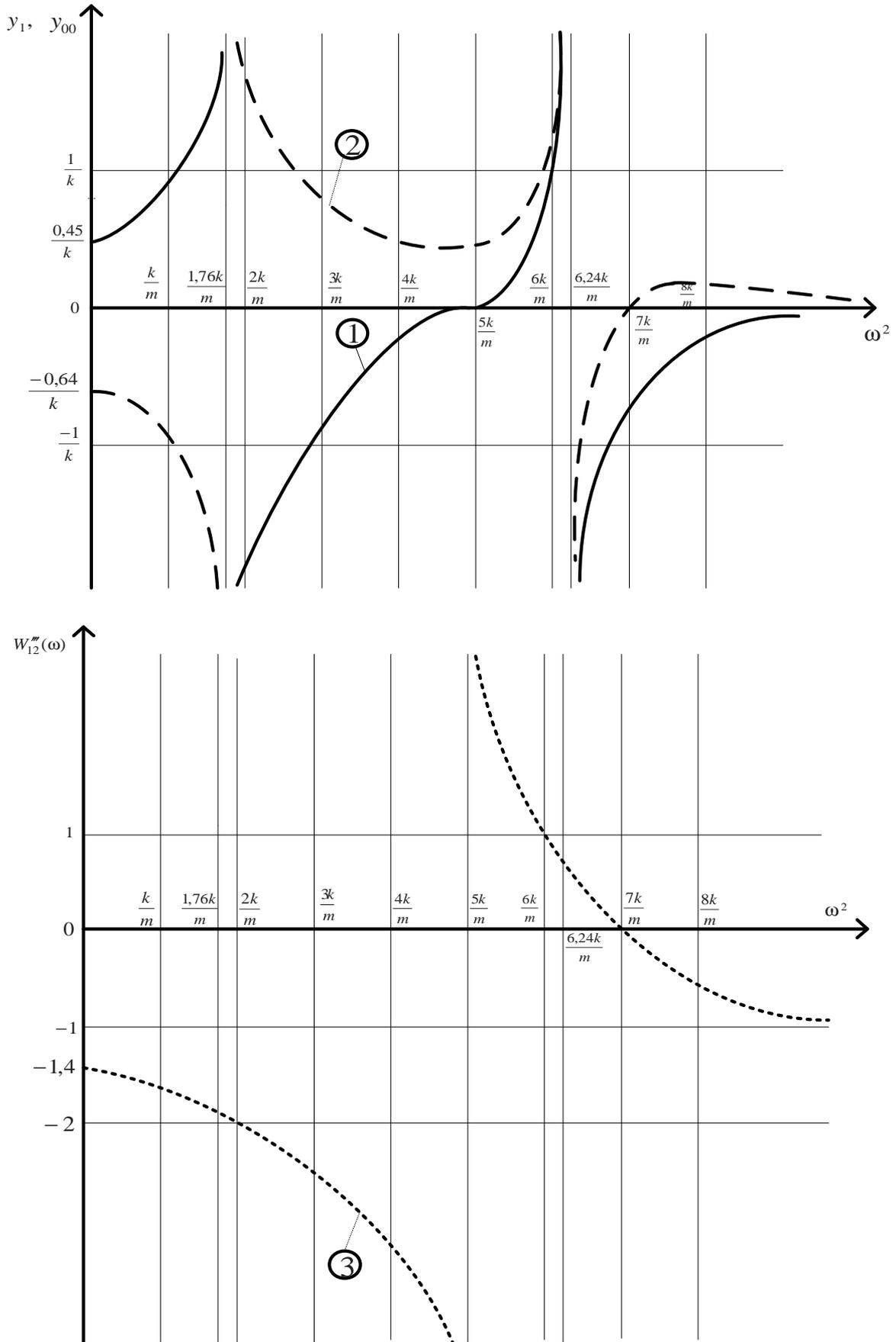
Запишем выражение для отношения координат движения:

$$W_{12}''(\omega) = \frac{\bar{y}_{00}}{\bar{y}_1} = -\frac{m_2 \cdot p^2 + 2 \cdot k_2 + k_3}{m_2 \cdot p^2 + k_2 + k_3}. \quad (44)$$

В обоих случаях парциальные системы имеют упруго-инерционные межпарциальные связи. Развязка парциальных систем создает возможности для реализации специфических режимов (что будет рассмотрено далее). Отметим, что в обычной системе координат  $y_1, y_2$  межпарциальная связь не нарушается, а связность колебаний обеспечивается через упругий элемент  $k_2$ .



**Рис. 6.** Структурная схема исходной системы (рис. 1) в системе координат  $y_0$  и  $y_1$  при силовом возмущении  $Q_1$ , приложенном к массоинерционному элементу  $m_1$ : 1 — график амплитудно-частотной зависимости  $y_1(\omega)$ ; 2 — график амплитудно-частотной зависимости  $y_0(\omega)$ ; 3 — график амплитудно-частотной зависимости отношения  $y_0$  и  $y_1$  от частоты  $W''(\omega)$



**Рис. 7.** Структурная схема исходной системы (рис. 1) в системе координат  $y_{00}$  и  $y_1$  при силовом возмущении  $Q_1$ , приложенном к массоинерционному элементу  $m_1$ : 1 — график амплитудно-частотной зависимости  $y_1(\omega)$ ; 2 — график амплитудно-частотной зависимости  $y_{00}(\omega)$ ; 3 — график амплитудно-частотной зависимости отношения  $y_{00}$  и  $y_1$  от частоты  $W''''_{12}(\omega)$

### Заключение

Формы движения механических колебательных систем воспринимаются через соотношение координат движения отдельных элементов. Выбор системы координат предопределяется особенностями постановок задач исследования и ориентируется на детализацию представлений об определенных режимах или особенностях движения элементов.

1. Предлагается метод оценки связанности движущих элементов механических колебательных систем с несколькими степенями свободы. Метод основан на использовании понятия о передаточной функции межпарциальных связей. Вводимая функция является одним из вариантов формирования структурных математических моделей в виде структурных схем эквивалентных в динамическом отношении систем автоматического управления.

2. Показано, что отношение координат отдельных точек системы (или ее элементов) зависит от частоты внешнего силового фактора и отражает возможности прохождения системы через несколько режимов динамического состояния, к которым можно отнести статическое положение системы (частота внешнего воздействия равна нулю); резонанс; динамическое гашение колебаний (разрыв второго рода при совпадении парциальной частоты с частотой внешнего воздействия) и стабилизацию отношений амплитуды при увеличении частот ( $\omega \rightarrow \infty$ ).

3. При частоте динамического гашения колебаний происходит изменение формы распределения амплитуд колебаний (по аналогии со свободными колебаниями происходит переход от одной формы главных колебаний к другой).

4. При прохождении частот внешней силы через резонанс плавность графика зависимости отношения амплитуд колебаний от частоты внешней силы не наблюдается, что позволяет отнести отношение амплитуд колебаний элементов при разных частотах к фундаментальным свойствам системы, определяющим особенности формирования связанных движений, отражающих возможности проявления в системах рычажных связей.

5. Выбор системы координат имеет существенное значение при оценке динамических возможностей системы. Показано, что не все системы координат отражают условия распределений и соотношений величин парциальных и собственных частот колебаний.

### Литература

1. Бакалов А.Н. Теория цепей. М.: Наука, 2006. 657 с.
2. Атабеков Г.И. Основы теории цепей. М.: Энергия, 1969. 427 с.
3. Гарднер М.Ф., Бэрнс Дж.Л. Переходные процессы в линейных системах с сосредоточенными постоянными. М.: Л.: ГИТТЛ, 1949. 528 с.
4. Дружинский И.А. Механические цепи. М.: Машиностроение, 1977. 238 с.

5. Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У. Теория колебаний в инженерном деле / под. ред. Э.И. Григोलюка; пер. с англ. Л.Г. Корнейчука. М.: Машиностроение, 1985. 472 с.
6. Цзе Ф.С., Морзе И.Е., Хинкл Р.Т. Механические колебания. М.: Машиностроение, 1966. 508 с.
7. Тонг Кин Н. Теория механических колебаний. М.: Гос. научно-техн. изд-во машиностроительной лит. 1963. 351 с.
8. Ден-Гартог Д.П. Механические колебания. М.: Физматгиз, 1960. 574 с.
9. Елисеев С.В., Резник Ю.И., Хоменко А.П. Мехатронные подходы в динамике механических колебательных систем. Новосибирск: Наука, 2011. 384 с.
10. Елисеев С.В., Артюнин А.И. Прикладная теория колебаний в задачах динамики линейных механических систем. Новосибирск: Наука, 2016. 459 с.
11. Мандельштам Л.И. Лекции по теории колебаний. М., Наука, 1972. 471 с.
12. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2000. 560 с.
13. Зоммерфельд А. Механика. М.: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2001. 368 с.
14. Ольховский И.И. Курс теоретической механики для физиков. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978. 575 с.
15. Хоменко А. П., Елисеев С. В., Большаков Р.С. Метод структурных преобразований и его приложения в задачах динамики виброзащитных систем. Определение реакций связей // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. Иркутск: ИрГУПС, 2014. № 1 (41). С. 8-23.
16. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики. В 2 т. Т. 2. Динамика. М.: Наука: Гл. ред. физ.-мат. лит., 1983. 640 с.
17. Хоменко А.П., Елисеев С.В. Возможности эквивалентных представлений механических систем с угловыми колебаниями твердых тел // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. Иркутск: ИрГУПС, 2014. № 2 (42). С. 8-15.
18. Елисеев С.В., Московских А.О., Большаков Р.С., Савченко А.А. Возможности интеграции методов теории цепей и теории автоматического управления в задачах динамики машин [Электронный ресурс] // technomag.edu.ru: Наука и образование: электрон. научно-техн. изд. 2012. № 6. URL. <http://technomag.edu.ru/doc/378699.html> (дата обращения: 10.06.2012).
19. Хоменко А.П., Елисеев С.В., Ермошенко Ю.В. Системный анализ и математическое моделирование в мехатронике виброзащитных систем. Иркутск: ИрГУПС, 2012. 288 с.
20. Елисеев С.В., П.А. Лончих П.В. Влияние управляющей силы в структуре внешних возмущений // Вестн. ИрГТУ. 2011. № 4 (51). С. 26-33.
21. Елисеев С.В., Кашуба В.Б., Большаков Р.С. Возможности влияния внешних воздействий на приведенную жесткость системы // Машиностроение и безопасность жизнедеятельности: сб. науч. ст. Муром, 2012. № 3 (13). С. 46-52.
22. Хомченко А.П., Елисеев С.В., Димов А.В., Драч М.А., Банина Н.В., Ермошенко Ю.В. Гаситель кругильных колебаний: пат. 64722 Рос. Федерация. № 2006101309/22; заявл. 17.01.06; опубл. 10.07.07, Бюл. № 19.
23. Банина Н.В. Структурные методы динамического синтеза колебательных механических систем с учетом особенностей физических реализаций обратных связей: дис. ... канд. техн. наук. Иркутск, 2006. 198 с.

## References

1. Bakalov A.N. Circuit theory. M.: Nauka, 2006. 657 p.
2. Atabekov G.I. Fundamentals of the theory of circuits. M.: Energiya, 1969. 427 p.
3. Gardner M.F., Berns Dzh.L. Transients in linear systems with lumped. M.; L.: GITTL, 1949. 528 p.
4. Druzhinskii I.A. Mechanical chain. M.: Mashinostroenie, 1977. 238 p.
5. Timoshenko S.P., Yang D.Kh., Uiver U. Theory of oscillations in engineering / pod. red. E.I. Grigolyuka; per. s angl. L.G. Korneichuka. M.: Mashinostroenie, 1985. 472 p.
6. Tsze F.S., Morze I.E., Khinkl R.T. Mechanical vibrations. M.: Mashinostroenie, 1966. 508 p.
7. Tong Kin N. The theory of mechanical vibrations. M.: Gos. nauchno-tekhn. izd-vo mashinostroitel'noi lit. 1963. 351 p.
8. Den-Gartog D.P. Mechanical vibrations. M.: Fizmatgiz, 1960. 574 p.
9. Eliseev S.V., Reznik Yu.I., Khomenko A.P. Mechatronic approaches in the dynamics of mechanical oscillation systems. Novosibirsk: Nauka, 2011. 384 p.
10. Eliseev S.V., Artyunin A.I. Applied theory of oscillations in problems of dynamics of linear mechanical systems. Novosibirsk: Nauka, 2016. 459 p.
11. Mandel'shtam L.I. Lectures on the calculus of variations. M.: Nauka, 1972. 471 p.
12. Rabinovich M.I., Trubetskov D.I. Introduction to the theory of oscillations and waves. M.: NITs Regul'yarnaya i khaoticheskaya dinamika, 2000. 560 p.
13. Zommerfel'd A. Mekhanika. M.: NITs Regul'yarnaya i khaoticheskaya dinamika, 2001. 368 p.
14. Ol'khovskii I.I. The course of theoretical mechanics for physicists. M.: Izd-vo Mosk. un-ta, 1978. 575 p.
15. Khomenko A.P., Eliseev S.V., Bol'shakov R.S. The method of structural transformation and its applications in problems of dynamics of vibroprotective systems. Determination of reactions of constraints // Modern technologies. System analysis. Modeling. Irkutsk: IrGUPS, 2014. № 1 (41). P. 8-23.
16. Loitsyanskii L.G., Lur'e A.I. The course of theoretical mechanics: In 2 vol. T. II. Dynamics. M.: Nauka: Gl. red. fiz.-mat. lit., 1983. 640 p.
17. Khomenko A.P., Eliseev S.V. Possible equivalent representations of mechanical systems with angular oscillation of solid bodies // Modern technologies. System analysis. Modeling. Irkutsk: IrGUPS, 2014. № 2 (42). P. 8-15.
18. Eliseev S.V., Moskovskikh A.O., Bol'shakov R.S., Savchenko A.A. The possibility of integration methods of the circuit theory and automatic control theory in problems of dynamics of machines [Elektronnyi resurs] // technomag.edu.ru: Nauka i obrazovanie: elektron. nauchno-tekhn. izd. 2012. № 6. URL. <http://technomag.edu.ru/doc/378699.html> (data obrashcheniya: 10.06.2012).
19. Khomenko A.P., Eliseev S.V., Ermoshenko Yu.V. System analysis and mathematical modeling in mechatronics vibration isolation systems. Irkutsk: IrGUPS, 2012. 288 p.
20. Eliseev S.V., Lontsikh P.A. The impact force in the structure of external disturbances // Bulletin of Irkutsk State Technical University. 2011. № 4 (51). P. 26-33.
21. Eliseev S.V., Kashuba V.B., Bol'shakov R.S. The possibility of external influences on the system stiffness // Mashinostroenie i bezopasnost' zhiznedeyatel'nosti: sb. nauch. st. Murom, 2012. № 3 (13). P. 46-52.
22. Khomchenko A.P., Eliseev S.V., Dimov A.V., Drach M.A., Banina N.V., Ermoshenko Yu.V. Torsional vibration dampers: pat. 64722 Ros. Federatsiya. № 2006101309/22; zayavl. 17.01.06; opubl. 10.07.07, Byul. № 19.
23. Banina N.V. Structural methods of dynamic synthesis of oscillatory mechanical systems taking into account characteristics of the physical implementations of feedback: dis. ... kand. tekhn. nauk. Irkutsk, 2006. 198 p.