

## ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ И МАШИНОСТРОЕНИЯ

УДК 62.752, 621:534;833; 888.6, 629.4.015;02

DOI: 10.18324/2077-5415-2016-1-7-18

### Самоорганизация взаимодействия элементов механических систем в соединениях с устройствами для преобразования движения

С.В. Белокобыльский<sup>1 a</sup>, С.В. Елисеев<sup>2 b</sup>, В.Б. Кашуба<sup>1 c</sup>, Р.С. Большаков<sup>2 d</sup>

<sup>1</sup>Братский государственный университет, ул. Макаренко 40, Братск, Россия

<sup>2</sup>Иркутский государственный университет путей сообщения, ул. Чернышевского 15, Иркутск, Россия

<sup>a</sup>rector@brstu.ru, <sup>b</sup>eliseev\_s@inbox.ru, <sup>c</sup>plemya@rambler.ru, <sup>d</sup>bolshakov\_rs@mail.ru

Статья поступила 16.01.2016, принята 18.02.2016

*Предлагается метод построения математических моделей структурного типа для механических колебательных систем, содержащих массоинерционные звенья и устройства для преобразования движения. Показаны возможности введения в структуру виброзащитных систем устройств для преобразования движения. Рассматриваются различные виды устройств и звеньев систем, которые интерпретируются в структурных математических моделях как типовые элементы с передаточными функциями двойного дифференцирования. Рассматриваются на примере системы с двумя степенями свободы возможные варианты введения устройств для преобразования движения, обеспечивающих связи между массоинерционными элементами и опорными поверхностями. Показаны особенности реализации динамических эффектов при различных видах внешнего гармонического возмущения (силовом и кинематическом). Представлены методология и методические основы определения динамических реакций, возникающих в различных точках системы. Реакция определяется как произведение приведенной динамической жесткости на величину смещения по выбранной координате. Динамические свойства механических колебательных систем разнообразны и проявляются в различных формах, зависящих от особенностей постановки задачи исследования. В представленной статье показано, что предлагаемое состояние систем, в частности виброзащитных, определяется детализацией представлений во взаимодействиях элементов с учетом выделения в структуре систем устройств для преобразования движения. В простейших формах такие устройства могут быть отнесены к элементарным типовым звеньям с передаточной функцией двойного дифференцирования. Физические реализации таких типовых элементов могут осуществляться, например, с помощью винтовых несомотормозящихся (винт – инерционная гайка), а также зубчатых и рычажных механизмов. Рассматриваются особенности формирования динамических реакций и совместных движений массоинерционных элементов как определенных форм самоорганизации взаимодействий.*

**Ключевые слова:** устройства для преобразования движения; динамические реакции; приведенные динамические жесткости.

### Self-organization of interaction for elements of mechanical oscillatory systems in connection with motion translation device

S.V. Belokobilsky<sup>1 a</sup>, S.V. Eliseev<sup>2 b</sup>, V.B. Kashuba<sup>1 c</sup>, R.S. Bolshakov<sup>2 d</sup>

<sup>1</sup>Bratsk State University; 40, Makarenko St., Bratsk, Russia

<sup>2</sup>Irkutsk State Transport University; 15, Chernyshevskiy St., Irkutsk, Russia

<sup>a</sup>rector@brstu.ru, <sup>b</sup>eliseev\_s@inbox.ru, <sup>c</sup>plemya@rambler.ru, <sup>d</sup>bolshakov\_rs@mail.ru

Received 16.01.2016, accepted 18.02.2016

*Method for developing mathematical models of a structural type has been proposed for mechanical oscillatory systems with mass-inertial links and motion translation devices. Possibilities for introducing in structure vibration protection systems for motion translation devices have been shown. Various forms of system devices and links which are interpreted as typical elements with transfer functions of double differentiation in structural mathematical models have been considered. Possible variants for introducing motion translation devices for connection between mass-inertial elements and bearing surfaces have been considered on example of the system with two freedom degrees. Features of realization of dynamical effects at different forms of external harmonical disturbance (force and kinematical) have been shown. Methodology and methodical bases for identification of dynamical responses in different points of system have been presented. Response is identified as a product of coerced dynamical stiffness on the value of bias on the coordinate selected. Dynamic properties of mechanical oscillatory systems are diverse and manifest in different forms, depending on the characteristics of the formulation of the objectives of the study. This article is shown that the proposed state of the systems, in particular, vibration is determined by the detail views in the interactions of items based on the selection in the structure of systems of motion translation devices. In the simplest forms, such devices may be referred to as basic model the links with a transmission function of a double differentiation. Physical realization of such model elements may be, for example, via a screw self-releasing mechanism (screw – nut inertia), as well as gear and lever mechanisms. Features of formation of dynamical responses and joint movements of mass-inertial elements as certain forms of interactions self-organization have been considered.*

**Key words:** motion translation devices; dynamic responses; coerced dynamical stiffnesses.

## Введение

Структурные подходы, или структурное математическое моделирование в задачах динамики механических колебательных систем инициировали интерес к возможностям расширения состава типовых элементов математических моделей, способов преобразования и формирования структур [1–5]. Предлагаемые методологические позиции основаны на использовании динамических аналогий, существующих в описании взаимодействий элементов электрических и механических цепей, систем автоматического управления, отображаемых математическими моделями в виде структурных схем. Разработаны соответствующие технологии построения структурных математических моделей, развиты операторные методы оценки динамических свойств систем при типовых внешних воздействиях [2; 6; 7].

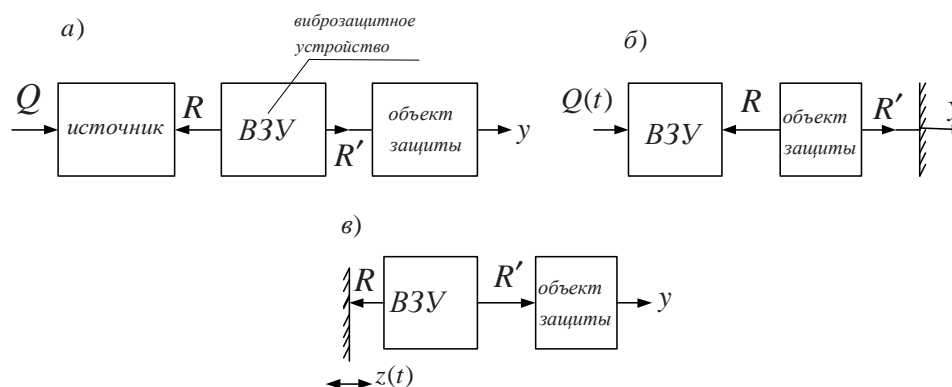
Особенности структурного математического моделирования заключаются в том, что элементарные звенья структурных схем представляют собой устройства, в которых входной сигнал в виде смещения трансформируется в силовой фактор (или силу). При этом типовое элементарное звено имеет передаточные функции, аналогичные типовым звеньям структурных схем в теории автоматического управления, то есть имеют вид усилительных, дифференцирующих, интегрирующих и других звеньев [2; 3]. Для получения передаточных функций составляются уравнения движения механической системы на основе преобразований Лапласа [8; 9].

В динамике механических колебательных систем формирование структурной модели соотносится с введением дополнительных обратных связей по отношению к некоторому объекту. В теории виброзащитных систем [10] таковым является объект защиты от вибраций, представляемый в структурной схеме интегрирующим звеном второго порядка. При формировании структурной схемы все цепи обратной связи относительно объекта защиты трактуются, в физическом смысле, как своего рода упругие элементы. В этом плане пружины, диссипативные и массоинерционные элементы взаимодействуют между собой по правилам

параллельного и последовательного соединения пружин, а также по правилам свертки обратной связи. При всей разработанности технологии преобразования структурных схем и оценки их динамических свойств, особенности типовых элементов структур — дифференцирующих звеньев второго порядка не получили достаточной детализации представлений [11–13].

В предлагаемой статье рассматриваются особенности динамических свойств механических колебательных систем, в частности виброзащитных, в составе которых используются устройства для преобразования движения, приводимые к виду типовых элементарных звеньев с передаточной функцией дифференцирующего звена второго порядка.

**I. Общие положения. Постановка задачи исследования.** Устройства для преобразования в своих простейших формах могут быть представлены в виде винтовых несамотормозящихся, рычажных и других механизмов [1; 14–16]. В виброзащитных системах, расчетные схемы которых представляют собой механические колебательные системы, объект защиты от вибраций может приводиться к принципиальной или базовой схеме (рис. 1 а–в), когда между объектом защиты и опорной поверхностью вводится так называемое виброзащитное устройство (ВЗУ). В общем случае оно представляет собой, в простейших вариантах, некоторые структуры из соединенных между собой типовых элементарных звеньев, таких как упругие элементы в виде пружин, демпферы, рычажные, зубчатые механизмы и другие устройства, в том числе имеющие электродинамическую, гидравлическую и пневматическую природу [17; 18]. В обобщенном виде, в рамках структурной теории механических колебаний, ВЗУ может быть представлено одним сложным звеном с передаточной функцией в виде дробно-рационального выражения, в котором числитель и знаменатель представлены полиномами, порядок которых зависит от структуры и набора элементов; в том числе он может быть одинаковым.



**Рис. 1.** Принципиальная схема виброзащитной системы с одной степенью свободы: а — общий случай; б — силовое возмущение; в — кинематическое возмущение ( $R$  представляет собой реакцию связи)

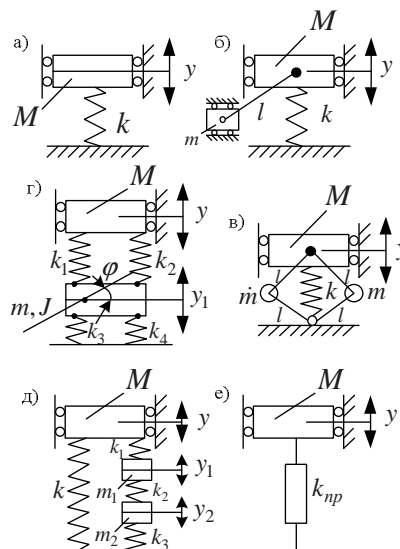
В задачах динамики, относящихся к вибрационной защите машин, оборудования и аппаратуры, объект защиты в структуре расчетной схемы, имеющей вид механической колебательной системы с одной или несколькими степенями свободы, локализуется отдельным массоинерционным звеном, которое связано с опорными поверхностями через упругие диссипативные и другие звенья, в том числе устройства для преобразования движения. Такие устройства разнообразны по конструктивно-техническим признакам и могут использовать в своих функциях процессы различной физической природы. На рис. 1 *a–в* показано, что в общем случае взаимодействие объекта защиты и источниками вибраций может быть отражено действиями ВЗУ. Такое обобщение представляется вполне удобным, поскольку по мере необходимости оно может представлять собой массоинерционные, упругие, диссипативные элементы и устройства для преобразования движения — по отдельности или в комбинационных соединениях [19].

Задачи вибрационной защиты в динамике машин, в определенном смысле, являются знаковыми, поскольку методология поиска и разработки способов и средств снижения уровня вибрационных воздействий тождественна задачам оценки, контроля и управления динамическим состоянием большинства технических систем [2–4].

На рис. 2 *a–e* приведены примеры используемых расчетных схем при решении задач виброзащиты и виброизоляции объектов. Схемы отражают разнообразие возможных контактов (рис. 2 *a*) между элементами системы и формы введения в структуру дополнительных связей (рис. 2 *б, в* в виде шарнирно-рычажных механизмов). Подробности динамических взаимодействий подобных систем приведены в работах [1–4; 16–18]. В сложных объектах защиты расчетные схемы могут включать в свой состав твердые тела и механические цепи (рис. 2 *г, д*), что может приводиться в результате преобразований к обобщенной форме (рис. 2 *e*) с использованием понятий о приведенных жесткостях обобщенных пружин. При изучении динамических свойств виброзащитных систем, связанных с учетом особенностей конструкций и систем взаимодействия их фрагментов, часто используются такие понятия, как приведенная масса объекта или его составной части, а также понятия приведенной жесткости, приведенного демпфирования и т. д. Таким образом, упругое устройство, с учетом его реального конструктивно-технического оформления, можно рассматривать как фундаментальное понятие, основанное на интегрированном представлении об упругой реакции, стремящейся вернуть систему в исходное положение.

При изучении динамических свойств виброзащитных систем, связанных с учетом особенностей конструкций и систем взаимодействия их фрагментов, часто используются такие понятия, как приведенная масса объекта или его составной части, а также понятия приведенной жесткости, приведенного демпфирования и т. д. Таким образом, упругое устройство, с учетом его реального конструктивно-технического оформления, можно рассматривать как фундаментальное понятие,

основанное на интегрированном представлении об упругой реакции, стремящейся вернуть систему в исходное положение.

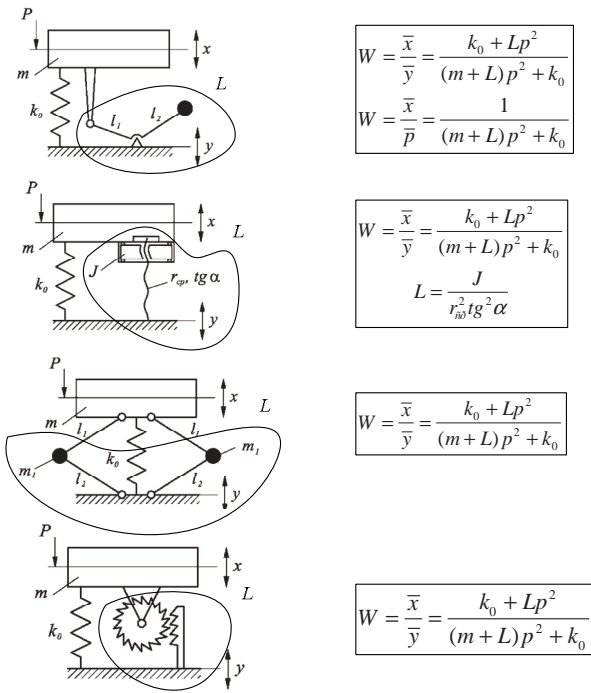


**Рис. 2.** Примеры представления упругих элементов в механических колебательных системах: *a* — простейшая система с идеальной пружиной  $k$ ; *б* — система содержит диаду  $m, l$  с двумя кинематическими парами; *в* — система содержит два сдвоенных шарнирно-рычажных механизма; *г* — система имеет сложную виброзащитную систему из твердого тела  $m, J$  и четырех упругих элементов; *д* — система имеет кроме пружины  $k$  цепь  $k_1, m_1, k_2, m_2, k_3$ ; *e* — обобщенная расчетная схема с объектом защиты массой  $M$  и обобщенного упругого элемента с приведенной жесткостью  $k_{пр}$

Устройства для преобразования движения (УПД) представляют собой звенья в структуре механической колебательной системы, являющиеся, по существу, механизмами, в которых взаимодействия элементов создают инерционные силы, формирующие эффекты, аналогичные действию дифференцирующего звена 2-го порядка. Подробности таких представлений нашли отражение в работах [1–4; 20]. Особенности взаимодействия находят отражение в эффектах формирования так называемых приведенных масс, что может существенно изменять частоты собственных колебаний систем, межпарциальные связи и многие другие характеристики и динамические свойства систем. На рис. 3 приведены некоторые примеры конструктивно-технических реализаций таких подходов (на рис. 3  $L$  обозначает приведенные массы УПД, формируемые различными взаимодействиями массоинерционных элементов механизмов, что показано соответствующими контурами). В структурных интерпретациях или структурных математических моделях виброзащитных систем устройства для преобразования движения обладают, в смысле участия в преобразовании структур, теми же свойствами, что и обычные массоинерционные и упруго-диссипативные звенья. На рис. 3 приведен ряд примеров формирования передаточных функций для некоторых типовых случаев.

Полагаем, что механическая колебательная система содержит массоинерционные элементы  $m_1$  и  $m_2$  (рис. 4), совершающие вертикальные прямолинейные колеба-

ния в системе координат  $y_1, y_2$ . Массоинерционные элементы соединены между собой и опорными поверхностями (I, II) посредством упругих элементов  $k_1, k_2, k_3$  и соответственно устройств для преобразования движения  $L_1, L_2, L_3$ . Такие устройства обладают возможностями приобретать кинетическую энергию в относительном движении элементов  $m_1$  и  $m_2$ . Устройства для преобразования движения могут быть отнесены также к элементарным типовым звеньям виброзащитных систем [2–4; 20].



УПД – устройство с преобразованием движения

Рис. 3. Примеры конструктивных реализаций виброзащитных систем с упруго-инерционными связями или устройствами для преобразования движения

В структурных схемах виброзащитных систем рассматриваются дифференцирующими звеньями второго порядка. В этом случае передаточные функции звеньев принимают вид  $L_i p^2$ ,  $L_2 p^2$ ,  $L_3 p^2$ , где  $p = j\omega$  — комплексная переменная [2]. Предполагается, что внешнее возмущение является заданным движением опорной поверхности  $I z_1 = A_0 \sin \omega t$ . На расчетной схеме (рис. 4) выделены точки  $A_1$  и  $A_2$  (тт.  $A_1, A_2$ ) как точки совместного контакта опорных поверхностей с упругими эле-

ментами и УПД. Такого же типа точки имеют соответствующие обозначения: тт.  $B_1, B_2, B_3, B_4$  (рис. 4).

Задачей исследования является изучение особенностей динамических свойств в системах с устройствами для преобразования движения и развитие метода построения математических моделей в оценке специфичных форм динамических взаимодействий при различных видах внешних воздействий на объект виброзащитной защиты.

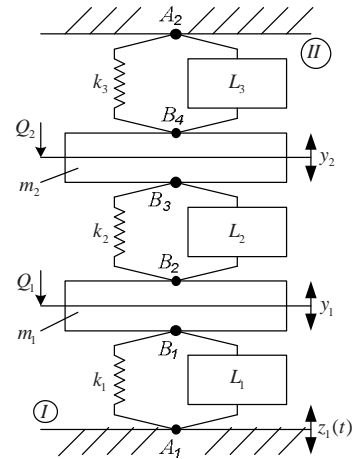


Рис. 4. Расчетная схема виброзащитной системы с устройствами преобразования движения:  $k_1, k_2, k_3$  — жесткости упругих элементов;  $m_1, m_2$  — массы объекта защиты и промежуточного инерционного элемента;  $L_1, L_2, L_3$  — приведенные массы УПД; I, II — опорные поверхности;  $z_1(t), z_2(t)$  — кинематические, а  $Q_1, Q_2$  — силовые внешние возмущения

**II. Особенности математической модели.** Для построения системы дифференциальных уравнений движения в системе координат  $y_1$  и  $y_2$  составим выражения для кинетической и потенциальной энергий:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}_2^2 + \frac{1}{2} L_1 (\dot{y}_1 - \dot{z}_1)^2 + \frac{1}{2} L_2 (\dot{y}_2 - \dot{y}_1)^2 + \frac{1}{2} L_3 \dot{y}_2^2, \quad (1)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} k_1 (y_1 - z_1)^2 + \frac{1}{2} k_2 (y_2 - y_1)^2 + \frac{1}{2} k_3 y_2^2, \quad (2)$$

Используем (1) и (2) в процедурах построения дифференциальных уравнений Лагранжа 2-го рода и получим:

$$y_1'' (m_1 + L_1 + L_2) + y_1 (k_1 + k_2) - y_2'' \cdot L_2 \cdot p^2 - y_2 \cdot k_2 = L_1 \cdot z_1'' + k_1 z_1, \quad (3)$$

$$y_2'' (m_2 + L_2 + L_3) + y_2 (k_2 + k_3) - y_1'' \cdot L_1 \cdot p^2 - y_1 \cdot k_2 = 0. \quad (4)$$

Применим преобразования Лапласа к уравнениям (3), (4) и построим структурную схему, как показано на рис. 5, полагая начальные условия нулевыми ( $p = j\omega$ ).



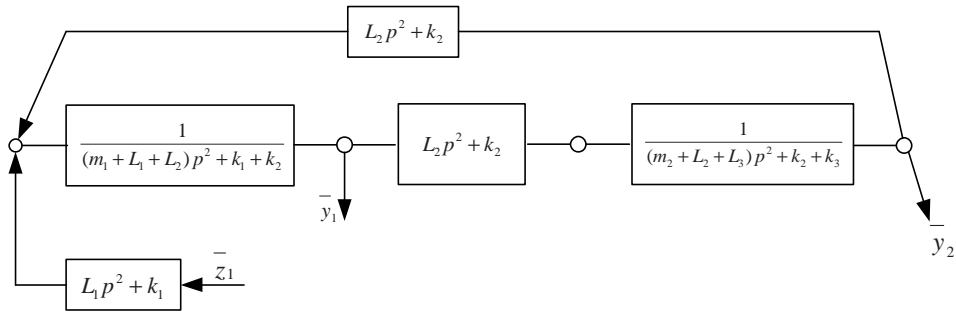


Рис. 5. Структурная схема виброзащитной системы (по рис. 4) в координатах  $y_1$  и  $y_2$

Передаточные функции системы при входном возмущении  $\bar{z}_1$  и выходных сигналах  $\bar{y}_1$  и  $\bar{y}_2$  определяются из структурной схемы и соответственно имеют вид:

$$W_1(p) = \frac{\bar{y}_1}{\bar{z}_1} = \frac{(L_1 p^2 + k_1) \cdot [(m_2 + L_2 + L_3)p^2 + k_2 + k_3]}{A_0}, \quad (5)$$

$$W_2(p) = \frac{\bar{y}_2}{\bar{z}_1} = \frac{(L_1 p^2 + k_1) \cdot (L_2 p^2 + k_2)}{A_0}, \quad (6)$$

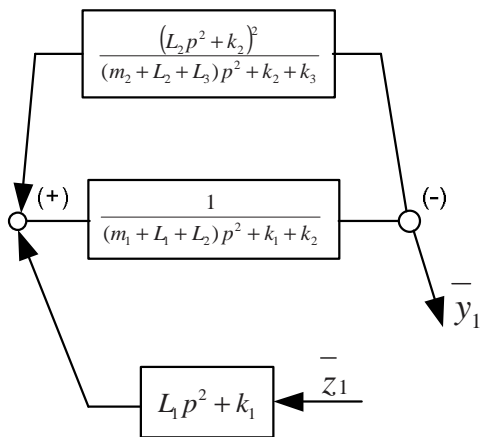
где:

$$A_0 = [(m_1 + L_1 + L_2)p^2 + k_1 + k_2] \times [(m_2 + L_2 + L_3)p^2 + k_2 + k_3] - (L_2 p^2 + k_2)^2. \quad (7)$$

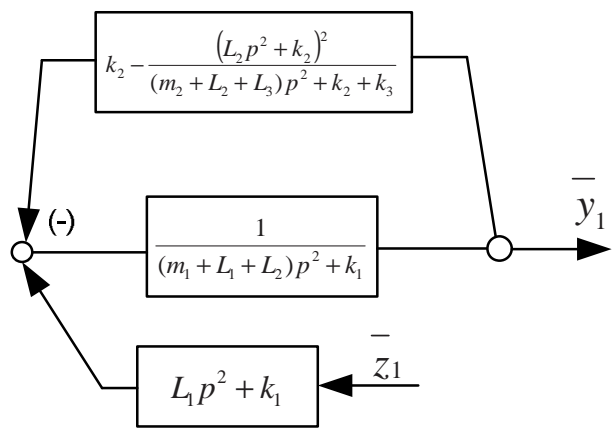
Выражение (7) является характеристическим уравнением системы (рис. 5).

Структурная схема на рис. 5 при выборе в качестве базовой частичной системы блока  $m_1, L_1, L_2, k_1, k_2$  может быть преобразована так, что дает несколько вариантов представления математических моделей по координате  $\bar{y}_1$ . Варианты преобразований приведены на рис. 6 а-з.

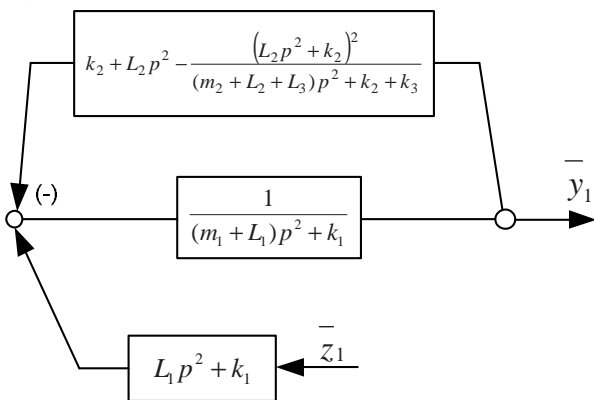
а)



б)



в)



з)

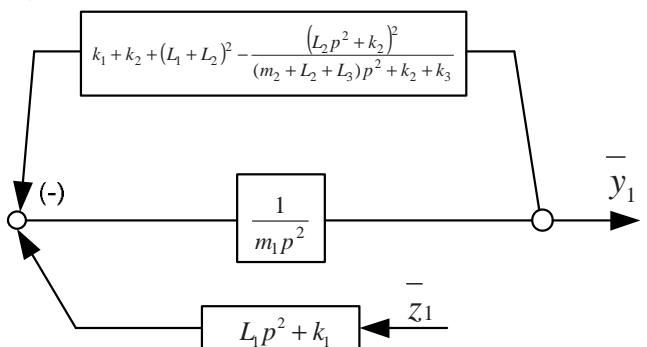


Рис. 6. Варианты структурных преобразований схемы на рис. 5 для определения динамических реакций: а — частичная система  $(m_1, L_1, L_2, k_1, k_2)$  с положительной обратной связью; б — система с отрицательной обратной связью с выделением упругого элемента  $k_2$ ; в — отрицательная обратная связь с выделением элементов  $k_2$  и  $L_2$ ; г — отрицательная связь с выделением  $k_1, k_2, L_1$  и  $L_2$

Из анализа структурной схемы на рис. 6 з можно заключить, что в целом отрицательная связь, охватывающая прямую цепь, представленную звеном с передаточной функцией интегрирующего звена 2-го порядка, в частности  $\frac{1}{m_1 p^2}$ , представляет собой некоторый элемент обобщенного вида. Такой элемент можно назвать обобщенной пружиной или обобщенным упругим элементом с приведенной жесткостью:

$$k_{np} = k_1 + k_2 + L_1 p^2 + L_2 p^2 - \frac{(L_2 p^2 + k_2)^2}{[(m_2 + L_2 + L_3)p^2 + k_2 + k_3]} \quad (8)$$

Выражение (8) в физическом смысле соответствует коэффициенту приведенной динамической жесткости некоторого обобщенного упругого элемента, создающего для элемента массой  $m_1$  динамическую реакцию. Что касается динамической реакции в точке  $A_1$  (на опорной поверхности  $I$ ), то реакция с учетом (5) определится:

$$\bar{R}_{A_1} = (k_1 + L_1 p^2) \cdot \bar{y}_1 = \frac{(k_1 + L_1 p^2) \cdot (L_1 p^2 + k_1) \times \dots}{A_0} \times z_1 \cdot \frac{[(m_2 + L_2 + L_3)p^2 + k_2 + k_3]}{\dots} \quad (9)$$

Числитель (9) представляет собой частотное уравнение, которое можно привести к виду:

$$(k_1 + L_1 p^2)^2 \cdot [(m_2 + L_2 + L_3)p^2 + k_2 + k_3] = 0 \quad (10)$$

Из (10) следует, что на частотах:

$$\omega_1^2 = \frac{k_1}{L_1} \quad (10') \quad \text{и} \quad \omega_2^2 = \frac{k_2 + k_3}{m_2 + L_2 + L_3} \quad (10'')$$

динамическая реакция принимает нулевые значения. При этом частота  $\omega_2$  из (10'') соответствует режиму динамического гашения колебаний, если элемент  $m_1$  выбрать в качестве объекта защиты при внешнем кинематическом воздействии  $\bar{z}_1$ . Отметим также, что при  $\omega_1 = \omega_2$  проявляется частный случай «обнуления» динамической реакции, что надо рассматривать отдельно, поскольку в системе возникает ситуация, когда приведенная жесткость становится равной нулю. При этом возникает особая форма динамического состояния (7).

Из (9) можно также определить передаточную функцию при выходном сигнале, соответствующем динамической реакции  $\bar{R}_{A_1}$  и входном сигнале — в виде кинематического воздействия  $\bar{z}_1$ :

$$W_{\bar{R}_{A_1}} = \frac{\bar{R}_{A_1}}{(k_1 + L_1 p^2) \cdot z_1} = \frac{(k_1 + L_1 p^2) \cdot [(m_2 + L_2 + L_3)p^2 + k_2 + k_3]}{A_0} \quad (11)$$

Вид амплитудно-частотной характеристики, соответствующей (11), будет иметь свои особенности, так как числитель (11) имеет частоты «зануления» (10') и (10''), а знаменатель имеет полюса, то есть определяет частоты собственных колебаний, при которых возникают резонансные режимы [2]. Равенство нулю динамических реакций означает, что на определенных частотах будут доминировать реакции, соответствующие статическим нагрузкам.

**III. Оценка динамических реакций в отдельных точках системы.** Предлагаемый метод, по существу, заключается в том, чтобы путем преобразований исходной структурной схемы выделить соответствующий элемент или звено и сформировать обратную связь, которая определит приведенную динамическую жесткость, что может быть использовано для нахождения динамических реакций и оценки форм совместных элементов системы.

1. Определим динамическую реакцию в т.  $A_2$ , что следует из выражения:

$$\bar{R}_{A_2}(p) = (L_2 p^2 + k_3) \cdot \bar{y}_2 = \frac{(k_3 + L_2 p^2) \cdot (L_2 p^2 + k_2) \cdot (L_1 p^2 + k_1) \cdot \bar{z}_1}{A_0} \quad (12)$$

Из (12) следует, что динамическая реакция между элементом  $m_2$  и опорной поверхностью  $II$  в общем случае не совпадает с динамической реакцией в т.  $A_1$ . Что касается передаточной функции по выходу в виде  $\bar{R}_{A_2}$  при входном воздействии  $\bar{z}_1$ , то она имеет вид:

$$W_{\bar{R}_{A_2}}(p) = \frac{\bar{R}_{A_2}}{(k_1 + L_1 p^2) \cdot z_1} = \frac{(k_3 + L_3 p^2) \cdot (L_2 p^2 + k_2)}{A_0} \quad (13)$$

Амплитудно-частотная характеристика системы в данном случае имеет два минимума, при которых динамическая реакция равна нулю:

$$(\omega_1')^2 = \frac{k_2}{L_2} \quad (13') \quad \text{и} \quad (\omega_2')^2 = \frac{k_3}{L_3} \quad (13'')$$

Кроме того, из (7) следует, что в (13) характеристическое частотное уравнение также определяет в общем случае два режима резонанса.

2. Если две опорные поверхности ( $I$  и  $II$ ) могут быть объединены, как показано на рис. 7, то, полагая  $\bar{z}_1 = 0$  и вводя внешнее силовое возмущение  $Q_1 = Q_0 \sin \omega t$ , приложенное к элементу  $m_1$ , получим:

$$\bar{R}_A = \frac{\bar{Q}_1}{A_0} \left\{ (k_1 + L_1 p^2) \cdot [(m_2 + L_2 + L_3) p^2 + k_2 + k_3] + (k_3 + L_3 p^2) \cdot (L_2 p^2 + k_2) \right\} \quad (14)$$

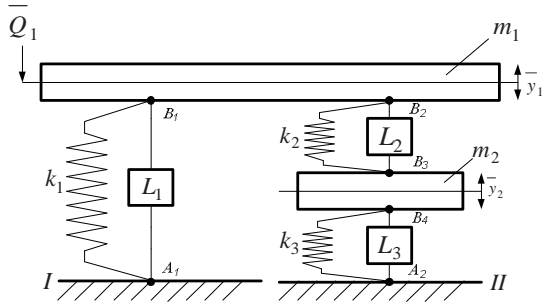


Рис. 7. Расчетная схема виброзащитной системы с общей опорной поверхностью

Выражение (14) отличается от (9) и (11) тем, что вместо  $(k_1 + L_1 p^2) \cdot \bar{z}_1$  на расчетной схеме (рис. 4) представлено  $\bar{Q}_1$ . Такая замена вполне объяснима, поскольку в данном случае кинематическое возмущение  $\bar{z}_1$  приводится к эквивалентному силовому воздействию  $\bar{Q}_1 = k_1 \bar{z}_1$ , как это было показано в [2]. Таким образом, передаточная функция при выходном сигнале  $\bar{R}_A$  и входном  $\bar{Q}$  примет вид:

$$W_{\bar{R}_A}^-(p) = \frac{\bar{R}_{A_1}}{\bar{Q}_1} = \frac{(k_1 + L_1 p^2) \cdot [(m_2 + L_2 + L_3) p^2 + k_2 + k_3] + (k_3 + L_3 p^2) \cdot (L_2 p^2 + k_2)}{A_0} \quad (15)$$

Частотное уравнение в числителе (15) может быть записано в виде:

$$A'_0 = p^4 \cdot [L_1(m_2 + L_2 + L_3) p^2 + L_2 + L_3] + p^2 [k_1 \cdot (m_2 + L_2 + L_3) + L_1(k_2 + k_3) + k_3 L_2 + k_2 L_3] + k_1 \cdot (k_2 + k_3) + k_2 k_3 \quad (16)$$

Из (16) могут быть получены значения частот, при которых  $\bar{R}_A$  принимает нулевые значения. Характерным для передаточных функций, определяемых выражениями (11), (13), (15) является то обстоятельство, что при  $p \rightarrow \infty$  модули (11), (13), (15) стремятся соответственно к пределам:

$$\left| W_{\bar{R}_{A_1}}^-(p) \right|_{p \rightarrow \infty} = \frac{L_1(m_2 + L_2 + L_3)}{(m_1 + L_1 + L_2) \cdot (m_2 + L_2 + L_3) - L_2^2} \quad (17)$$

$$\left| W_{\bar{R}_{A_2}}^-(p) \right|_{p \rightarrow \infty} = \frac{L_2 L_3}{(m_1 + L_1 + L_2) \cdot (m_2 + L_2 + L_3) - L_2^2} \quad (18)$$

$$\left| W_{\bar{R}_A}^-(p) \right|_{p \rightarrow \infty} = \frac{L_1(m_2 + L_2 + L_3) + L_2 L_3}{(m_1 + L_1 + L_2) \cdot (m_2 + L_2 + L_3) - L_2^2} \quad (19)$$

Отметим, что каждое из выражений (17) ÷ (19) имеет значения, меньшие, чем 1. Если  $L_1, L_2, L_3$  будут равны нулю, то соответственно выражения (17) ÷ (19) также будут иметь нулевые значения.

3. Отметим, что в некоторых случаях при определенном сочетании параметров  $m_1, m_2, L_1, L_2$  и  $L_3$  частоты обнуления могут находиться и в других сочетаниях, в том числе совпадать с частотами собственных колебаний. Динамические реакции  $\bar{R}_{A_1}$  и  $\bar{R}_{A_2}$  также могут быть получены в предположении, что  $z_1 = 0$ , а сила  $Q_1$  прикладывается к элементу массой  $m_1$ . В этом случае:

$$W_{\bar{R}_{A_1}}^-(p) = \frac{\bar{R}_{A_1}}{\bar{Q}_1} = \frac{(k_1 + L_1 p^2) \times \dots \times [(m_2 + L_2 + L_3) p^2 + k_2 + k_3]}{A_0} \quad (20)$$

$$W_{\bar{R}_{A_2}}^-(p) = \frac{\bar{R}_{A_2}}{\bar{Q}_1} = \frac{(k_3 + L_3 p^2) \cdot (k_2 + L_2 p^2)}{A_0} \quad (21)$$

Выражение (11) совпадает с (20), а (13) соответственно совпадает с (21), откуда следует, что передаточные функции при входном сигнале  $\bar{Q}_1$  и выходных сигналах  $\bar{R}_{A_1}$  и  $\bar{R}_{A_2}$  полностью совпадают с передаточными функциями, в которых входным сигналом является кинематическое воздействие  $z_1$ , а выходным сигналом — смещение элементов  $m_1$  и  $m_2$ , то есть координаты  $y_1$  и  $y_2$ , что, в частности, согласуется с утверждениями в [1].

#### IV. Определение динамических реакций, приложенных к массоинерционным элементам $m_1$ и $m_2$ .

Вспользуемся структурной схемой на рис. 6 з и запишем, что жесткость по отношению к элементу с передаточной функцией  $\frac{1}{mp^2}$  в прямой цепи имеет вид:

$$k_{np_{m_1}} = k_1 + k_2 + L_1 p^2 + L_2 p^2 - \frac{(k_2 + L_2 p^2)^2}{(m_2 + L_2 + L_3) p^2 + k_2 + k_3} \quad (22)$$

Используя (22), найдем, что динамическая реакция по массе  $m_1$  определится ( $z_1 = 0, Q_1 \neq 0$ ):

$$\bar{R}_{m_1}^{(p)} = k_{np_{m_1}} \cdot \bar{y}_1 = \frac{\{ (k_1 + k_2 + L_1 p^2 + L_2 p^2) \times \dots \times [(m_2 + L_2 + L_3) p^2 + k_2 + k_3] - (k_2 + L_2 p^2)^2 \}}{A_0 [(m_2 + L_2 + L_3) p^2 + k_2 + k_3]} \dots \times [(m_2 + L_2 + L_3) p^2 + k_2 + k_3] \cdot \bar{Q}_1 \quad (23)$$

откуда можно найти передаточную функцию при входном силовом возмущении  $\bar{Q}_1$  и выходе — в виде динамической реакции  $\bar{R}_{m_1}$ :

$$W_{R_{m_1}}(p) = \frac{\bar{R}_{m_1}}{\bar{Q}_1} = \frac{[k_1 + k_2 + (L_1 + L_2)p^2] \times \dots \times [(m_2 + L_2 + L_3)p^2 + k_2 + k_3] - (k_2 + L_2 p^2)^2}{A_0} \quad (24)$$

Из числителя (24) может быть получено частотное уравнение, из которого определяются две частоты возмущения динамических реакций  $\bar{R}_{m_1}$ .

Резонансные частоты остаются такими же, что и в предыдущих случаях, то есть находятся из (7). Что касается элемента массой  $m_2$ , то структурная схема на рис. 5 может быть преобразована при силовом внешнем воздействии  $Q_1$ , как показано на рис. 8 а, б.

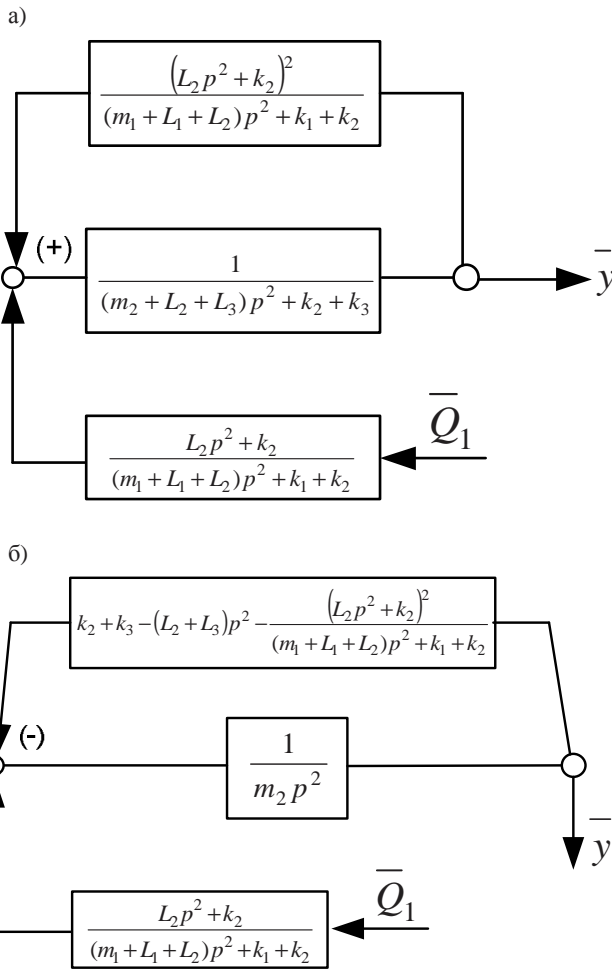


Рис. 8. Структурная схема для определения динамической реакции на элементе  $m_2$ : а — положительная обратная связь; б — обратная отрицательная связь

По аналогии с рассмотренными выше случаями запишем, что приведенная жесткость имеет вид:

$$k_{np_2} = k_2 + k_3 + (L_2 + L_3)p^2 - \frac{(L_2 p^2 + k_2)^2}{(m_1 + L_1 + L_2)p^2 + k_1 + k_2} \quad (25)$$

Тогда динамическая реакция по  $m_2$  определится:

$$\bar{R}_{m_2}(p) = k_{np_2} \cdot \bar{y}_2 = \frac{\bar{Q}_1 \cdot \{[k_2 + k_3 + \dots + (L_2 + L_3)p^2] \cdot [(m_1 + L_1 + L_2)p^2 + k_1 + k_2] - (k_2 + L_2 p^2)^2\}}{A_0 [(m_1 + L_1 + L_2)p^2 + k_1 + k_2]} \quad (25')$$

а передаточная функция «реакция связи – внешнее силовое воздействие» примет вид:

$$W_{R_{m_2}}(p) = \frac{\bar{R}_{m_2}}{\bar{Q}_1} = \frac{\{[k_2 + k_3 + (L_2 + L_3)p^2] \times \dots \times [(m_1 + L_1 + L_2)p^2 + k_1 + k_2] - (k_2 + L_2 p^2)^2\}}{A_0 [(m_1 + L_1 + L_2)p^2 + k_1 + k_2]} \quad (26)$$

Из (26) можно отметить более сложный характер динамических взаимодействий, чем для элемента с массой  $m_1$ . В частности, в данном случае появляется возможность «зануления»  $\bar{R}_{m_2}$  на частоте:

$$\omega_1^* = \frac{k_2}{L_2}, \quad (27)$$

а также еще на двух частотах, определяемых из частотного уравнения числителя выражения (26). Что касается режимов, при которых значение (26) может возрасти до  $\infty$ , то таких ситуаций (в общем случае) может быть:

а) из знаменателя (26) может быть найдено:

$$(\omega_2^*)^2 = \frac{k_1 + k_2}{m_1 + L_1 + L_2}; \quad (28)$$

б) другие частоты соответствуют частотам собственных колебаний, определяемых из (7).

Значение динамических реакций  $\bar{R}_{m_1}$  и  $\bar{R}_{m_2}$  позволяет рассмотреть некоторые частные случаи, например  $\bar{R}_{m_1} = \bar{R}_{m_2}$  или  $\bar{R}_{m_1} + \bar{R}_{m_2} = 0$ , что может быть использовано при управлении динамическим состоянием виброзащитной системы. Значимым обстоятельством при этом является учет вида внешних воздействий и мест их приложения, а также выделения возможностей функциональной зависимости между возмущениями [21].

**Особенности взаимодействия элементов системы при  $L_1 = 0, L_3 = 0$ .** В данном случае динамические реакции в системе могут быть найдены упрощениями полученных выражений (11), (13), (15), (23), (26):

$$W_{R_{A_1}}(p) = \frac{\bar{R}_{A_1}}{\bar{Q}_1} = \frac{k_1(m_2 p^2 + L_2 p^2 + k_2 + k_3)}{A_0''}, \quad (29)$$



$$W_{R_{A_2}} = \frac{\bar{R}_{A_2}}{Q_1} = \frac{k_2 k_3}{A_0''}, \quad (30)$$

$$W_{R_A}(p) = \frac{\bar{R}_A}{Q_1} = \frac{k_1[(m_2 + L_2)p^2 + k_2 + k_3] + k_2 k_3}{A_0''}, \quad (31)$$

$$W_{R_{m_1}}(p) = \frac{\bar{R}_{m_1}}{Q_1} = \frac{\left\{ (L_2 p^2 + k_1 + k_2) \times \dots \times [(m_2 + L_2)p^2 + k_2 + k_3] - (L_2 p^2 + k_2)^2 \right\}}{A_0''}, \quad (32)$$

$$W_{R_{m_2}}(p) = \frac{\bar{R}_{m_2}}{Q_1} = \frac{\left\{ (k_2 + k_3 + L_2 p^2) \cdot [(m_1 + L_2)p^2 + k_1 + k_2] \cdot A_0'' \dots + (L_2 p^2 + k_1 + k_2) - (L_2 p^2 + k_2)^2 \right\} \cdot (L_2 p^2 + k_2)}{A_0''}, \quad (33)$$

где:

$$A_0'' = [(m_1 + L_2)p^2 + k_1 + k_2] \times \left[ (m_2 + L_2)p^2 + k_2 + k_3 \right] - (L_2 p^2 + k_2)^2. \quad (34)$$

Наибольший интерес для исследования представляют случаи, когда  $k_2 = 0$ , а  $k_3 \neq 0$ . Найдем что (29)÷(34) преобразуются к виду:

$$\bar{W}_{R_{A_1}}(p) = \frac{R_{A_1}}{Q_1} = \frac{R_1[(m_2 + L_2)p^2 + k_3]}{A_0'''}, \quad (35)$$

$$\bar{W}_{R_{A_2}}(p) = \frac{\bar{R}_{A_2}}{Q_1} = \frac{L_2 p^2 \cdot k_3}{A_0'''}, \quad (36)$$

$$\bar{W}_{R_A}(p) = \frac{\bar{R}_A}{Q_1} = \frac{k_1[(m_2 + L_2)p^2 + k_3] + L_2 p^2 \cdot k_3}{A_0'''}, \quad (37)$$

$$W_{R_{m_1}}(p) = \frac{\bar{R}_{m_1}}{Q_1} = \frac{(L_2 p^2 + k_1) \times \dots \times [(m_2 + L_2)p^2 + k_3] - L_2^2 p^4}{A_0'''}, \quad (38)$$

$$W_{R_{m_2}}(p) = \frac{\bar{R}_{m_2}}{Q_1} = \frac{\left\{ k_3 \cdot [(m_1 + L_2)p^2 + k_1] - L_2^2 p^4 \right\} \cdot L_2 p^2}{A_0'''}, \quad (39)$$

где:

$$A_0''' = [(m_1 + L_2)p^2 + k_1] \cdot [(m_2 + L_2)p^2 + k_3] - L_2^2 p^4. \quad (40)$$

Выражения для амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) могут быть получены из (35)÷(39). Отметим, что АЧХ, по сравнению с обычными системами, обладают особенностями — дополнительными режи-

мами динамического гашения и «запирания» в области высоких частот.

**Упрощенный способ построения математических моделей.** Использование представлений о приведенных жесткостях позволяет упростить получение основных характеристик и построение математических моделей. Используем исходную расчетную схему на рис. 4, что позволяет записать:

$$k_{np_1} = k_1 + L_1 p^2 + \frac{[(m_2 + L_3)p^2 + k_3] \cdot [L_2 p^2 + k_2]}{(m_2 + L_2 + L_3)p^2 + k_2 + k_3} = \frac{(k_1 + L_1 p^2) \cdot [(m_2 + L_3)p^2 + k_2 + k_3] + [(m_2 + L_3)p^2 + L_2 p^2 + k_2 - k_2 - L_2 p^2] \cdot [L_2 p^2 - k_2]}{(m_2 + L_2 + L_3)p^2 + k_2 + k_3} = \frac{[k_1 + k_2 + (L_1 + L_2)p^2] \cdot [(m_2 + L_3)p^2 + k_2 + k_3] - [L_2 p^2 + k_2]^2}{(m_2 + L_2 + L_3)p^2 + k_2 + k_3} = k_{np_{m_1}}.$$

Полученное выражение (41) полностью совпадает с выражением (22) и последующим определением динамической реакции  $\bar{R}_{m_1}$  после умножения (41) на  $\bar{y}_1$ .

Расчетная схема на рис. 7 может быть также использована для определения  $\bar{R}_{m_2}$ , что реализуется следующими подстановками:

$$k_{np_2} = \frac{[k_3 + k_2 + (L_3 + L_2)p^2] \times \dots \times [(m_1 + L_1 + L_2)p^2 + k_2 + k_1] - [L_2 p^2 + k_2]^2}{(m + L_2 + L_1)p^2 + k_2 + k_1}. \quad (42)$$

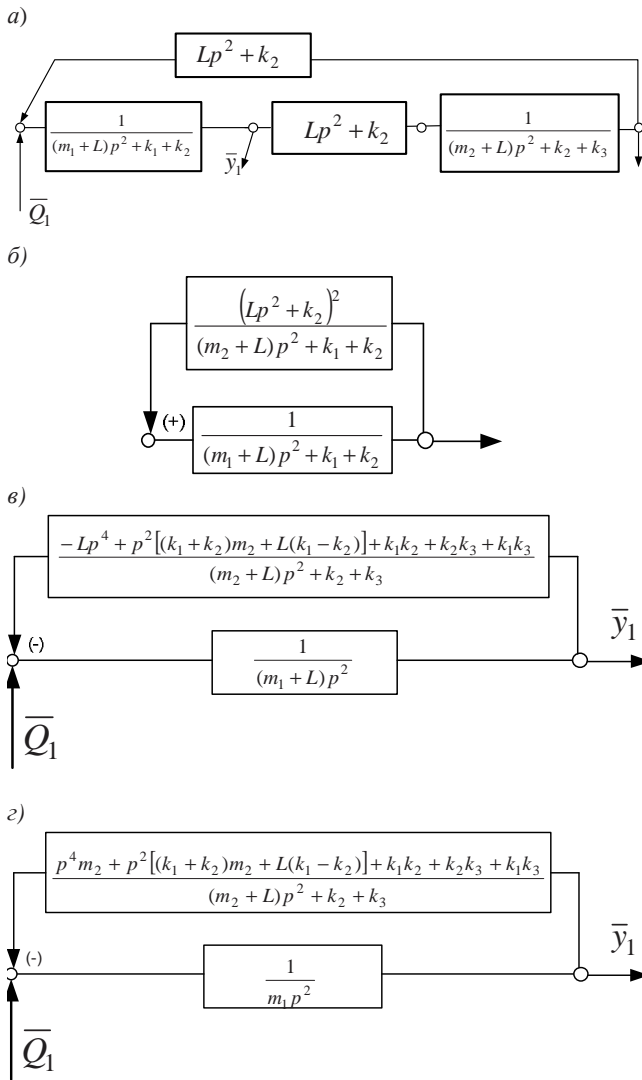
Выражение (42) совпадает с выражением (24) и позволяет получить выражение для динамической реакции  $\bar{R}_{m_2}$ , совпадающее после соответствующего введения  $\bar{y}_2$  с (25').

**V. О соотношении координат в движениях элементов системы при наличии УПД.** Полагая, что  $L = 0$ ,  $L_3 = 0$ , а также расчетную схему виброзащитной системы с объектом  $m_1$ , к которому приложено внешнее силовое гармоническое возмущение. В данном случае передаточная функция межпарциальных связей примет вид:

$$\bar{W}_{12} = \frac{\bar{y}_2}{\bar{y}_1} = \frac{L_2 p^2 + k_2}{(m_2 + L)p^2 + k_2 + k_3}. \quad (42')$$

Выделяя объект защиты от вибрационных воздействий  $Q_1$  как звена с передаточной функцией  $\frac{1}{m_1 p^2}$ , построим структурную математическую модель (рис. 8 а–

б). Показаны последовательные формы изменения передаточной функции цепи обратной связи (рис. 9 а–з).



**Рис. 9.** Последовательные формы структурной математической модели системы с двумя степенями свободы с межпарциальной инерционной упругой связью: а — структурная схема для системы цепного типа; б — структурная схема системы с исключением координаты  $y_2$ ; в — схема с обратной связью для объекта  $\frac{1}{m_1 p^2 + L}$ ; з — схема с обратной связью для объекта защиты  $\frac{1}{m_1 p^2}$

Отметим наращивание сложности передаточной функции цепи обратной связи. При этом знаменатель передаточной функции не меняется, а частотный полином числителя приобретает более высокий порядок, хотя при этом и не изменяется порядок полинома.

Анализ структурных схем (рис. 9 а–з) показывает, что во всех вариантах структурных интерпретаций математических моделей знаменатель передаточной функции цепи обратной связи остается неизменным. Во всех случаях возможна реализация режима динами-

ческого гашения колебаний при силовом возмущении  $\bar{Q}_1$  на частоте:

$$\omega_{\text{дин}}^2 = \frac{k_2 + k_3}{m_2 + L}. \quad (43)$$

В физическом смысле передаточная функция цепи обратной связи при объекте защиты  $m_1$  соответствует приведенной динамической жесткости, отражающей свойства всей упругой системы, рассматриваемой как обобщенное ВЗУ, показанное на рис. 1. Отметим, что приведенная динамическая жесткость, как это следует из частотного уравнения числителя передаточной функции цепи обратной связи, может принимать нулевые значения. Частоты таких режимов определяются из уравнения:

$$m_2 L p^4 + p^2 [m_2 (k_1 + k_2) + L (k_1 + k_3)] + k_1 k_2 + k_2 k_3 + k_1 k_3 = 0. \quad (44)$$

На частотах возбуждения, определяемых из уравнения (44), система обладает возможностями реализации движений двух масс  $m_1$  и  $m_2$  в координированных формах, которые характерны для движений по главным координатам. Особенности таких движений могут быть детально рассмотрены с использованием передаточной функции межпарциальных связей, найденной из схемы на рис. 9 а:

$$W_{12}(p) = \frac{\bar{y}_2}{\bar{y}_1} = \frac{L p^2 + k_2}{(m_2 + L) p^2 + k_2 + k_3}. \quad (45)$$

Если отношение  $y_2/y_1$  при заданной частоте воздействия имеет знак (+), то движение двух масс будет синфазным; при этом будет сохраняться значение  $y_2 - y_1$ , определяющее сжатие пружины с жесткостью  $k_2$ . При отрицательном значении соотношения  $y_2/y_1$  движение двух масс  $m_1$  и  $m_2$  будет происходить в противофазе.

Особым случаем взаимодействия является совпадение частот одновременного «зануления» числителя и знаменателя, при котором выражение (45) приобретает неопределенность типа 0/0. Раскрытие этой неопределенности дает значение:

$$\frac{\bar{y}_2}{\bar{y}_1} = \frac{L}{m_2 + L}. \quad (46)$$

Частота воздействия с проявлениями такого эффекта может быть определена при условии, что между параметрами  $m_2$  и  $L$  имеется соотношение:

$$L = \frac{k_2}{k_3} m_2. \quad (47)$$

В этом случае соотношение  $y_2/y_1$  принимает постоянное значение, соответствующее (46), а система в целом будет совершать движение как система с одной степенью свободы с передаточной функцией:

$$W_0(p) = \frac{\bar{y}_2}{Q_1} = \frac{1}{m_1 p^2 + k_1}. \quad (48)$$

На основании проведенного исследования можно отметить, что введение в структуры ВЗУ устройств для преобразования движения, обладающих передаточной функцией дифференцирующего звена второго порядка ( $Lp^2$ ), может существенным образом изменять динамические свойства исходных механических колебательных систем.

### Заключение

Динамические свойства механических колебательных систем разнообразны и проявляются в различных формах, зависящих от особенностей постановки задачи исследования. В представленной статье показано, что предлагаемое состояние систем, в частности виброзащитных, определяется детализацией представлений во взаимодействиях элементов с учетом выделения в структуре систем устройств для преобразования движения. В простейших формах такие устройства могут быть отнесены к элементарным типовым звеньям с передаточной функцией двойного дифференцирования. Физические реализации таких типовых элементов могут осуществляться, например, с помощью винтовых несамотормозящихся (винт – инерционная гайка), а также зубчатых и рычажных механизмов.

Как дифференцирующее звено второго порядка, УПД создает более сложную систему динамических взаимодействий между элементами. Особенность УПД заключается в возможности изменять массоинерционные свойства механической системы, влияя на формирование приведенной массы объекта защиты и создание условий для проявления различных динамических режимов, в том числе режимов динамического гашения колебаний. В развитой форме УПД представляют собой определенное структурное образование из типовых элементов, которое можно рассматривать как обобщенный упругий элемент (или квазипружину), обладающий приведенной динамической жесткостью, зависящей от частоты внешнего воздействия.

1. Предлагается методологическая позиция в преобразованиях исходных расчетных схем в виде механических колебательных систем с несколькими степенями свободы, реализуемая на структурных математических моделях.

2. Показаны возможности определения динамических реакций между элементами исходной механической системы, а также между элементами и опорными поверхностями.

3. Введение в учет свойств УПД позволяет выделять режимы динамических взаимодействий, при которых динамические реакции могут принимать экстремальные значения.

4. Для оценки динамических свойств систем могут использоваться амплитудно-частотные характеристики в виде отношения реакции связи в определенной точке (выходная реакция связи) к возмущающей силе. Такие амплитудно-частотные характеристики отличаются от обычных тем, что нулевые значения реакций могут возникать как при «занулении» движения по координа-

те рассматриваемой точки, так и при «занулении» значений динамической жесткости.

5. Если режимы с «занулением» координат точек соответствуют режимам динамического гашения колебаний, то «зануление» динамической жесткости связано с определенными возможностям самоорганизации движения массоинерционных элементов. Такие движения по своей форме аналогичны движениям элементов в формах колебаний на главных частотах свободных колебаний.

6. Предлагается метод оценки возможностей самоорганизации движений, основанный на введении и использовании передаточной функции межпарциальных связей.

7. Показано, что динамические свойства механических систем существенно не зависят от мест размещения точек приложения силовых факторов и определяют формы совместных движений массоинерционных элементов, среди которых могут быть выделены специфические формы взаимодействия, связанные с сохранением уровня постоянного деформирования соединяющей массоинерционные элементы пружины. Такая деформация может рассматриваться как специфическая форма накопления энергии в процессе колебаний.

### Литература

1. Елисеев С.В., Волков Л.Н., Кухаренко В.П. Динамика механических систем с дополнительными связями. Новосибирск: Наука, 1990. 386 с.
2. Елисеев С.В., Резник Ю.И., Хоменко А.П., Засядко А.А. Динамический синтез в обобщенных задачах виброзащиты и виброизоляции технических объектов. Иркутск: ИГУ. 2008. 523 с.
3. Елисеев С.В., Резник Ю.Н., Хоменко А.П. Мехатронные подходы в динамике механических колебательных систем. Новосибирск: Наука, 2011. 384 с.
4. Хоменко А.П., Елисеев С.В., Ермошенко Ю.В. Системный анализ и математическое моделирование в мехатронике виброзащитных систем. Иркутск: ИрГУПС, 2012. 288 с.
5. Хоменко А.П., Елисеев С.В. Динамическое гашение колебаний: концепция обратной связи и структурные методы математического моделирования. Новосибирск: Наука, 2014. 357 с.
6. Елисеев С.В., Большаков Р.С. Структурное математическое моделирование в задачах вибрационной защиты. Метод определения динамических реакций связей // Вестн. ИрГТУ. 2015. № 9 (104). С. 40-45
7. Елисеев С.В., Трофимов А.Н., Большаков Р.С. Вибрации и динамика машин: расчетные схемы, структуры и математические модели. Ч. I // Машиностроение и безопасность жизнедеятельности. 2014. № 3 (21). С. 59-68.
8. Елисеев С.В., Кашуба В.Б., Ситов И.С. Приведенная жесткость цепи обратной связи. Определение динамических реакций в механической колебательной системе // Системы. Методы. Технологии. 2013. № 2 (18). С. 15-22.
9. Белокобыльский С.В., Елисеев С.В. Некоторые вопросы теории вибрационной защиты оборудования. Эффект преобразования движения // Материалы Всероссийской научно-технической конференции с международным участием «Механика - XXI веку». 2013. С. 5-10.
10. Елисеев С.В. Структурная теория виброзащитных систем. Новосибирск.: Наука, 1978. 212 с.
11. Коловский М.З. Автоматическое управление виброзащитными системами. М.: Наука, 1976. 320 с.

12. Дружинский И.А. Механические цепи. М.: Машиностроение, 1977. 240 с.
13. Ленк А. Электромеханические системы. Системы с сосредоточенными параметрами. М.: Мир, 1978. 283 с.
14. Елисеев С.В., Махонькин Ю.К. Исследование свободных колебаний амортизирующего устройства с преобразованием движения // Механика и процессы управления. Иркутск, 1971. С. 89-98.
15. Елисеев С.В., Баландин О.А. Динамика виброзащитной системы с одной степенью свободы, включающей устройство для преобразования движения // Вопросы надежности и вибрационной защиты приборов. Иркутск, 1972. С. 34-41.
16. Eliseev S.V., Lukyanov A.V., Reznik Yu.N., Khomenko A.P. Dynamics of mechanical systems with additional ties. Irkutsk.: ISU, 2006. 315 p.
17. Хоменко А.П., Елисеев С.В., Артюнин А.И. Упругие элементы в механических системах. Структурные интерпретации. Иркутск: ИрГУПС, 2013. 460 с. Деп. в ВИНТИ 02.08.2013 № 230. В 2013.
18. Хоменко А.П., Елисеев С.В., Артюнин А.И., Паршута Е.А., Каимов Е.В. Механизмы в упругих колебательных системах: особенности учета динамических свойств, задачи вибрационной защиты машин, приборов и оборудования; ИрГУПС. Иркутск: ИрГУПС, 2013. 187 с. Деп. в ВИНТИ 25.07.2013 № 243 В 2013.
19. Елисеев С.В., Ковыршин С.В., Большаков Р.С. Особенности построения компактов упругих элементов в механических колебательных системах. Взаимодействия с элементами систем и формы соединения // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2012. Вып. № 4 (36). С. 61-70.
20. Белокобыльский С.В., Елисеев С.В., Кашуба В.Б. Прикладные задачи структурной теории виброзащитных систем. СПб.: Политехника. 2013. 364 с.
21. Белокобыльский С.В., Елисеев С.В., Ситов И.С. Динамика механических систем. Рычажные и инерционно-упругие связи. СПб.: Политехника, 2013. 319 с.
6. Eliseev S.V., Bol'shakov R.S. Structural mathematical modeling in tasks of vibration protection. Method of identification of dynamical responses of ties // Vestnik of Irkutsk State Technical University. 2015. № 9 (104). P. 40-45.
7. Eliseev S.V., Trofimov A.N., Bol'shakov R.S. Vibrations and dynamics of machines: design schemes, structures and mathematical models. Pt. I // Engineering industry and life safety (EILS). 2014. № 3 (21). P. 59-68.
8. Eliseev S.V., Kashuba V.B., Sitov I.S. Coerced stiffness of feedback tie chain. Identification of dynamical responses in mechanical oscillation systems // Systems. Methods. Technologies. 2013. № 2 (18). P. 15-22.
9. Belokobyl'skii S.V., Eliseev S.V. Some questions of theory of vibration protection of equipment. Effect of transformation of movement // Materialy Vserossiiskoi nauchno-tekhnicheskoi konferentsii s mezhdunarodnym uchastiem «Mekhaniki - XXI veku». 2013. P. 5-10.
10. Eliseev S.V. Structural theory of vibroprotective systems. Novosibirsk.: Nauka, 1978. 212 p.
11. Kolovskii M.Z. Automation control of vibroprotective systems. M.: Nauka, 1976. 320 p.
12. Druzhinskii I.A. Mechanical chains. M.: Mashinostroenie, 1977. 240 p.
13. Lenk A. Electromechanical systems. Systems with the concentrated parameters. M.: Mir, 1978. 283 p.
14. Eliseev S.V., Makhon'kin Yu.K. Research of own oscillations of amortization link with transformation movement // Механика и процессы управления. Иркутск, 1971. P. 89-98.
15. Eliseev S.V., Balandin O.A. Dynamics of vibroprotective system with one freedom degree with link of transformation movement // Voprosy nadezhnosti i vibratsionnoi zashchity priborov. Irkutsk, 1972. P. 34-41.
16. Eliseev S.V., Lukyanov A.V., Reznik Yu.N., Khomenko A.P. Dynamics of mechanical systems with additional ties. Irkutsk.: ISU, 2006. 315 p.
17. Khomenko A.P., Eliseev S.V., Artyunin A.I. Elastic elements in mechanical systems. Structural interpretations. Irkutsk: IrGUPS, 2013. 460 p. Dep. v VINITI 02.08.2013 № 230 V 2013.
18. Khomenko A.P., Eliseev S.V., Artyunin A.I., Parshuta E.A., Kaimov E.V. Mechanisms in elastic oscillatory systems: features of the accounting of dynamic properties, problems of vibration protection of machines, devices and equipment; IrGUPS. Irkutsk: IrGUPS, 2013. 187 p. Dep. v VINITI 25.07.2013 № 243 V 2013.
19. Eliseev S.V., Kovyrshin S.V., Bol'shakov R.S. Features of creature of compacts of elastical elements in mechanical oscillation systems. Interactions with system elements and connection forms // Modern technologies. System analysis. Modeling. 2012. Vyp. № 4 (36). P. 61-70.
20. Belokobyl'skii S.V., Eliseev S.V., Kashuba V.B. Applied tasks of the structural theory of vibroprotective systems. SPb.: Politekhnik. 2013. 364 p.
21. Belokobyl'skii S.V., Eliseev S.V., Sitov I.S. Dynamics of mechanical systems. Lever and inertial and elastic ties. SPb.: Politekhnik, 2013. 319 p.

#### References

1. Eliseev S.V., Volkov L.N., Kukharenko V.P. Dynamics of mechanical oscillatory systems with additional ties. Novosibirsk: Nauka, 1990. 386 p.
2. Eliseev S.V., Reznik Yu.I., Khomenko A.P., Zasyadko A.A. Dynamic synthesis in the generalized problems of vibroprotection and a vibration insulation of technical objects. Irkutsk: IGU. 2008. 523 p.
3. Eliseev S.V., Reznik Yu.N., Khomenko A.P. Mechatronics approaches in dynamics of mechanical oscillatory systems. Novosibirsk: Nauka, 2011. 384 p.
4. Khomenko A.P., Eliseev S.V., Ermoshenko Yu.V. System analysis and mathematical modeling in mechatronics of vibroprotection. Irkutsk: IrGUPS, 2012. 288 p.
5. Khomenko A.P., Eliseev S.V. Dynamical absorption of oscillations: concept of feedback tie and structural methods of mathematical modelling. Novosibirsk: Nauka, 2014. 357 p.