

4. Eliseev S.V., Moskovskikh A.O., Bol'shakov R.S., Savchenko A.A. Possibilities of integration of methods of chains theory and automation control theory in tasks of machines dynamics [Elektronnyi resurs] // Nauka i obrazovanie: elektron. nauchno-tekhn. izd. 2012. № 6. URL. <http://technomag.edu.ru/doc/378699.html> (data obrashcheniya: 10.06.2012).
5. Belokobyl'skii S.V., Eliseev S.V., Kashuba V.B. Applied tasks of the structural theory of vibroprotective systems. SPb.: Politehnika. 2013. 374 p.
6. Khomenko A. P., Eliseev S. V. Dynamical absorbtion of oscillations: concept of feedback tie and structural methods of mathematical modeling. Novosibirsk: Nauka, 2014. 357 p.
7. Panovko G.Ya. Lectures on bases of theory of vibration machines and technologies: ucheb. posobie dlya vuzov. M.: Izdvo MGTU im. N.E. Baumana, 2008. 192 p.
8. Belokobyl'skii S.V., Eliseev S.V., Sitov I.S. Dynamics of mechanical systems. Lever and inertial and elastic ties. SPb., Politehnika, 2013. 319 p.
9. Khomenko A.P., Eliseev S.V. Quasi-elements in mechanical oscillation systems. Features of systems at exclusion of variables of dynamical condition // Modern technologies. System analysis. Modelling. 2013. № 2 (38). P. 8-17.
10. Genkin M.D., Ryaboi V.M. Elastic-inertial vibroisolation systems. Limiting possibilities, optimal structures. M.: Nauka, 1988. 191 p.
11. Harris' C.M., Allan G. Shock and Vibration: handbook. USA // Mc Graw-Hill, New-York. 2002. P. 877.
12. Babakov I.M. Oscillations theory. M.: Nauka, 1968. 650 p.
13. Vibrations in technique: spravochnik: v 6 t. T. 5. Izmereniya i ispytaniya / pod red. M.N. Genkina. M.: Mashinostroenie, 1981. 496 p.
14. Gardner F., Berns Dzh.L. Transient processes in linear systems with concentrated constants. M.:L.: GITTL, 1949. 528 p.
15. Eliseev S.V., Upyr' R.Yu., Gozbenko V.E. Modern situation of developments in the region of transport dynamics. Irkutsk: IrGUPS, 2009. 128 p. Dep. v VINITI 27.11.2009 № 739 – V 2009.
16. Eliseev S.V., Belokobyl'skii S.V., Upyr' R.Yu., Gozbenko V.E. Lever ties in tasks of dynamics of mechanical oscillation systems. Theoretical aspects. Irkutsk: IrGUPS, 2009. 158 p. Dep. v VINITI 27.11.2009 № 737 - V 2009.
17. Khomenko A.P., Eliseev S.V., Artyunin A.I., Parshuta E.A., Kaimov E.V. Mechanisms in elastic oscillatory systems: features of the accounting of dynamic properties, problems of vibration protection of machines, devices and equipment. Irkutsk: IrGUPS, 2013. 187 p. Dep. v VINITI 15.08.2013 № 243 – V 2013.
18. Eliseev S.V., Reznik Yu.N., Khomenko A.P., Zasyadko A.A. Dynamic synthesis in the generalized problems of vibroprotection and a vibration insulation of technical objects. Irkutsk: izdvo IGU, 2008. 523 p.

УДК 534.014, 621.752.2, 62.752, 621:534.833; 888.6

## Некоторые подходы к обоснованию схемы инерционного возбуждения в технологических вибрационных машинах

А.В. Елисеев<sup>1 a</sup>, Л.А. Мамаев<sup>2 b</sup>, И.С. Ситов<sup>2 c</sup>

<sup>1</sup>Иркутский государственный университет путей сообщения, ул. Чернышевского 15, Иркутск, Россия

<sup>2</sup>Братский государственный университет, ул. Макаренко 40, Братск, Россия

<sup>a</sup>eavsh@ya.ru, <sup>b</sup>pro\_uch@brstu.ru, <sup>c</sup>sitov@yandex.ru

Статья поступила 20.10.2015, принята 5.11.2015

*Рассматриваются вопросы развития теории построения вибрационных технологических машин с регулируемыми параметрами и структурой вибрационного поля. Для оценки состояния вибрационного поля рабочего органа вибрационной машины в виде твердого тела на упругих опорах вводится понятие коэффициента межпарциальных связей в виде отношения амплитуд габаритных точек стенда. Предложена методика построения математических моделей вибростенда, получен ряд аналитических соотношений, проведены исследования и построены графики, характеризующие возможности изменения динамических свойств при использовании настроечных параметров. Показана возможность реализации специфических режимов работы вибростенда, связанных с возможностями реализации режимов динамического гашения по двум координатам. Предлагаемые расчетные схемы ориентированы на конструктивно технические формы вибростендов с возбуждением в определенной точке рабочего органа стенда. Рассматриваются возможности использования дополнительных устройств преобразования движений, которые могут вводиться в механические колебательные контуры для обеспечения формирования необходимой структуры вибрационного поля за счет изменения приведенных массоинерционных параметров. Приводится схема формирования вибрационного поля на основе использования сосредоточенного силового воздействия. Точка приложения этого воздействия может размещаться в определенных зонах, что обеспечивает достижение необходимых технологических режимов.*

**Ключевые слова:** вибрационное поле; структура; парциальные связи; структурная схема; отношение амплитуд.

# Some approaches to substantiation of the scheme of inertial excitation in technological vibrating machines

A.V. Eliseev<sup>1 a</sup>, L.A. Mamaev<sup>2 b</sup>, I.S. Sitov<sup>2 c</sup>

<sup>1</sup>Irkutsk State Transport University; 15, Chernishevsky St., Irkutsk, Russia

<sup>2</sup>Bratsk State University; 40, Makarenko St., Bratsk, Russia

<sup>a</sup>eavsh@ya.ru, <sup>b</sup>pro\_uch@brstu.ru, <sup>c</sup>sitov@yandex.ru

Received 20.10.2015, accepted 5.11.2015

*Development tasks have been considered for the theory of constructing vibration technological machines with adjustable parameters and vibration field structure. To assess vibration field condition of working body of vibration machine in the form of a solid body on elastic support, the concept of interpartial connections' coefficient in the form of amplitude ratio for dimensional stand points has been introduced. Technique has been offered for constructing mathematical models for vibration stand; a number of analytical ratios have been received; research has been conducted and graphs have been done characterizing possibilities for dynamic property changes when using adjusting parameters. Possibility has been demonstrated to realize specific operating modes of the vibration stand connected with opportunities to realize modes of dynamic suppression on two coordinates. The schemes proposed are focused on structurally technical forms of vibration stands with the excitement in a certain point of working body of the vibration stand. The article deals with the use of additional devices to convert motions which can be introduced into mechanical oscillating circuit to ensure the formation of necessary structure of vibration field due to the change of mass-inertial parameters given. Scheme for forming vibration field through the use of concentrated force action has been presented. The application point of this impact can be accommodated in definite areas that ensure receiving technological modes desired.*

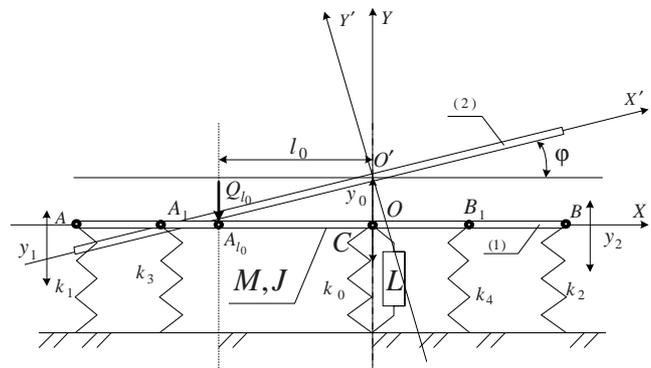
**Key words:** vibration field; structure; partial connections; structural scheme; amplitude ratio.

**Введение.** Для реализации технологических вибрационных процессов, в ходе которых рабочая гранулированная среда взаимодействует с поверхностью обрабатываемой детали, необходимо создание условий одномерности параметров движения рабочего органа. Если для технологических машин с одной степенью свободы это не представляет больших проблем, особенно в тех случаях, когда ведется обработка маломерных деталей, то при обработке деталей большой длины в силу различных причин возникают переходы к режимам плоского движения, при которых рабочий орган совершает угловые и вертикальные колебания. Сложение двух гармонических вибраций приводит к образованию линии узлов, то есть появлению некоторой зоны рабочего органа, где невозможно создание режима работы с непрерывным подбрасыванием рабочей среды. В более сложной постановке задачи подобного рода рассматривались в работах [1–3]. Изменение структуры вибрационного поля в нужном направлении обеспечивают с помощью специальных управляемых технических средств, преобразующих технологический комплекс в систему автоматического управления. В связи с этим возникают вопросы поиска и разработки средств и способов изменения динамического состояния рабочих органов.

В предлагаемой статье рассматриваются возможности использования дополнительных устройств преобразования движений, которые могут вводиться в механические колебательные контуры для обеспечения формирования необходимой структуры вибрационного поля за счет изменения приведенных массоинерционных параметров.

**I. Общие положения. Постановка задачи исследования.** Рассматривается механическая колебательная система, состоящая из твердого тела массы  $M$  и обла-

дающая моментом инерции  $J$  относительно центра тяжести в точке  $C$  (рис. 1).



**Рис. 1.** Расчетная схема системы: 1 — положение статического равновесия; 2 — произвольное положение;  $Q_{l_0}$  — сила, отражающая вибрационное возмущение приложенное к точке твердого тела;  $OXY$  — неподвижная система координат связанная с положением статического равновесия;  $O'X'Y'$  — система координат, связанная с твердым телом

В рассматриваемой системе твердое тело или рабочий орган опирается на упругие элементы в точках  $A, A_1, C, B_1, B$ , имеющие жесткости  $k_1, k_3, k_0, k_2, k_4$  соответственно. В частности,  $k_0$  — жесткость упругого элемента, имеющего крепеж в точке  $C$ , совпадающий с центром тяжести (т.  $C$ ) и находящийся на отрезке, соединяющем точки  $A$  и  $B$ .

Гармоническое силовое возмущения  $Q_{l_0}$  приложено в точке  $A_{l_0}$  на расстоянии  $l_0$  от точки  $C$ . Предполагается, что силовое возмущение может быть приложено

за пределами рабочего органа, т. е. для  $l_0$  могут быть справедливы соотношения  $l_0 > l_1$  или  $l_0 < -l_2$ . Точка приложения  $A_{l_0}$  вибрационного возмущения  $Q_{l_0}$  отражает место установки вибрационного возбудителя. Характеристика устройства для преобразования движения представлена массоинерционным коэффициентом  $L$ .

Предполагается, что система совершает малые колебания относительно положения статического равновесия, и силы трения предполагаются малыми. Рассматриваются одновременно две неподвижные системы обобщенных координат, определяемые положением статического равновесия твердого тела.

Обобщенные координаты  $\{y_1, y_2\}$  определяют смещения точек  $A, B$  относительно положения статического равновесия. Обобщенные координаты  $\{y_0, \varphi\}$  определяют смещение центра тяжести по вертикали и угол поворота. В декартовой системе координат  $O'X'Y'$ , жестко связанной с твердым телом, абсциссы точек  $A, A_1, B_1, B$  соответственно равны  $-l_1, -l_{01}, l_{02}, l_2$ , абсцисса точки приложения силы  $Q_{l_0}$  равна  $-l_0$ , расстояние между точками  $A, B$  составляет  $|AB| = l$ .

С учетом предположений обобщенные координаты двух неподвижных систем отсчета  $y_1, y_2$  и  $y_0, \varphi$  связаны соотношениями:

$$\begin{cases} y_0 = ay_1 + by_2 \\ \varphi = c(y_2 - y_1) \end{cases} \text{ и } \begin{cases} y_1 = y_0 - l_1\varphi \\ y_2 = y_0 + l_2\varphi \end{cases}, \quad (1)$$

где  $a = \frac{l_2}{l_1 + l_2}$ ;  $b = \frac{l_1}{l_1 + l_2}$ ;  $c = \frac{1}{l_1 + l_2}$ .

Математическая модель вибрационного стенда, реализующего процесс вибрационного упрочнения, в ряде случаев может быть сведена к линейной модели малых колебаний твердого тела с двумя степенями свободы, помещенного на упругие элементы [4; 5]. Особенностью технологического процесса является требование к однородности и одномерности вибрационного поля, создаваемого одним или несколькими вибраторами. В математической модели влияние вибраторов, помещенных на вибростенд, может быть отражено приложением гармонических сил к определенным точкам исходного твердого тела. Предполагается, что для возможности настройки вибрационного поля в структуру колебательной системы вводится механическое устройство, характеризующее жесткостью  $k_0$  и массоинерционной характеристикой  $L$ .

Целью предлагаемого исследования является определение зависимости структуры вибрационного поля от параметров устройства, вводимого в механический колебательный контур, для настройки режимов колебания твердого тела в соответствии с технологическими требованиями.

## II. Описание системы. Математическая модель.

Для составления математической модели могут быть

выбраны различные системы обобщенных координат. Рассматриваются модели в двух системах координат.

**Система координат  $y_1, y_2$ .** В системе  $\{y_1, y_2\}$  кинетическая и потенциальная энергии имеют вид:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} M \cdot (a\dot{y}_1 + b\dot{y}_2)^2 + \\ &+ \frac{1}{2} L(a\dot{y}_1 + b\dot{y}_2)^2 + \frac{1}{2} J(c(\dot{y}_2 - \dot{y}_1))^2, \\ \Pi &= \frac{1}{2} k_0 \cdot (ay_1 + by_2)^2 + \frac{1}{2} k_1 \cdot y_1^2 + \\ &+ \frac{1}{2} k_2 \cdot y_2^2 + \frac{1}{2} k_3 \cdot (ay_1 + by_2 - l_{01}c(y_2 - y_1))^2 + \\ &+ \frac{1}{2} k_4 \cdot (ay_1 + by_2 + l_{02}c(y_2 - y_1))^2 \end{aligned} \quad (2)$$

В соответствии с формализмом Лагранжа составляется система дифференциальных уравнений от обобщенных координат  $\{y_1, y_2\}$ :

$$\begin{cases} (Ma^2 + Jc^2 + La^2)\ddot{y}_1 + (Mab - Jc^2 + Lab)\ddot{y}_2 + \\ + (k_1 + k_0a^2 + k_3a_1^2 + k_4a_2^2) \cdot y_1 + \\ + (k_0ab + k_3a_1b_1 + k_4a_2b_2) y_2 = Q_{y_1} \\ (Mab - Jc^2 + Lab)\ddot{y}_1 + (Mb^2 + Jc^2 + Lb^2)\ddot{y}_2 + \\ + (k_0ab + k_3a_1b_1 + k_4a_2b_2) \cdot y_1 + \\ + (k_2 + k_0b^2 + k_3b_1^2 + k_4b_2^2) y_2 = Q_{y_2} \end{cases} \quad (3)$$

После преобразования Лапласа формируется алгебраическая система относительно изображений  $\bar{y}_1$  и  $\bar{y}_2$ :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_1 \\ \bar{Q}_2 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Коэффициенты алгебраической системы (4) представлены в табл. 1. Данная система разрешается аналитически и служит модельным примером для исследования особенностей реализации режимов различных форм.

Таблица 1

Коэффициенты системы уравнений в обобщенных координатах  $y_1, y_2$

$a_{11}$	$a_{12}$
$(Ma^2 + Jc^2 + La^2)p^2 + k_1 + k_0a^2 + k_3a_1^2 + k_4a_2^2$	$(Mab - Jc^2 + Lab)p^2 + k_0ab + k_3a_1b_1 + k_4a_2b_2$
$a_{21}$	$a_{22}$
$(Mab - Jc^2 + Lab)p^2 + k_0ab + k_3a_1b_1 + k_4a_2b_2$	$(Mb^2 + Jc^2 + Lb^2)p^2 + k_2 + k_0b^2 + k_3b_1^2 + k_4b_2^2$
$Q_1$	$Q_2$
$-\alpha Q_{l_0}$	$-\beta Q_{l_0}$

Эквивалентная в динамическом отношении структурная схема с выделенными парциальными система-

ми, взаимодействующими через квазиупругие связи, представлена на рис. 2.

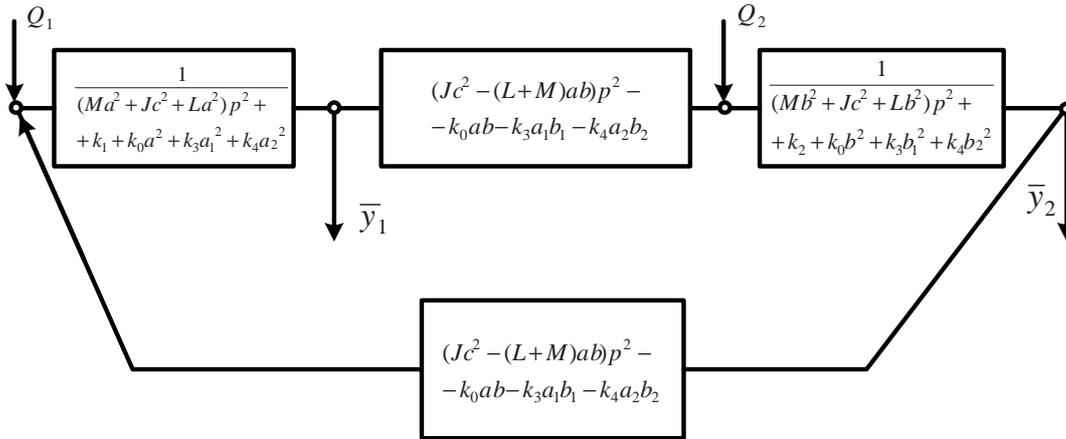


Рис. 2. Структурная схема. Система координат  $\{y_1, y_2\}$

Обобщенные силы  $Q_1$  и  $Q_2$  рассматриваются как входные сигналы, а обобщенные координаты  $y_1, y_2$  выступают в роли выходных сигналов.

Межпарциальные связи характеризуются выражением:

$$a_{12} = (Mab - Jc^2 + Lab)p^2 + k_0ab + k_3a_1b_1 + k_4a_2b_2.$$

Обнуление межпарциальных связей приводит к тому, что система распадается на две независимые подсистемы. Передаточные функции двух независимых систем имеет вид:

$$W_{11}(p) = \frac{y_1}{Q_1}, W_{22}(p) = \frac{\bar{y}_2}{Q_2}.$$

Приведенная жесткость к точкам  $A$  и  $B$  составляет:

$$k_A = k_1 + k_0a^2 + k_3a_1^2 + k_4a_2^2, \tag{5}$$

$$k_B = k_2 + k_0b^2 + k_3b_1^2 + k_4b_2^2.$$

**Система координат  $y_0, \varphi$ .** Выражения для кинетической и потенциальной энергии в системе координат  $y_0, \varphi$  примут вид:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}M \cdot \dot{y}_0^2 + \frac{1}{2}L\dot{y}_0^2 + \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2, \\ \Pi &= \frac{1}{2}k_0 \cdot y_0^2 + \frac{1}{2}k_1 \cdot (y_0 - l_1\varphi)^2 + \\ &+ \frac{1}{2}k_2 \cdot (y_0 + l_2\varphi)^2 + \frac{1}{2}k_3 \cdot (y_0 - l_{01}\varphi)^2 + \\ &+ \frac{1}{2}k_4 \cdot (y_0 + l_{02}\varphi)^2. \end{aligned} \tag{6}$$

В соответствии с формализмом Лагранжа система дифференциальных уравнений в координатах  $y_0, \varphi$  имеет вид:

$$\begin{cases} (M + L)\ddot{y}_0 + (k_0 + k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \cdot y_0 + \\ + (-k_1l_1 + k_2l_2 - k_3 \cdot l_{01} + k_4 \cdot l_{02})\varphi = Q_{y_0}, \\ J\ddot{\varphi} + (-l_1 \cdot k_1 + l_2 \cdot k_2 - l_{01} \cdot k_3 + l_{02} \cdot k_4) \cdot y_0 + \\ + (k_1 \cdot l_1^2 + k_2 \cdot l_2^2 + k_3 \cdot l_{01}^2 + k_4 \cdot l_{02}^2)\varphi = Q_{\varphi}. \end{cases} \tag{7}$$

Для получения решения и анализа системы (7) используются методы операционного исчисления. Преобразование Лапласа системы дифференциальных уравнений относительно обобщенных координат  $\{y_0, \varphi\}$  приводит к алгебраической системе относительно изображений  $\{\bar{y}_0, \bar{\varphi}\}$ :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{y}_0 \\ \bar{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_1 \\ \bar{Q}_2 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Коэффициенты матрицы системы (8) и вектора столбца обобщенных сил представлены в табл. 2.

Таблица 2

Коэффициенты системы уравнений в координатах  $y_0, \varphi$

$a_{11}$	$a_{12}$
$(M + L)p^2 + (k_0 + k_1 + k_2 + k_3 + k_4)$	$-k_1l_1 + k_2l_2 - k_3 \cdot l_{01} + k_4 \cdot l_{02}$
$a_{21}$	$a_{22}$
$-k_1l_1 + k_2l_2 - k_3 \cdot l_{01} + k_4 \cdot l_{02}$	$Jp^2 + k_1 \cdot l_1^2 + k_2 \cdot l_2^2 + k_3 \cdot l_{01}^2 + k_4 \cdot l_{02}^2$
$Q_1$	$Q_2$
$Q_{y_0}$	$Q_{\varphi}$

Соответствующая структурная схема с выделенными парциальными системами представлена на рис. 3.

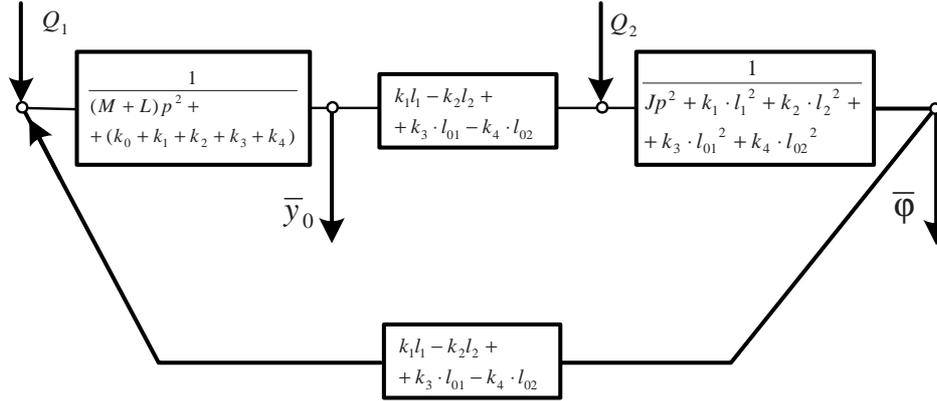


Рис. 3. Структурная схема. Система координат  $\{y_0, \varphi\}$

Структурная схема отражает особенности соответствующей системы координат. Аналитическая запись решений позволяет сформулировать условия формы движения системы. На структурной схеме (рис. 3) обобщенные силы  $Q_1$  и  $Q_2$  рассматриваются как входные сигналы, а обобщенные координаты  $\{\bar{y}_0, \bar{\varphi}\}$  выступают в роли выходных сигналов. На структурной схеме отражены межпарциальные связи:

$$a_{12} = k_1 l_1 - k_2 l_2 + k_3 \cdot l_{01} - k_4 \cdot l_{02}. \quad (9)$$

При обнулении межпарциальных связей система распадается на две независимых подсистемы.

Таким образом, математические модели в различных системах обобщенных координат, представленные в структурных схемах, отражают особенности форм движения.

**III. Условие однородности вибрационного поля. Особенности приложения силового возмущения.** Условие однородности вибрационного поля определяется системой обобщенных координат, описывающих состояние колебательной системы. В системе координат  $\{y_1, y_2\}$  условие однородности рассматривается как равенство обобщенных координат:

$$y_1 = y_2. \quad (10)$$

В системе координат  $\{y_0, \varphi\}$  однородность вибрационного поля означает отсутствие угловых качаний:

$$\varphi = 0. \quad (11)$$

Полагая, что источник вибрационного возбуждения может быть установлен в различные точки вибрационного органа, в качестве параметра математической модели рассматривается смещение  $l_0$  точки приложения возбуждающей силы относительно центра тяжести рабочего органа. Интерес представляют зависимости частот, обеспечивающих однородное поле, от различных параметров системы, включающих параметр  $l_0$ .

Для определения частоты внешнего воздействия, обеспечивающей условие однородности, рассматриваются передаточные функции.

$$W_{11}(p) = \left. \frac{\bar{y}_1}{Q_1} \right|_{Q_2=0} = \frac{(Mb^2 + Jc^2 + Lb^2)p^2 + k_B}{A}, \quad (12)$$

$$W_{21}(p) = \left. \frac{\bar{y}_2}{Q_1} \right|_{Q_2=0} = \frac{(Jc^2 - (M+L)ab)p^2 - k_0 ab - k_3 a_1 b_1 - k_4 a_2 b_2}{A}, \quad (13)$$

$$W_{12}(p) = \left. \frac{\bar{y}_1}{Q_2} \right|_{Q_1=0} = \frac{(Jc^2 - (M+L)ab)p^2 - k_0 ab - k_3 a_1 b_1 - k_4 a_2 b_2}{A}, \quad (14)$$

$$W_{22}(p) = \left. \frac{\bar{y}_2}{Q_2} \right|_{Q_1=0} = \frac{(Ma^2 + Jc^2 + La^2)p^2 + k_A}{A}, \quad (15)$$

где  $\bar{A} = a_{22} \cdot a_{11} - a_{12} \cdot a_{21}$  — характеристический многочлен системы.

Условие однородности вибрационного поля соотносится с представлением о том, что при заданных внешних возмущениях отношение выходных сигналов на парциальных системах будет равно единице:

$$\frac{\bar{y}_2}{\bar{y}_1} = 1. \quad (16)$$

При условии  $k_3 = 0, k_4 = 0$  соотношения однородности (16) принимают вид:

$$\frac{-\alpha[(Jc^2 - (M+L)ab)p^2 - k_0 ab] - \beta[(Ma^2 + Jc^2 + La^2)p^2 + k_1 + k_0 a^2]}{-\alpha[(Mb^2 + Jc^2 + Lb^2)p^2 + k_2 + k_0 b^2] - \beta[(Jc^2 - (M+L)ab)p^2 - k_0 ab]} = 1. \quad (17)$$

Разрешение уравнения (17) относительно  $p = i\omega$  позволяет определить частоту внешнего воздействия  $\omega_{Q_0, L}$ , обеспечивающую однородную структуру вибрационного поля в зависимости от параметров вводимого устройства и приложенной силы:

$$\omega^2_{Q_0,L} = \frac{k_0}{M+L} + \left(1 - \frac{l_1}{l_0}\right) \frac{k_1}{(M+L)} + \left(1 + \frac{l_2}{l_0}\right) \frac{k_2}{(M+L)}. \quad (18)$$

На частоте  $\omega_{Q_0,L}$  изображения  $\bar{y}_1$  и  $\bar{y}_2$  равны между собой и составляют величину:

$$\bar{y}_1 = \bar{y}_2 = -\frac{l_0}{l_1 k_1 - l_2 k_2} \bar{Q}_0. \quad (19)$$

С учетом аналитических особенностей выражения (19) решение  $\bar{y}_1$  существует и не равно нулю, если выполнены условия:

$$\begin{cases} l_1 k_1 - l_2 k_2 \neq 0 \\ l_0 \neq 0 \end{cases}. \quad (20)$$

Частота режима однородного движения твердого тела реализуется (т. е.  $\omega^2_{Q_0,L} > 0$ ), если для величины смещения  $l_0$  точки  $A_{l_0}$  приложения силы  $Q_{l_0}$  от центра тяжести  $C$  выполнено соотношение:

$$l_0 > \max\left\{0, \frac{l_1 k_1 - l_2 k_2}{k_0 + k_1 + k_2}\right\} \quad (21)$$

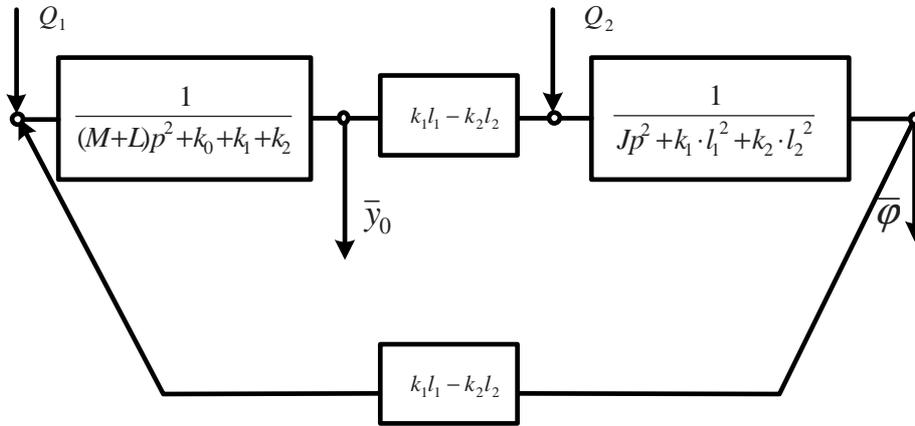


Рис. 4. Структурная схема

Таким образом, равенство нулю величины  $k_1 l_1 - k_2 l_2$  означает устранение межпарциальной связи. В этом случае система с двумя степенями свободы распадается на две независимых системы.

**Приложение силы в точке А.** В этом случае  $l_0 = l_1$ , что влечет условия для частоты и изображения формы колебаний:

$$\omega_{A,L}^2 = \frac{k_0}{M+L} + \left(1 + \frac{l_2}{l_1}\right) \frac{k_2}{M+L}, \quad (24)$$

$$\bar{y}_1 = \bar{y}_2 = -\frac{l_1}{l_1 k_1 - l_2 k_2} \bar{Q}_0. \quad (25)$$

или:

$$l_0 < \min\left\{0, \frac{l_1 k_1 - l_2 k_2}{k_0 + k_1 + k_2}\right\}. \quad (22)$$

Таким образом, условия (21), (22) обеспечивают возможность на частоте  $\omega^2_{Q_0,L}$  реализовать режим однородного вибрационного поля.

Рассматриваются особенности режимов однородного колебания в зависимости от точки приложения силы.

**Приложение силы к центру тяжести.** В таком варианте условие однородности вибрационного поля (16) преобразуется в соотношение:

$$l_1 k_1 - l_2 k_2 = 0. \quad (23)$$

Это, в свою очередь, означает, что связь между парциальными системами в системе координат  $y_0, \varphi$  отсутствует. В такой системе решение  $\bar{\varphi} = 0$  возможно на любой частоте внешних возмущений, которые приложены в точку центра тяжести  $C$  и не оказывают воздействия на парциальную систему по координате  $\varphi$ .

На рис. 4 представлена структурная схема, которая при равенстве  $k_1 l_1 - k_2 l_2 = 0$  распадается на две независимые колебательные системы.

При данном варианте приложения силы частота режима  $\omega_{A,L}$  однородного колебания вибрационного поля определяется только двумя жесткостями  $k_0$  и  $k_2$ . При таких условиях систему можно представить в виде системы с одной степенью свободы, в которой передача движения осуществляется по схеме кинематического возмущения, вызванной силой, приложенной в точке А.

**Приложение силы в точке В.** Сила приложена в точке В. В данном случае  $l_0 = -l_2$ , что влечет условия для частоты, обеспечивающие однородность колебания координат, в виде:

$$\omega_{B,L}^2 = \frac{k_0}{M+L} + \left(1 + \frac{l_1}{l_2}\right) \frac{k_1}{M+L}. \quad (26)$$

Форма колебаний имеет вид:

$$\bar{y}_1 = \bar{y}_2 = -\frac{l_2}{l_1 k_1 - l_2 k_2} \bar{Q}_0. \quad (27)$$

При данном варианте приложения силы искомая частота определяется жесткостями  $k_0$  и  $k_1$ .

**Приложение силы в точке вне твердого тела.**

Предполагается, что точка приложения силы находится в области слева от точки  $A$ . В этом случае удаленность  $l_0$  точки приложения силы от центра тяжести означает

выполнение одного из неравенств —  $0 < 1 - \frac{l_1}{l_0}$  или

$1 + \frac{l_2}{l_0} > 0$ . Частота и форма колебаний имеют вид:

$$\omega^2_{Q_0, L} = \frac{k_0}{M + L} + \left(1 - \frac{l_1}{l_0}\right) \frac{k_1}{(M + L)} + \left(1 + \frac{l_2}{l_0}\right) \frac{k_2}{(M + L)}, \quad (28)$$

$$\bar{y}_1 = \bar{y}_2 = -\frac{l_0}{l_1 k_1 - l_2 k_2} \bar{Q}_0. \quad (29)$$

Таким образом, частота определяется всеми тремя жесткостями.

**Приложение пары сил.** В качестве внешнего гармонического воздействия к системе прикладывается пара сил с моментом  $M_0$ . В таком случае обобщенные силы равны  $Q_1 = cM_0, Q_2 = -cM_0$ . Из условий однородности вибрационного поля (16) получаем, что частота гармонического воздействия пары сил с моментом  $M_0$  составляет:

$$\omega_{M_0}^2 = \frac{k_0 + k_1 + k_2}{M + L}. \quad (30)$$

При такой частоте гармонического воздействия форма колебания  $\bar{y}_1$  имеет вид:

$$\bar{y}_1 = \bar{y}_2 = -\frac{1}{l_1 k_1 - l_2 k_2} \bar{M}_0. \quad (31)$$

**Особенности динамической жесткости.** В изучении динамических свойства вибростендов, если управление структурой вибрационного поля строить на возможностях изменения точек приложения инерционного воздействия, определенный интерес представляет исследование случаев, когда приведенные жесткости или динамическая податливость в точках приложения принимают предельные значения. В общем виде приведенная жесткость (или приведенная податливость) определяется соотношением:

$$W_{\Pi}(p) = \frac{\bar{y}_{l_0}}{Q_0}. \quad (32)$$

Разрешение уравнения  $W_{\Pi}(p)|_{p=i\omega} = 0$  позволяет найти частоту бесконечной жесткости в фиксированной точке  $l_0$  в виде:

$$\omega_{O, l_0}^2 = \frac{k_0 \cdot l_0^2 + k_1 \cdot (l_1 - l_0)^2 + k_2 \cdot (l_1 + l_2)^2}{l_0^2 (M + L) + J}. \quad (33)$$

Интерес представляет рассмотрение отличия частоты однородного режима колебания  $\omega^2_{Q_0, L}$  от частоты  $\omega^2_{O, l_0}$  по мере изменения величины  $l_0$  — положения точки приложения силы. Наравне с частотами колебания  $\omega^2_{Q_0, L}$  и  $\omega^2_{O, l_0}$  интерес представляет информация о частоте силового воздействия  $\omega^2_T$ , при которой центр тяжести механической системы будет неподвижен. Для определения часты рассматривается передаточная функция:

$$W_T(p) = \frac{\bar{y}_0}{Q_0}. \quad (34)$$

Искомая частота  $\omega^2_T$  определяется из условия  $\bar{y}_0 = 0$  и имеет вид:

$$\omega^2_T = \frac{l_0 \cdot (k_1 \cdot l_1 + k_2 \cdot l_1) - k_1 l_1^2 + k_2 l_2}{J}. \quad (35)$$

На рис. 5 представлены графики отношения квадратов частот  $\omega^2_{Q_0, L}$ ,  $\omega^2_{O, l_0}$ ,  $\omega^2_T$  к величине

$\omega^2_{\infty} = \frac{k_0 + k_1 + k_2}{L + M}$  относительно параметра метрического параметра  $\lambda$ .

На рис. 5 видно, что графики 1, 2, 3 пересекаются в точках 4 и 5. Таким образом, существуют точки приложения сил с определенными частотами, в которых все три режима колебаний совпадают.

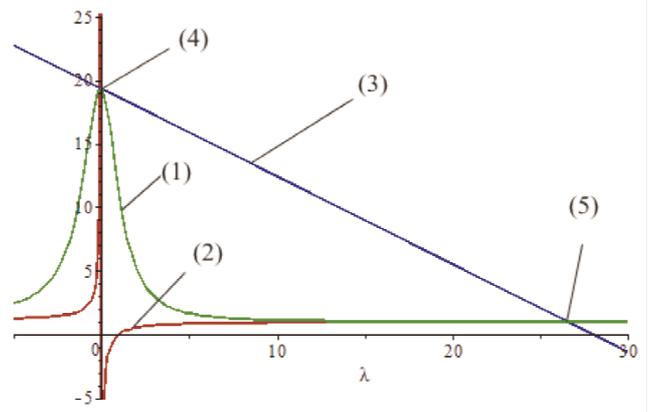


Рис. 5. Определение режима динамического гашения

Отметим, что при исследовании обнаружен интересный эффект обнуления двух координат  $y_0$  и  $\varphi$  при действии внешнего возмещения в виде силы сосредоточенной в определенной точке.

**IV. Особенности реализации режима однородной структуры вибрационного поля в зависимости от параметров системы.** Математическая модель вибрационного стенда включает ряд параметров, характеризующих точку приложения силы  $l_0$ , массоинерционные коэффициенты  $L, M$ , жесткости упругих элементов и положение упругих элементов относительно цен-

тра тяжести. Интерес представляет характер частоты, обеспечивающей однородную структуру вибрационного поля, в зависимости от параметров.

**Зависимость частоты режима однородного вибрационного поля от метрических особенностей приложения силы.** Рассматривается зависимость  $\omega^2_{Q_0,L}$  от параметра  $l_0$ . Полагается, что  $l_0$  изменяется относительно величины:

$$l_{00} = \frac{k_1 l_1 - k_2 l_2}{k_0 + k_1 + k_2}. \quad (36)$$

Для определения величины изменения  $l_0$  относительно  $l_{00}$  вводится безразмерный параметр  $\lambda$ , такой, что:

$$l_0 = \lambda \cdot l_{00}. \quad (37)$$

Изменение  $l_0$  приводит к изменению квадрата частоты однородного вибрационного поля  $\omega^2_{Q_0,L}(l_0)$  в соответствии с выражением:

$$\omega^2_{Q_0,L}(l_0) = \frac{k_0 + k_1 + k_2}{L + M} - \frac{k_0 + k_1 + k_2}{L + M} \cdot \frac{1}{\lambda}. \quad (38)$$

Для различных сочетаний параметров  $L = \delta e^K M$  графики зависимости частоты  $\omega^2_{Q_0,L}(\lambda)$  от безразмерного параметра представлены на рис. 5, где  $\delta = 0.01$ ,  $K = 0..5$ . Кривые 1 на рис. 6 соответствуют различным значениям массоинерционного коэффициента при изменении параметра  $K$ . По мере увеличения  $L$  графики квадратов частоты режима однородного поля приближаются к нулю поточечно. Вместе с тем, для каждого фиксированного параметра  $L$  график квадрата частоты имеет две особые точки. Первая —  $\lambda_1 = 0$ , являющаяся полюсом. При приближении безразмерного параметра  $\lambda$  к нулю слева частота однородного режима колебания возрастает до бесконечности. Вторая особая точка —  $\lambda_2 = 1$ . При приближении  $\lambda$  к 1 квадрат частоты однородного режима приближается к нулю. В промежутке  $\lambda \in (0,1)$  режим однородного поля нереализуем.

В качестве характерной величины рассматривается предельная величина:

$$\omega^2_{\infty} = \lim_{|l_0| \rightarrow \infty} \omega^2_{Q_0,L}(l_0) = \frac{k_0 + k_1 + k_2}{L + M}. \quad (39)$$

Величина  $\omega^2_{\infty}$  может быть использована для сравнения при изменении характеристик приложения сил.

При изменении  $\lambda$  в интервале  $(-\infty, \infty)$  рассматривается безразмерная величина  $\mu$ , характеризующая отношение квадрата частоты однородного поля к предельной величине  $\omega^2_{\infty}$ :

$$\mu = \frac{\omega^2_{Q_0,L}}{\omega^2_{\infty}}. \quad (40)$$

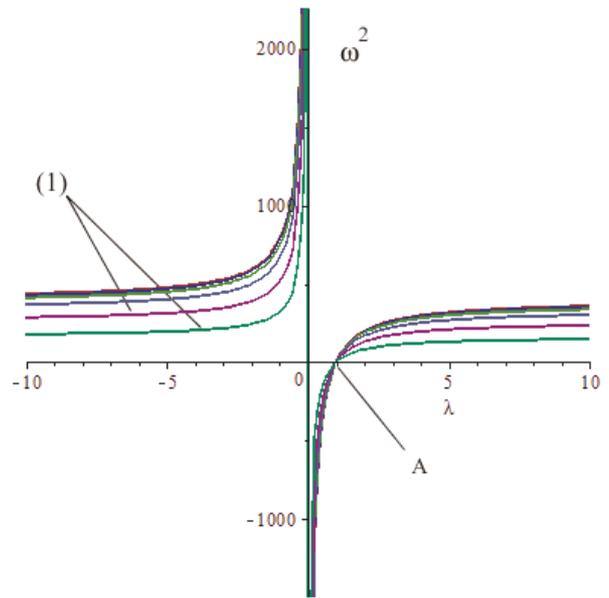


Рис. 6. Особенности изменения частоты однородного режима в зависимости от точки приложения силы

После подстановки  $l_0$  с учетом (37) в  $\omega^2_{Q_0,L}$  выражение безразмерной величины  $\mu$  принимает вид:

$$\mu = 1 - \frac{1}{\lambda}. \quad (41)$$

Величина  $\mu$  может быть интерпретирована как коэффициент увеличения квадрата частоты однородного режима по отношению к предельной частоте  $\omega^2_{\infty}$  при изменении  $\lambda$  — коэффициента, характеризующего точку приложения силы  $Q_0$ . Зависимость величины  $\mu$  от параметра  $\lambda$  представлена на рис. 7.

Рассматриваемый параметр  $\mu$ , представляющий отношение частот, имеет физическую интерпретацию только для неотрицательных значений, что предполагает разбиение области определения функции на три интервала. Первый интервал  $\lambda \geq 1$  определяет отношение частот в диапазоне  $0 \leq \mu \leq 1$  и представлен монотонно возрастающей из точки (A) кривой 2 (рис. 7).

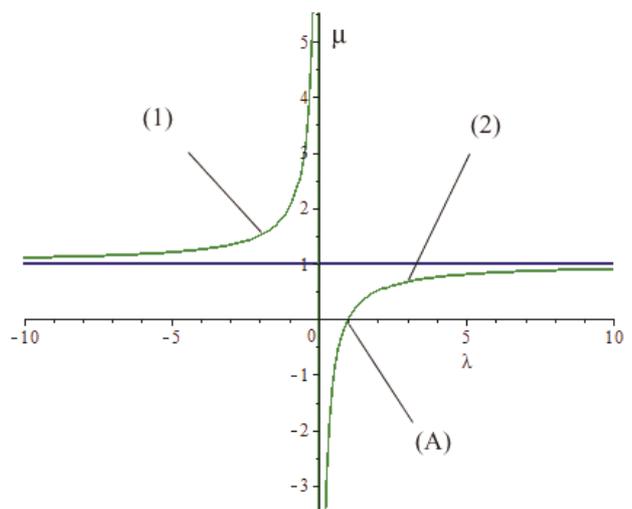


Рис. 7. Зависимость  $\mu$  коэффициента относительной частоты от параметра увеличения плеча  $\lambda$

На интервале  $\lambda \leq 0$  относительная частота однородного режима колебания изменяется в диапазоне  $1 \leq \mu \leq \infty$  и представлена монотонно возрастающей кривой 1. Если  $0 \leq \lambda < 1$ , то режим однородной структуры вибрационного поля не реализуется.

**Зависимость частоты режима однородного вибрационного поля от массоинерционных характеристик.** Соотношение массы  $M$  и массоинерционной характеристики  $L$  представляет интерес для использования характеристики  $L$  как настроечного параметра.

Рассматривается зависимость частоты режима однородного колебания от параметра  $L$  в предположении, что параметр  $L$  связан с массой  $M$  через безразмерный коэффициент пропорциональности  $\alpha$ :

$$L = \alpha \cdot M. \quad (42)$$

В качестве базы сравнения частоты режима однородного колебания выбирается квадрат частоты при условии, что  $L = 0$ :

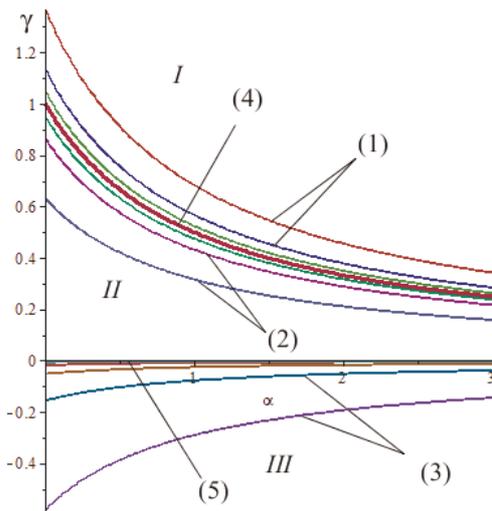
$$\omega_M^2 = \frac{k_0 + k_1 + k_2}{M}. \quad (43)$$

В зависимости от параметра  $\alpha$  величина  $\gamma = \frac{\omega_{20,L}^2}{\omega_M^2}$

отношения квадрата частоты режима однородного колебания к квадрату базовой частоты  $\omega_M^2$  будет иметь вид:

$$\gamma = \frac{1}{1 + \alpha} \cdot \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right), \quad (44)$$

где  $\lambda$  и  $\alpha$  — безразмерные параметры, характеризующие положение и массоинерционные характеристики.



**Рис. 8.** Зависимость отношения квадрата частот  $\gamma$  от коэффициента  $\alpha$  для различных значений  $\lambda$

Множество всех кривых на рис. 8 могут быть условно разбиты на три области, которые разделены осью абсцисс 5 и кривой 4. Область  $I$  состоит из кривых 1, которые соответствуют множеству  $\Lambda_I = \{\lambda \in (-\infty, 0)\}$ . Область  $II$  состоит из кривых, расположенных между

осью абсцисс и соответствующих множеству  $\Lambda_{II} = \{\lambda \in (1, \infty)\}$ . Третья область кривых соответствует параметрами  $\Lambda_{III} = \{\lambda \in (0, 1)\}$ .

**Зависимость коэффициента  $\lambda$  от отношения  $\alpha$  массоинерционных коэффициентов.** Рассматривается зависимость безразмерного параметра  $\lambda$ , характеризующего точку приложения силы, от параметра  $\alpha$ , характеризующего величину  $L$  по отношению к массе  $M$ .

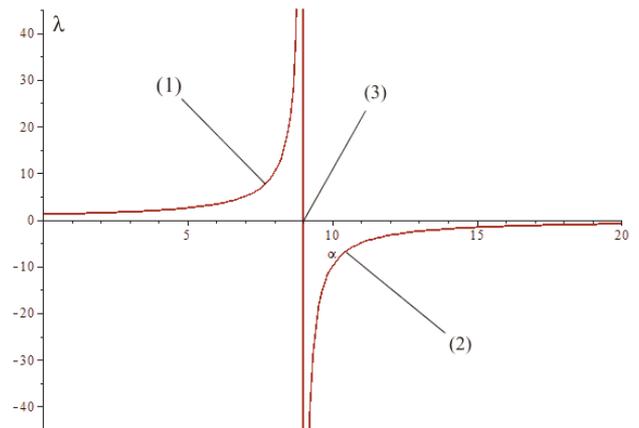
Определяемая величина  $\lambda$  выражается через параметры  $\gamma$  и  $\alpha$  в виде:

$$\lambda = \frac{1}{1 - (1 + \alpha)\gamma}. \quad (45)$$

Выраженная зависимость представлена на рис. 9 для случая  $0 \leq \gamma \leq 1$  с помощью графика, состоящего из кривых 1 и 2. Основной особенностью представленного графика является существование полюса в точке 3 с координатой  $\alpha'$ , которая определяется выражением:

$$\alpha' = \frac{1}{\gamma} - 1. \quad (46)$$

По мере приближения параметра  $\alpha$  к величине  $\alpha'$  происходит неограниченный рост метрического коэффициента  $\lambda$ .



**Рис. 9.** Зависимость метрического коэффициента от соотношения массоинерционных коэффициентов при условии  $0 \leq \gamma \leq 1$

Вариант зависимости  $\lambda(\alpha, \gamma)$  при условии, что  $\gamma > 1$ , представлен на рис. 10. Кривые 1 характеризуют зависимость метрического коэффициента  $\lambda$  от параметра  $\alpha$  для различных значений  $\gamma > 1$ .

Описанные функциональные зависимости могут быть сведены к областям точек приложения возбуждающей силы на твердом теле. На рис. 11 представлены условные области приложения силовых воздействий. Так, «зона высоких частот» характеризуется тем, что для обеспечения режима однородных колебаний вибрационного поля по мере приближения точки приложения силы к центру тяжести слева искомая частота неограниченно возрастает. Если же сила приложена в «мертвую зону», то искомой частоты не существует. В «зоне малых частот» для достижения режима однород-

ных колебаний для точек, близких к точке  $B$  (рис. 11), потребуются малые частоты.

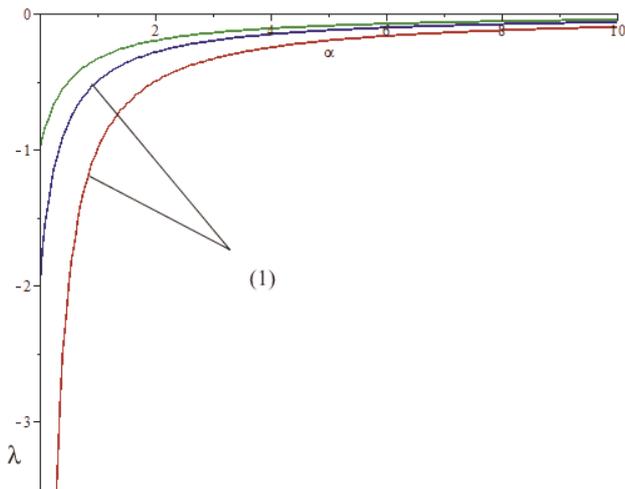


Рис. 10. Зависимость метрического коэффициента от соотношения массоинерционных коэффициентов при условии  $\gamma > 1$

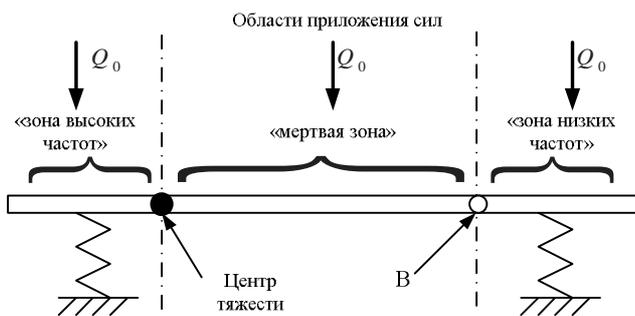


Рис. 11

### Заключение

Следует отметить следующие ключевые выводы:

1. Авторами предложены теоретические основы для решения задач, связанных с разработкой рациональных, технически конструктивных решений при построении вибрационных технологических комплексов.

2. Показано, что в реализации многих технологических вибрационных процессов большое значение имеет структура вибрационного поля рабочего органа машины. В частности, для процессов вибрационного упрочнения деталей вибрационное поле должно быть однородным для исключения возможных горизонтальных перемещений рабочей среды. Однородность поля достигается на определенных частотах вибрационных воздействий, при которых отношение амплитуд колебаний характерных точек равно единице. В данном случае такое отношение демонстрируют координаты точек  $A$  и  $B$  (рис. 1).

3. Предлагается схема формирования вибрационного поля на основе использования сосредоточенного силового воздействия. Точка приложения этого воздействия может размещаться в определенных зонах, что обеспечивает достижение необходимых технологических режимов.

4. Разработаны и получены формулы и аналитические отношения, обеспечивающие реализацию необхо-

димых режимов. Обнаружено свойство, заключающееся в том, что режим динамического гашения может быть реализован для двух координат одновременно. Положение таких точек может быть определено аналитически.

5. Для определения значений настроечных параметров предложены аналитические соотношения, позволяющие построить зависимости коэффициентов эффективности в соответствии с местом расположения возбуждающей силы.

6. В целом предлагаемая последовательность оценки динамических свойств вибрационного комплекса позволяет производить предварительные расчеты, связанные с выбором параметров вибрационного стенда с инерционным возбудителем, обеспечивающим однородное вибрационное поле, соответствующее первой форме колебаний с поступательным движением рабочего органа.

### Литература

1. Вибрации в технике: справочник: в 6 т. Т.4. Вибрационные процессы и машины / под ред. Э.Э Лавенделла. М.: Машиностроение, 1981. 504 с.
2. Пановко Г.Я. Динамика вибрационных технологических процессов. М.; Ижевск: РХД, 2006. 158 с.
3. Копылов Ю.Р. Динамика процессов виброударного упрочнения: моногр. Воронеж: ИПЦ «Научная книга», 2011. 568 с.
4. Елисеев, А.В. Неудерживающие связи в динамических взаимодействиях сыпучей среды и вибрирующей поверхности: научно-методологическое обоснование технологии вибрационного упрочнения / А.В. Елисеев, А.Г. Пнев, В.Б. Кашуба, И.С. Ситов/ Системы. Методы. Технологии. 2014. № 3 (23). С 17-31.
5. Сельвинский В.В., Елисеев С.В., Елисеев А.В. Динамика вибрационных взаимодействий элементов технологических систем с учетом неудерживающих связей: моногр. Новосибирск: Наука, 2015. 332 с.
6. Белокобыльский С.В., Елисеев С.В., Кашуба В.Б. Возможности динамических взаимодействий в механических колебательных системах при связанных внешних силах // Системы. Методы. Технологии. 2012. № 4 (16). С. 7-13.

### References

1. Vibration Engineering: spravochnik: v 6 t. T.4. Vibratory processes and machines / pod red. E.E Lavendella. M.: Mashinostroenie, 1981. 504 p.
2. Panovko G.Ya. Dynamics of vibrating processes. M.; Izhevsk: RKhD, 2006. 158 p.
3. Kopylov Yu.R. The dynamics of the processes of vibro-shock hardening: monogr. Voronezh: IPTs «Nauchnaya kniga», 2011. 568 p.
4. Eliseev A.V., Pnev A.G., Kashuba V.B., Sitov I.S. Unilateral constraints in the dynamic interactions of granular media and the vibrating surface: scientific and methodological basis of the technology of vibrational hardening processes // Systems. Methods. Technologies. 2014. № 3(23). P. 17-31.
5. Sel'vinskii V.V., Eliseev S.V., Eliseev A.V. Dynamics of vibrating interactions of elements of technological systems with "not holding" ties: monogr. Novosibirsk: Nauka, 2015. 332 p.
6. Belokobyl'skii S.V., Eliseev S.V., Kashuba V.B. Dynamic interactions in oscillatory mechanical systems with related external forces // Systems. Methods. Technologies. 2012. № 4 (16). P. 7-13.