

Определение параметров упругопластического тела для расчетов характеристик контакта при вдавливании сферы

П.М. Огар^a, Д.Б. Горохов^b

Братский государственный университет, ул. Макаренко 40, Братск, Россия

^aogar@brstu.ru, ^bgorokhov@brstu.ru

Статья поступила 18.01.2016, принята 20.02.2016

Исследован вопрос определения параметров упругопластического тела по характеристиками условной диаграммы растяжения или по данным марочников (справочников) материалов. В последнее время для решения задач упругопластического внедрения сферы широко применяется метод конечно-элементного моделирования, при этом для описания напряженно-деформированного состояния используются диаграммы истинных напряжений при растяжении. Приведены основные модели упругопластических тел. Показано, что допущение о равенстве условной и истинной деформаций при определении равномерной деформации ϵ_r может привести к относительной погрешности 65%. Показано, что при определении экспоненты упрочнения следует учитывать на пределе текучести остаточную деформацию 0,2%. Приведены выражение для определения экспоненты упрочнения n в зависимости от отношения характеристик σ_u/σ_y условной диаграммы растяжения и величины σ_y/E , а также соответствующие графические зависимости. Полученные результаты позволят повысить точность расчетов упругопластического контакта шероховатых поверхностей по методикам, разработанным авторами.

Ключевые слова: экспонента упрочнения; предел текучести; предел прочности; равномерная деформация; степенной закон Холломоны; условная диаграмма растяжения.

Parameters for elastic-plastic body to calculate contact characteristics under the sphere indentation

P.M. Ogar^a, D.B. Gorokhov^b

Bratsk State University; 40, Makarenko St., Bratsk, Russia

^aogar@brstu.ru, ^bgorokhov@brstu.ru

Received 18.01.2016, accepted 20.02.2016

The question of determining the elastic-plastic body parameters is considered on the characteristics of the engineering stress-strain diagram or according to the data of reference materials. It is shown that recently for solving the problem of elastic-plastic sphere indentation, the method of finite element modeling is widely used. At the same time is given. It is shown that the assumption of the equality of the engineering and true strains to uniform strain ϵ_u determining may lead to a relative error of 65%. It is shown that when determining the hardening exponent for yield strength, the residual deformation of 0.2% should be taken into account. The equation to the determination of hardening exponent n depending on the ratio of the characteristics σ_u/σ_y of the engineering stress-strain diagram and the value of σ_y/E and the corresponding graphic relations are given. The obtained results will increase the accuracy of calculations of elastic-plastic contact of rough surfaces on the techniques developed by the authors.

Key words: hardening exponent; yield strength; ultimate strength; uniform strain; the power Hollomon law; engineering tension diagram.

Введение

Вопросы внедрения сферического индентора в упругопластическое полупространство постоянно находятся в центре внимания исследователей, в частности, при определении механических свойств материалов по параметрам твердости, в задачах трибомеханики и поверхностного пластического деформирования. Многие положения остаются недостаточно изученными, а некоторые предлагаемые решения требуют уточнений и усовершенствований. В последнее время для решения задач упругопластического внедрения сферы широко

применяется метод конечно-элементного моделирования [1–6 и др.], в котором для описания напряженно-деформированного состояния используются параметры различных идеализированных упругопластических тел [7]. Так, например, авторами [1] указанный метод использован для исследования геометрии контакта при нагружении и разгрузке сферы. В работе [2] авторы определили отношение глубины контактной линии h_c к глубине внедрения индентора h и пластическую деформацию ϵ_p . Авторы [3] также определили отношение $h_c/h = c^2$. В работе [4] была определена величина на-

вала, связанная с эффектом *pile-up* — пластическим выдавливанием материала вокруг лунки. Авторами [4] была определена зависимость относительного усилия при внедрении сферы от параметров упругопластического тела и относительного внедрения $\bar{h} = h/R$, где R — радиус сферы.

Модели упругопластических тел. Наиболее часто используется упругопластическое тело Холломона, например [1; 3–5], для которого:

$$\sigma = \begin{cases} E\varepsilon, & \varepsilon \leq \varepsilon_y, \\ K\varepsilon^n, & \varepsilon \geq \varepsilon_y; \end{cases} \quad (1)$$

для упругопластического тела Людвига:

$$\sigma = \begin{cases} E\varepsilon, & \varepsilon \leq \varepsilon_y, \\ \sigma_y + K\varepsilon^n, & \varepsilon \geq \varepsilon_y; \end{cases} \quad (2)$$

где σ_y — предел текучести (*yield strength*); $\varepsilon_y = \sigma_y/E$; E — модуль упругости; n — экспонента упрочнения.

Константа K в выражении (1) находится из условия равенства σ при ε_y :

$$K = \varepsilon_y^{1-n} E = \left(\frac{\sigma_y}{E} \right)^{1-n} E = \sigma_y^{1-n} E.$$

Второе уравнение в выражении (1) можно представить в виде:

$$\frac{\sigma}{\sigma_y} = \left(\frac{E\varepsilon}{\sigma_y} \right)^n = \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_y} \right)^n, \quad (3)$$

где $\varepsilon_y = \sigma_y/E$.

Авторы [6] для описания напряженно-деформированного состояния используют выражение, подобное степенному закону Холломона:

$$\sigma = \begin{cases} E\varepsilon, & \varepsilon \leq \varepsilon_0, \\ E\varepsilon_0^{1-n} \varepsilon^n, & \varepsilon \geq \varepsilon_0; \end{cases} \quad (4)$$

где σ_0 — предел пропорциональности (*proportionality limit stress*).

Материал, описанный выражением (4), представлен тремя параметрами: σ_0 , E и n .

В работе [2] используется закон, предложенный авторами [8]:

$$\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_0} = \begin{cases} \frac{\sigma}{\sigma_0}, & \sigma \leq \sigma_0; \\ \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^{n'}, & \sigma \geq \sigma_0; \end{cases} \quad (5)$$

где $\sigma_0 \equiv \sigma_y$; $\varepsilon_0 \equiv \sigma_y/E$.

Из второго уравнения (5) имеем:

$$\sigma = \sigma_0 \left(\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_0} \right)^{\frac{1}{n'}}. \quad (6)$$

Сравнивая полученное выражение с (1), получим $n = 1/n'$.

Примеры использования результатов конечно-элементного моделирования. Одной из важных проблем при рассмотрении контакта сферы с упругопластическим полупространством является необходимость учета упрочнения материала. Подход к решению этой проблемы, получивший экспериментальное подтверждение, изложен в [9–11 и др.]. Суть метода заключается в использовании для описания упругопластического контакта диаграммы кинетического индентирования, пластической твердости как характеристики сопротивления материала упругопластической деформации, метода подобия деформационных характеристик. Пластическая твердость представляется в виде [12]:

$$HD = K_n(\varepsilon_y, n) \cdot \sigma_y, \quad (6)$$

где $K_n(\varepsilon_y, n)$ — параметр, определенный методом «двукратного вдавливания» по М.С. Дрозду [13] с использованием результатов конечно-элементного анализа [2; 4].

В дальнейшем результаты работ [6-9] для отдельной сферы использовались для сферической неровности при решении задач трибомеханики упругопластического контакта [14–17] и определении герметизирующей способности уплотнительных соединений [18]. В связи с важностью решения вышеуказанных задач возникает вопрос об уточнении параметров упругопластического тела.

Определение параметров истинной диаграммы растяжения. При конечно-элементном моделировании используется идеализированная истинная диаграмма растяжения упругопластических тел (рис. 1), описанных выше, параметры которой могут быть определены либо из условной диаграммы растяжения, либо из данных марочника (справочника) материалов.

Обычно в марочнике (справочнике) задают: предел текучести σ_y , предел прочности σ_u (*ultimate strength*, в отечественной литературе — σ_b), модуль упругости E , относительное удлинение δ_u , относительное сужение ψ_u .

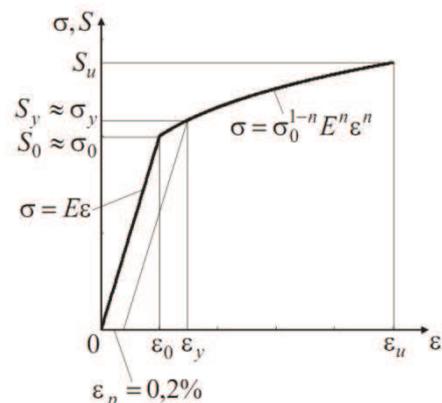


Рис. 1. Идеализированная истинная диаграмма растяжения

Далее необходимо определить экспоненту упрочнения n . Рассмотрим некоторые подходы. Как указано в [19], экспонента упрочнения n (в работе [19] она обозначается m):

$$n = \frac{\ln(S_b/\sigma_T)}{\ln(\epsilon_p/\epsilon_T)}, \quad (7a)$$

здесь S_b , σ_T — соответственно истинный предел прочности и предел текучести материала; ϵ_p , ϵ_T — соответственно предельная равномерная деформация материала и допуск на остаточную деформацию, соответствующую пределу текучести.

В указанной выше работе [2] выражение (7a) ошибочно имело вид:

$$n = \frac{\ln(\sigma_b/\sigma_T)}{\ln(\epsilon_p/\epsilon_T)}. \quad (7b)$$

Однако, как будет показано ниже, в выражениях (7) имеются ошибки.

Согласно данным [20] истинное удлинение:

$$\epsilon = \ln(1 + \delta), \quad (8)$$

где δ — условное удлинение.

Однако, как указано в работе [21, с. 94], «поскольку шейка при испытаниях на растяжение образуется при обычной (условной) деформации 10–15 % , до этого момента логарифмическую деформацию можно приблизительно считать равной обычной, т. е. $\epsilon \approx \delta$. Поэтому до образования шейки истинная диаграмма растяжения отличается от условной только по оси ординат и располагается выше нее».

Как будет показано, такое допущение приводит к существенным ошибкам.

Истинное временное сопротивление:

$$S_u = \sigma_u(1 + \delta_u). \quad (9)$$

Для $\epsilon > \epsilon_y$ согласно выражению (1) истинное напряжение:

$$S = K\epsilon^n, \quad \sigma = \frac{S}{1 + \delta}. \quad (10)$$

Из выражения (8) имеем:

$$1 + \delta = e^\epsilon, \quad \delta = e^\epsilon - 1. \quad (11)$$

Преобразуя выражения (10) и (11), получим:

$$\sigma = \frac{S}{1 + e^\epsilon - 1} = \frac{K\epsilon^n}{e^\epsilon}. \quad (12)$$

Дифференцируя выражение (12) по $d\epsilon$ и приравнявая его к нулю, найдем ϵ_u :

$$\frac{d\sigma}{d\epsilon} = \frac{Kne^\epsilon \epsilon^{n-1} - K\epsilon^n e^\epsilon}{e^{2\epsilon}} = 0, \quad (13)$$

$$n - \epsilon_u = 0, \quad \epsilon_u = n. \quad (14)$$

Аналогичный результат представлен в [22].

В работах С.И. Булычева [23; 24] из-за того, что было принято $\epsilon \approx \delta$, аналогично выражениям (12) и (13) имеем:

$$\sigma = \frac{K\epsilon^n}{1 + \epsilon}; \quad (15)$$

$$\frac{d\sigma}{d\epsilon} = \frac{Kn\epsilon^{n-1}(1 + \epsilon) - K\epsilon^n}{(1 + \epsilon)^2} = 0; \quad (16)$$

$$\epsilon_p = \frac{n}{1 - n}. \quad (17)$$

При $n = 0,4$ при определении ϵ_u получим относительную погрешность 65 %.

Для истинных напряжений и деформаций имеем:

$$S_u = \sigma_u(1 + \delta_u), \quad S_y \approx \sigma_y, \quad \epsilon_u = \ln(1 + \delta_u); \quad (18)$$

$$\epsilon_y = \ln(1 + \delta_y) \approx \delta_y, \quad \epsilon_y = \epsilon_{ye} + \epsilon_{yp} = \sigma_y/E + 0,002. \quad (19)$$

Случай 1. Заданы: σ_y , σ_u , E , $\epsilon_u = n$.

Экспонента упрочнения определяется из выражения:

$$n = \frac{\ln(S_u/\sigma_y)}{\ln(\epsilon_u/(\sigma_y/E + 0,002))} = \frac{\ln(\sigma_u(1 + \delta_u)/\sigma_y)}{\ln n - \ln(\sigma_y/E + 0,002)}, \quad (20)$$

или:

$$n \ln n - n(1 + \ln(\sigma_y/E + 0,002)) - \ln\left(\frac{\sigma_u}{\sigma_y}\right) = 0. \quad (21)$$

$$\epsilon_0 = \left(\frac{\sigma_y/E}{(\sigma_y/E + 0,002)^n}\right)^{\frac{1}{1-n}}, \quad \sigma_0 = \epsilon_0 E. \quad (22)$$

Случай 2. Заданы: предел пропорциональности σ_0 , σ_u , E , $\epsilon_u = n$; $\epsilon_0 = \sigma_0/E$.

Экспонента упрочнения определяется из выражения:

$$n = \frac{\ln(S_u/\sigma_y)}{\ln(\epsilon_u/\epsilon_0)} = \frac{\ln((\sigma_u/\sigma_y)e^n)}{\ln n - \ln(\epsilon_0)}, \quad (23)$$

или:

$$n \ln n - n(1 - \ln(\epsilon_0)) - \ln\left(\frac{\sigma_u}{\sigma_0}\right) = 0. \quad (24)$$

Значение ϵ_y определяем из выражения:

$$\frac{\epsilon_y - 0,002}{\epsilon_y^n} - \epsilon_0^{1-n} = 0. \quad (25)$$

При использовании выражения (7a) получим:

$$n = \frac{\ln(\sigma_b(1 + \delta_p)/\sigma_T)}{\ln(\ln(1 + \delta_p)/0,002)} = \frac{\ln\left(\frac{\sigma_b}{\sigma_T} e^n\right)}{\ln(500 \ln(1 + \delta_p))}; \quad (26)$$

$$5,215n + n \ln n - \ln\left(\frac{\sigma_b}{\sigma_T}\right) = 0. \quad (27)$$

Таким образом, используя характеристики σ_u и σ_y (или σ_u и σ_0) условной диаграммы растяжения, из уравнения (21) (или (24)) определяем экспоненту упрочнения n . На рис. 2 представлена зависимость экспоненты упрочнения n от отношения σ_u/σ_y для разных значений σ_y/E , определенная из выражения (21).

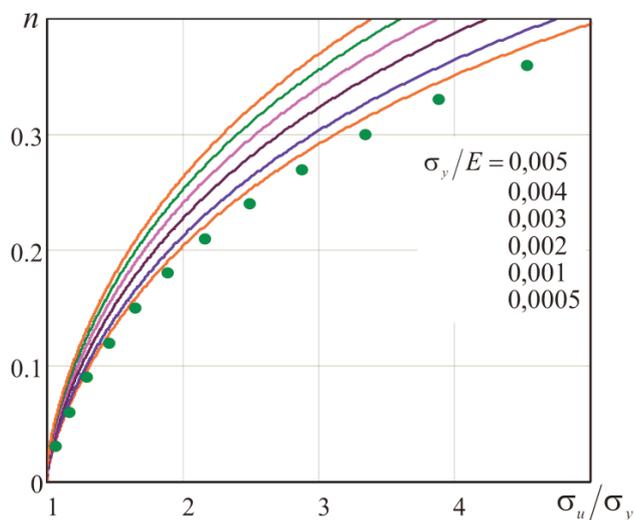


Рис. 2. Зависимость экспоненты n от отношения характеристик σ_u/σ_y условной диаграммы растяжения при значениях $\sigma_y/E = 0,0005..0,005$. Точками обозначена зависимость (27)

Заключение

1. Допущение о том, что $\varepsilon \approx \delta$, для $n=0,4$ приводит к относительной погрешности 65 % при определении ε_u .
2. При определении экспоненты упрочнения следует учитывать на пределе текучести остаточную деформацию 0,2 %.
3. Полученное выражение для определения экспоненты упрочнения, содержащее отношение характеристик σ_u/σ_y условной диаграммы растяжения и отношение σ_y/E , позволяет повысить точность расчетов упругопластического контакта шероховатых поверхностей по методикам, приведенным в работах [14–17].

Исследования проведены при поддержке Минобрнауки России в рамках госзадания № 2014/10 на 2016 г. (проект № 1754).

Литература

1. Taljat B., Pharr G.M. Development of pile-up during spherical indentation of elastic-plastic solids // International Journal of Solids and Structures. 2004. № 41. P. 3891-3904.
2. Lee H., Lee J.H., Pharr G.M. A numerical approach to spherical indentation techniques for material property evaluation // J. Mech. Phys. Solids 2005. № 53. P. 2037-2069.
3. Hernot X., Bartier O., Bekouche Y., Mauvoisin G. El Abdi R. Influence of penetration depth and mechanical properties on contact radius determination for spherical indentation // International Journal of Solids and Structures. 2006. № 43. P. 4136-4153.

4. Kim S.H., Lee B.W., Choi Y., Kwon D. Quantitative determination of contact depth during spherical indentation of metallic materials—a FEM study // Materials Science and Engineering A. 2006. Vol. 415. P. 59-65.

5. Bartier O., Hernot X. Mauvoisin G. Theoretical and experimental analysis of contact radius for spherical indentation // Mechanics of Materials. 2010. Vol. 42. P. 640-656.

6. Beghini M., Bertini L., Fontanari V. Evaluation of the stress-strain curve of metallic materials by spherical indentation // International Journal of Solids and Structures. 2006. Vol. 43. P. 2441-2459.

7. Турченко А.В. Влияние упрочняемости материалов на герметизирующую способность уплотнительных соединений: дис. ... канд. техн. наук. Братск, 2013. 135 с.

8. Rice J. R., Rosengren G.F. Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 1968. Vol. 16 (1). P. 1–12.

9. Огар П.М., Тарасов В.А., Турченко А.В. Развитие инженерных расчетов характеристик контакта жесткой сферы с упругопластическим полупространством // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2012. № 1(23). С. 80-87.

10. Огар П.М., Тарасов В.А., Турченко А.В. Геометрия контакта при упругопластическом внедрении сферической неровности // Системы. Методы. Технологии. 2012. № 1 (13). С. 9-16.

11. Огар П.М., Тарасов В.А., Турченко А.В. Описание взаимодействия жесткой сферы с упругопластическим полупространством // Труды Братского государственного университета. Сер. Естественные и инженерные науки. 2012. Т. 1. С. 163-169.

12. Огар П.М., Тарасов В.А., Турченко А.В. Влияние характеристик упрочняемого материала на упругопластическое внедрение сферической неровности // Системы. Методы. Технологии. 2011. № 4 (12). С. 29-34.

13. Дрозд М.С., Матлин М.М., Сидякин Ю.И. Инженерные расчеты упругопластической контактной деформации. М.: Машиностроение, 1986. 234 с.

14. Огар П.М., Тарасов В.А., Турченко А.В. Контакт жесткой шероховатой поверхности с упругопластическим полупространством // Системы. Методы. Технологии. 2012. № 1 (13). С. 17-22.

15. Огар П.М., Тарасов В.А., Турченко А.В. Трибомеханика упругопластического контакта // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2013. № 2. С. 116-122.

16. Огар П.М., Тарасов В.А., Турченко А.В. Контактное взаимодействие жесткой шероховатой поверхности через слой упругопластического покрытия // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2012. № 3. С. 42-45.

17. Огар П.М., Тарасов В.А., Турченко А.В. Влияние толщины упругопластического покрытия на относительную площадь контакта // Системы. Методы. Технологии. 2012. № 4. С. 14-17.

18. Алпатов Ю.Н., Тарасов В.А., Турченко А.В. Влияние характеристик упрочняемого материала на герметизирующую способность соединений // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2012. № 2. С. 83-88.

19. Матлин М.М., Лебский С.Л., Мозгунова А.И. Закономерности упругопластического контакта в задачах поверхностного пластического упрочнения. М.: Машиностроение-1, 2007. 218 с.

20. Матюнин В.М. Механико-технологические испытания и свойства конструкционных материалов. М.: Изд-во МЭИ, 2005. 140 с.

21. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975. 400 с.

22. ASTM E646-07e1, Standard Test Method for Tensile Strain-Hardening Exponents (n -Values) [Электронный ресурс]

of Metallic Sheet Materials, ASTM International, West Conshohocken, PA, 2007 // URL: <http://www.astm.org/Standards/E646.htm> (дата обращения: 10.07. 2015).

23. Булычев С.И. Переход от диаграмм вдавливания к диаграммам растяжения с учетом упроченного поверхностного слоя // Деформация и разрушение материалов. 2010. № 2. С. 43-48.

24. Булычев С.И. Твердость и гистерезис на пределе текучести // Деформация и разрушение материалов. 2011. № 1. С. 41-45.

References

1. Taljat B., Pharr G.M. Development of pile-up during spherical indentation of elastic-plastic solids // International Journal of Solids and Structures. 2004. № 41. P. 3891-3904.

2. Lee H., Lee J.H., Pharr G.M. A numerical approach to spherical indentation techniques for material property evaluation // J. Mech. Phys. Solids 2005. № 53. P. 2037-2069.

3. Hernot X., Bartier O., Bekouche Y., Mauvoisin G. El Abdi R. Influence of penetration depth and mechanical properties on contact radius determination for spherical indentation // International Journal of Solids and Structures. 2006. № 43. P. 4136-4153.

4. Kim S.H., Lee B.W., Choi Y., Kwon D. Quantitative determination of contact depth during spherical indentation of metallic materials-a FEM study // Materials Science and Engineering A. 2006. Vol. 415. P. 59-65.

5. Bartier O., Hernot X. Mauvoisin G. Theoretical and experimental analysis of contact radius for spherical indentation // Mechanics of Materials. 2010. Vol. 42. P. 640-656.

6. Beghini M., Bertini L., Fontanari V. Evaluation of the stress-strain curve of metallic materials by spherical indentation // International Journal of Solids and Structures. 2006. Vol. 43. P. 2441-2459.

7. Turchenko A.V. The Influence of materials hardenability on the sealing ability of the sealing of joints: dis. ... kand. tekhn. nauk. Bratsk, 2013. 135 p.

8. Rice J.R., Rosengren G.F. Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 1968. Vol. 16 (1). P. 1-12.

9. Ogar P.M., Tarasov V.A., Turchenko A.V. The development of engineering design of specifications of contact rigid sphere with elastic-plastic half space // Sovremennye tekhnologii. Sistemnyi analiz. Modelirovanie. 2012. № 1 (23). P. 80-87.

10. Ogar P.M., Tarasov V.A., Turchenko A.V. Contact geometry in the process of elastic-plastic indentation of a spherical

asperity // Sistemy. Metody. Tekhnologii. 2012. № 1 (13). P. 9-16.

11. Ogar P.M., Tarasov V.A., Turchenko A.V. Description of the contact of a rigid sphere and elastoplastic half-space // Trudy Bratskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. Estestvennye i inzhenernye nauki. 2012. T. 1. P. 163-169.

12. Ogar P.M., Tarasov V.A., Turchenko A.V. Effect of the hardenable material characteristics on a spherical asperity elastoplastic indentation // Systems. Methods. Technologies. 2011. № 4 (12). P. 29-34.

13. Drozd M.S., Matlin M.M., Sidiyakin Yu.I. Engineering design of elastoplastic contact deformation. M.: Mashinostroenie, 1986. 234 p.

14. Ogar P.M., Tarasov V.A., Turchenko A.V. Rough asperity and elastic-plastic half-space contact // Systems. Methods. Technologies. 2012. № 1 (13). P. 17-22.

15. Ogar P.M., Tarasov V.A., Turchenko A.V. Tribomechanics of elastic-plastic contact // Modern technologies. System analysis. Modeling. 2013. № 2. P. 116-122.

16. Ogar P.M., Tarasov V.A., Turchenko A.V. Rigid rough surface contacting through a layer of elastoplastic coverage // Sovremennye tekhnologii. Sistemnyi analiz. Modelirovanie. 2012. № 3. P. 42-45.

17. Ogar P.M., Tarasov V.A., Turchenko A.V. Effect of elastoplastic coating thickness on the relative contact area // Systems. Methods. Technologies. 2012. № 4. P. 14-17.

18. Alpatov Yu.N., Tarasov V.A., Turchenko A.V. Effect of the characteristics of the reinforcing material on the sealing ability of the compounds // Modern technologies. System analysis. Modeling. 2012. № 2. P. 83-88.

19. Matlin M.M., Lebskii S.L., Mozgunova A.I. The regularities of elastoplastic contact in the problems of surface plastic hardening. M.: Mashinostroenie-1, 2007. 218 p.

20. Matyunin V.M. Mechanical and technological tests and the properties of structural materials. M.: Izd-vo MEI, 2005. 140 p.

21. Malinin N.N. Applied theory of plasticity and creep. M.: Mashinostroenie, 1975. 400 p.

22. ASTM E646-07e1, Standard Test Method for Tensile Strain-Hardening Exponents (n -Values) [Elektronnyi resurs] of Metallic Sheet Materials, ASTM International, West Conshohocken, PA, 2007 // URL: <http://www.astm.org/Standards/E646.htm> (data obrashcheniya: 10.07.2015).

23. Bulychev S.I. Transition from indentation diagrams to stress-strain diagrams taking into consideration hardened surface layer // Deformatsiya i Razrushenie materialov. 2010. № 2. P. 43-48.

24. Bulychev S.I. Hardness and hysteresis at the yield strength // Deformatsiya i Razrushenie materialov. 2011. №1. P. 41-45.