УДК 681.5 DOI: 10.18324/2077-5415-2016-3-143-146

Синтез локальных компонентов систем управления методом структурных чисел

Ю.Н. Алпатов[a], Л.В. Веревкин[b]

Братский государственный университет, ул. Макаренко 40, Братск, Россия
[a]iipm@brstu.ru, [b]leo_proxy@mail.ru
Статья поступила 27.05.2016, принята 16.07.2016

В статье рассматривается синтез системы управления на основе метода структурных чисел. Данный метод, относящийся к топологическим, является наиболее рациональным для автоматизированного поиска специальных деревьев графа в силу минимальной трудоемкости вычислительных операций. Операторы синтезируемых компонент в самом общем виде могут представлять сложные математические выражения. В статье рассматривается задача синтеза компонент из элементарных звеньев, которая решается в два этапа: необходимо найти структуру $W_k(S)$ *и структуру отдельных звеньев, составляющих подсистему* $W_k(S)$*, а также определить параметры простейших передаточных функций, образующих структурно* $W_k(S)$*. Математически задача сводится к получению полинома, эквивалентного схеме, содержащей набор простейших звеньев, соединенных определенным образом. Выполнение данных этапов позволяет получить систему нелинейных уравнений, решение которых обеспечивает нахождение искомой структуры по заданным критериям. Осуществлена проверка на критерий устойчивости по методу Ляпунова и Рауса–Гурвица, доказано равенство первоначальной системы и системы, полученной при помощи данного метода.*

Ключевые слова: звенья; структура; полином; нелинейные уравнения; синтез; топология; графы; компонента.

Synthesis of local components of control system with the method of structural numbers

Yu.N. Alpatov[a], L.V. Verevkin[b]

Bratsk State University; 40, Makarenko St., Bratsk, Russia
[a]iipm@brstu.ru, [b]leo_proxy@mail.ru
Received 27.05.2016, accepted 16.07.2016

The article deals with the synthesis of a control system on the basis of a method of structural numbers. This method is related to topological ones and is the most rational for the automated search of special graph trees as requiring minimum labor input of computing operations. Operators of synthesizable components can present the difficult mathematical expressions in the most general view. The task of synthesizing the components from the elementary elements is presented in the article. The following steps must be performed to solve this problem: to find the structure for $W_k(S)$ *and the structure for individual elements, setting a subsystem* $W_k(S)$*; to determine the parameters for elementary transfer functions, forming* $W_k(S)$ *structurally. Mathematically the task is reduced to receiving a polynom, being equivalent to the scheme with a set of the elementary elements, connected in a definite way. By completing these stages, the system of the non-linear equations can be obtained because solving of such equation leads to finding the required structure in accaordance with criteria given. There has been a check on a stability criterion by Lyapunov and Routh-Hurwits methods. The equality of initial system and the system received by means of this method is proved.*

Key words: elements; structure; polynom; non-linear equations; synthesis; topology; graph; component.

Введение

При проектировании систем математические модели искомых компонент имеют сложное выражение в виде полиномов *n*-й степени. Поскольку техническая реализация таких компонент вызывает большие трудности, необходима разработка методов строгого и параметрического синтеза найденных компонент.

В последние годы разработан ряд методов, позволяющих упростить и, что, по-видимому, самое главное, формализовать весь процесс анализа линейных динамических систем, сделать его более компактным и обозримым. К их числу относятся теоретико-множественные методы структурных и обобщенных чисел, разработанные в теории электрических цепей и основанные на анализе топологической модели исследуемой системы.

Метод структурных чисел [1], относящийся к топологическим методам, является наиболее рациональным для автоматизированного поиска специальных деревьев графа в отношении минимальной трудоемкости вычислительных операций.

Операторы синтезируемых компонент в самом общем виде могут представлять сложные математические выражения. Необходимо в свою очередь синтезировать найденную компоненту из элементарных звеньев.

Задача синтеза реализуется следующим образом:

– необходимо найти структуру $W_к(S)$ и структуру отдельных простейших звеньев, составляющих подсистему $W_к(S)$;

– определить параметры простейших передаточных функций, образующих структурно $W_к(S)$ [2].

Синтез заданной системы. В общем виде $W_k(S)$ для линейных систем автоматического управления представляет собой отношения двух полиномов:

$$W_k(S)=\frac{k_nS^n+k_{n-1}S^{n-1}+...+k_1S+k_0}{T_m\cdot S^m+T_{m-1}\cdot S^{m-1}+...+T_1S+T_0}, \qquad (1)$$

где $m \geq n$.

Математическая задача сводится к получению полинома (1) эквивалентного схеме, содержащей набор «простейших« звеньев, соединенных определенным образом. Корректность постановки данной задачи рассмотрим на следующих примерах.

Необходимо синтезировать систему, передаточная функция которой представляет собой отношение двух полиномов первой степени:

$$W_k(S)=\frac{k_1S+k_0}{T_1S+T_0}. \qquad (2)$$

Реализовав данную систему путем соединения двух звеньев с обратной связью, $W_1(S)=\frac{k_{1x}}{T_{1X}S+T_{2X}}$ и $W_2(S)=k_y$, получим следующие эквивалентные структурные схемы [3] (рис. 1).

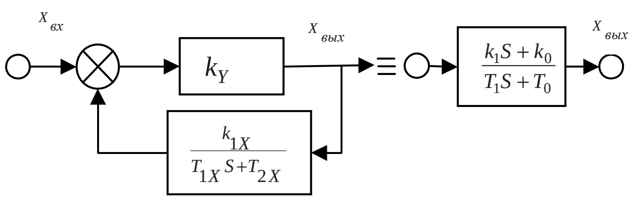

Рис. 1. Эквивалентные структурные схемы

Передаточная функция замкнутой системы с обратной связью имеет вид:

$$W_k(S)=\frac{W_1(S)}{1\pm W_1(S)\cdot W_2(S)}, \qquad (3)$$

где знак «+» — для отрицательной обратной связи; знак «–» — для положительной обратной связи;

$W_1(S)=k_Y$;

$$W_2(S)=\frac{k_{1X}}{T_{1X}\cdot S+T_{2X}}.$$

По формуле (3) получим уравнение для $W_k(S)$ в виде:

$$W_k(S)=\frac{k_Y(T_{1X}S+T_{2X})}{T_{1X}S+T_{2X}+k_Y\cdot k_{1X}}=\frac{k_YT_{1X}S+k_YT_{2X}}{T_{1X}S+T_{2X}+k_Y\cdot k_{1X}} \qquad (4)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях полиномов в выражениях (2) и (4), получим систему нелинейных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &k_Y\cdot T_{1X}=k_1;\\ &k_Y\cdot T_{2X}=k_0;\\ &T_{1X}=T_1;\\ &T_{2X}+k_Y\cdot k_{1X}=T_0; \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Данную систему (5) возможно дополнить условием устойчивости. С целью упрощения анализа устойчивости систем разработан ряд специальных методов, которые базируются на критерии Ляпунова [4; 5].

Необходимым и достаточным условием устойчивости системы является существование корней характеристического уравнения системы с отрицательной действительной частью комплексных корней. Если хотя бы один из корней положителен — система неустойчива.

Пользоваться этим условием на практике для оценки устойчивости реальных систем достаточно сложно, так как реальные промышленные системы описываются дифференциальными уравнениями высокого порядка или содержат звенья чистого запаздывания, так что нахождение корней характеристического уравнения представляет трудную задачу [6].

Для таких систем критерий Рауса–Гурвица является наиболее распространенным алгебраическим критерием и применяется для определения устойчивости системы, когда известно характеристическое уравнение.

Характеристическое уравнение (знаменатель передаточной функции) для данной задачи из (2) имеет вид:

$$T_1S+T_0=0.$$

Необходимое условие устойчивости: все коэффициенты характеристического уравнения положительны; достаточное условие устойчивости системы: все определители, составленные из коэффициентов характеристического уравнения, положительны. Если хотя бы один из определителей равен 0 — система находится на границе устойчивости. Если какой-либо из определителей меньше 0 — система неустойчива.

Для систем 1-го и 2-го порядков необходимое условие устойчивости является и достаточным условием устойчивости, поскольку в этом случае при положительных коэффициентах характеристического уравнения все его корни являются отрицательными. Однако для систем 3-го и высших порядков положительность коэффициентов характеристического уравнения является необходимым, но не достаточным условием устойчивости. В этом случае все вещественные корни характеристического уравнения (если они есть) отрицательные, комплексные же корни могут быть и положительными [7–16].

Из уравнения (5) найдем параметры операторов простейших звеньев $W_1(S)$ и $W_2(S)$, образующих подсистему $W_k(S)$.

1) $T_{1X}=T_1$;

2) $k_Y \cdot T_{1X} = k_1 \Rightarrow k_Y = \dfrac{k_1}{T_1}$;

3) $k_Y \cdot T_{2X} = k_0 \Rightarrow T_{2X} = \dfrac{k_0}{k_Y} = \dfrac{k_0 \cdot T_1}{k_1}$;

4)
$$T_{2X} + k_Y \cdot k_{1X} = T_0 \Rightarrow k_{1X} = \frac{T_0 - T_{2X}}{k_Y} = \frac{T_0 - \dfrac{k_0 \cdot T_1}{k_1}}{\dfrac{k_1}{T_1}} =$$
$$= \frac{T_0 \cdot T_1}{k_1} - \frac{k_0 \cdot T_1^2}{k_1^2} = \frac{T_1 \cdot T_0 \cdot k_1 - T_1^2 \cdot k_0}{k_1{}^2}$$

Тогда:

$$W_1 = k_y = \frac{k_1}{T_1}$$

$$W_2(S) = \frac{k_{1x}}{T_{1X} \cdot S + T_{2X}} = \frac{\dfrac{T_1 \cdot T_0 \cdot k_1 - T_1{}^2 \cdot k_0}{k_1{}^2}}{T_1 S + \dfrac{k_0 \cdot T_1}{k_1}} =$$
$$= \frac{T_1 \cdot T_0 \cdot k_1 - T_1{}^2 \cdot k_0}{k_1{}^2} \cdot \frac{k_1}{T_1 \cdot S \cdot k_1 + k_0 \cdot T_1} = \qquad (6)$$
$$= \frac{T_1 \cdot T_0 \cdot k_1 - T_1{}^2 \cdot k_0}{k_1 (T_1 \cdot S \cdot k_1 + k_0 \cdot T_1)} = \frac{T_1 (T_0 \cdot k_1 - T_1 \cdot k_0)}{k_1 T_1 (S \cdot k_1 + k_0)}$$
$$= \frac{T_0 \cdot k_1 - T_1 \cdot k_0}{k_1 (S \cdot k_1 + k_0)}$$

Рассмотрим на примере.
1) Пусть:

$$W_k(S) = \frac{k_1 S + k_0}{T_1 S + T_0} = \frac{0{,}1S + 7}{0{,}2S + 15},$$

где $k_1 = 0{,}1$; $k_0 = 7$; $T_1 = 0{,}2$; $T_0 = 15$.

2) Так как характеристическое уравнение имеет вид:

$T_1 S + T_0 = 0$.

Найдем корень S:

$0{,}2S + 15 = 0$;

$S = -75$.

3) Подставим известные в уравнения (6), для начала найдем $W_1(S) = k_y$:

$$W_1(S) = k_y = \frac{k_1}{T_1} = \frac{0{,}1}{0{,}2} = 0{,}5 .$$

4) Находим $W_2(S) = \dfrac{k_{1x}}{T_{1X} S + T_{2X}}$:

$W_2(S) = f(W_k) = f(k_1, k_0, T_1, T_0)$;

$$W_2(S) = \frac{T_0 \cdot k_1 - T_1 \cdot k_0}{k_1 (S \cdot k_1 + k_0)} = \frac{15 \cdot 0{,}1 - 0{,}2 \cdot 7}{0{,}1(0{,}1 \cdot (-75) + 7)} = \frac{1{,}5 - 1{,}4}{0{,}1 \cdot (-0{,}5)} =$$
$$= -\frac{0{,}1}{0{,}05} = -2$$

Так как мнимых корней нет, а корень $S = -75$ отрицательный, система устойчива.

Проверим устойчивость по критерию Рауса–Гурвица.

Необходимое условие устойчивости:

$$T_1 = 0{,}2 > 0,\ T_0 = 15 > 0 .$$

Исходя из того, что для систем 1-го и 2-го порядка необходимое условие является также и достаточным, данная система является устойчивой.

Полученные значения дают основание судить, что данный метод позволяет получить достоверное решение системы.

Если же последовательно соединить два звена, представленных на рис. 2, получим систему уравнений в виде отношения полиномов 2-й степени (7).

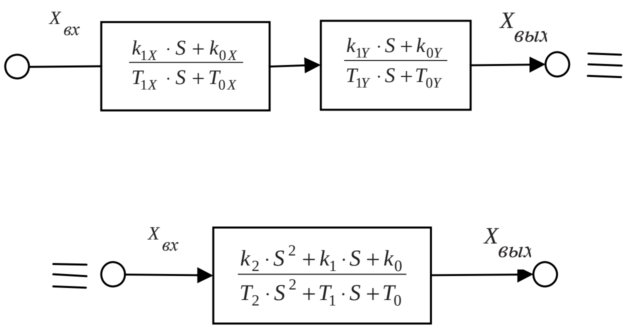

Рис. 2. Эквивалентные структурные схемы

Соответственно получим:

$$\frac{k_{1X} \cdot S + k_{0X}}{T_{1X} \cdot S + T_{0X}} \cdot \frac{k_{1Y} \cdot S + k_{0Y}}{T_{1Y} \cdot S + T_{0Y}} =$$
$$= \frac{k_{1Y} \cdot k_{1X} \cdot S^2 + (k_{0X} \cdot k_{1Y} + k_{1X} \cdot k_{0Y}) \cdot S + k_{0X} \cdot k_{0Y}}{T_{1X} \cdot T_{1Y} \cdot S^2 + (T_{0X} \cdot T_{1Y} + T_{0Y} \cdot T_{1X}) \cdot S + T_{0X} \cdot T_{0Y}} \qquad (7)$$

Для заданной исходной функции:

$$W_k(S) = \frac{k_2 \cdot S^2 + k_1 \cdot S + k_0}{T_2 \cdot S^2 + T_1 \cdot S + T_0} . \qquad (8)$$

Для выполнения равенства (7) и (8) получим систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} k_2 &= k_{1X} \cdot k_{1Y}; \\ k_1 &= k_{0X} \cdot k_{1Y} + k_{1X} \cdot k_{0Y}; \\ k_0 &= k_{0X} \cdot k_{0Y}; \\ T_2 &= T_{1X} \cdot T_{0Y}; \\ T_1 &= T_{1X} \cdot T_{1Y} + T_{0Y} \cdot T_{1X}; \\ T_0 &= T_{0X} \cdot T_{0Y} \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Синтезируемая система имеет следующее характеристическое уравнение из (8):

$$T_2 \cdot S^2 + T_1 \cdot S + T_0 = 0 .$$

Решив систему уравнений (9), получим значения коэффициентов последовательных звеньев, при которых общая передаточная функция эквивалентна исходной (8).

В примере число уравнений m = 6, а число неизвестных n = 8, так что имеется m = 6 базисных переменных и $n - m$ = 2 свободных переменных.

Данная система решается с использованием алгебры симплекс-метода.

Таким образом, используя отношения полиномов 1-й степени, мы имеем возможность получить отношения полиномов 2-й степени. Если умножить (7) на (2), то получим отношение полиномов 3-й степени и т. д. Поэтому, если взять n звеньев вида (2), получим систему уравнений для разложения отношений полиномов n-й степени, а если взять вместо звена $W_k(S) = \dfrac{k_1 S + k_0}{T_1 S + T_0}$ звено вида:

$$W_k(S) = \frac{k_{1X}}{T_{1X} S + T_{0X}}, \qquad (10)$$

то увеличим порядок знаменателя, не увеличивая порядка числителя. Следовательно, если в исходном полиноме (1) m > n, то необходимо взять n звеньев вида (2) и (m-1) звеньев вида (10). Аналогично поступим в случае, когда m < n: необходимо выбрать n звеньев вида (2) и (n-m) — звеньев вида $k_{1X} \cdot S - k_{0X} = W(S)$, которые получим путем параллельного соединения дифференцирующего и позиционного звеньев.

Таким образом, задача сводится к разрешимости системы нелинейных уравнений при условии, что число неизвестных больше числа уравнений. Кроме того, перебирая структуры, мы создаем новые системы уравнений. Перебирая большое число структур, в конечном итоге увеличиваем вероятность разрешения системы уравнений.

Выводы

Таким образом, с помощью данного метода были получены эквивалентные структурные схемы, выражены системы нелинейных уравнений, найдены решения данных уравнений, произведена проверка на устойчивость методом Ляпунова и Рауса–Гурвица. Решена задача с определенными параметрами.

Литература

1. Беллерт С., Возняцки Г. Анализ и синтез электрических цепей методом структурных чисел. М.: Мир, 1972. 332 с.
2. Гиндин С.А. Добрынин Г.И. Фирсов И.И. Алгоритм расчета динамических характеристик механических колебательных систем методом структурных чисел. М.: Наука, 1976. С. 121-127.
3. Алпатов Ю.Н. Синтез систем управления методом структурных графов. Иркутск: ИГУ, 1988. 184 с.
4. Попов Е.П. Теория нелинейных систем автоматического регулирования и управления. М.: Наука, 1988. 256 с.
5. Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967. 223 с.
6. Чернецкий В.И. Математическое моделирование динамических систем. Петрозаводск: ПГУ, 1996. 432 с.
7. Воронов А.А. Основы теории автоматического управления: Автоматическое регулирование непрерывных линейных систем. М.: Энергия, 1980. 312 с.
8. Гноенский Л.С., Каменский Г.А., Эльсгольц Л.Э. Математические основы теории управляемых систем. М.: Наука, 1969. 512 с.
9. Топчеев. Ю.И. Метод гармонической линеаризации в проектировании нелинейных систем автоматического управления. М.: Машиностроение, 1970. 570 с.
10. Федоров С.М. Методы синтеза нелинейных систем автоматического управления. М.: Машиностроение, 1970. 570 с.
11. Пономарев В.М. Нелинейная оптимизация систем автоматического управления. М.: Машиностроение, 1970. 308 с.
12. Топчеев Ю.И. Нелинейные корректирующие устройства в системах автоматического управления. М.: Машиностроение, 1971. 466 с.
13. Доступов Б.Г. Статистические методы в проектировании нелинейных систем автоматического управления. М.: Машиностроение, 1970. 408 с.
14. Нелепин Р.А. Точные методы исследования нелинейных систем автоматического управления. М.: Машиностроение, 1971 322 с.
15. S. Shankar Sastry. Nonlinear Systems: Analysis, Stability, and Control. Sastry and Bodson. 1999. 668p.
16. P.G. Drazin. Nonlinear Systems. Cambridge University Press. 1992. 317 p.

References

1. Bellert S., Voznyatski G. Analysis and synthesis of electric circuit by method of structural numbers. M.: Mir, 1972. 332 p.
2. Gindin S.A., Dobrynin G.I., Firsov I.I. The algorithm for calculating the dynamic characteristics of mechanical oscillation systems by the method of structural numbers. M.: Nauka, 1976. P. 121-127.
3. Alpatov Yu.N. Synthesis of control systems by the method of structural graphs. Irkutsk: IGU, 1988. 184 p.
4. Popov E.P. The theory of non-linear automatic regulation and control systems. M.: Nauka, 1988. 256 p.
5. Barbashin E.A. Introduction to the theory of stability. M.: Nauka, 1967. 223 p.
6. Chernetskii V.I. Mathematical modeling of dynamic systems. Petrozavodsk: PGU, 1996. 432 p.
7. Voronov A.A. Fundamentals of automatic control theory: Automatic control of continuous linear systems. M.: Energiya, 1980. 312 p.
8. Gnoenskii L.S., Kamenskii G.A., El'sgol'ts L.E. Mathematical bases of the theory of control systems. M.: Nauka, 1969. 512 p.
9. Topcheev Yu.I. The method of harmonic linearization in the design of nonlinear systems of automatic control. M.: Mashinostroenie, 1970. 570 p.
10. Fedorov S.M. Methods of synthesis of nonlinear systems of automatic control. M.: Mashinostroenie, 1970. 570 p.
11. Ponomarev V.M. Non-linear optimization of automatic control systems. M.: Mashinostroenie, 1970. 308 p.
12. Topcheev Yu.I. Nonlinear correcting devices in automatic control systems. M.: Mashinostroenie, 1971. 466 p.
13. Dostupov B.G. Statistical methods in the design of nonlinear systems of automatic control. M.: Mashinostroenie, 1970. 408 p.
14. Nelepin R.A. The exact methods of research nonlinear automatic control systems. M.: Mashinostroenie, 1971. 322 p.
15. S. Shankar Sastry. Nonlinear Systems: Analysis, Stability, and Control. Sastry and Bodson. 1999 - 668p.
16. P.G. Drazin. Nonlinear Systems. Cambridge University