

УДК -531

## Новые подходы в условиях расчета и проектирования механических систем с сочленениями твердых тел

И.В. Ковригина

Забайкальский институт железнодорожного транспорта, ул. Магистральная 11, Чита, Россия  
fominainna@rambler.ru

Статья поступила 23.06.2015, принята 16.08.2015

*В статье рассмотрены основы метода построения математических моделей механических колебательных систем с сочленениями звеньев и способы изменения динамических свойств систем в задачах виброзащиты и виброизоляции технических объектов. Сочленение локализует место динамического взаимодействия, что требует разработки детализированной методики построения математических моделей, позволяющих определять те или иные параметры механических систем. В идеализированном виде сочленение приносит в систему определенные кинематические ограничения. Так, например, сочленение обеспечивает одинаковые скорости двум точкам, которые принадлежат разным телам. В этой точке возникают динамические реакции. Место расположения сочленения изменяет приведенные значения массоинерционных, упругих и других характеристик системы. В реальных условиях в сочленениях возникают силы трения. Если сочленения обладают упругими свойствами, то учет таких особенностей деталей связан с повышением сложности математических моделей и увеличением числа рассматриваемых независимых степеней свободы движения. Переход к идеализированной системе может быть осуществлен увеличением жесткости сочленения, что в предельном переходе приводит к упрощению математической модели.*

**Ключевые слова:** сочленения; математические модели; виброзащита и виброизоляция.

## New approaches to the analysis of dynamic characteristics when designing mechanical systems with connections between solid bodies

I.V. Kovrigina

Trans-Baikal Railway Transport Institute; 11, Magistralnaya St., Chita, Russia  
fominainna@rambler.ru

Received 23.06.2015, accepted 16.08.2015

*The article describes the basics of the method of constructing mathematical models of mechanical oscillatory systems with link connections and ways to change dynamic properties of the systems in problems of vibration protection and vibration isolation of engineering objects. Connections locate the place of dynamic interaction that requires the development of detailed methodology of construction of mathematical models to determine certain parameters of mechanical systems. Ideally such connections bring certain kinematic constraints in the system. For example, the connection provides the same speed for two points belonging to different bodies. Dynamic response takes place in this point. Location of the connection changes the values of baricentric, elastic and other characteristics of the system. In real conditions friction forces takes place in the connections. If the connections have elastic properties, the registration of such peculiarities of details is connected with the increase of complexity of mathematical models and the quantity of independent degrees of freedom considered. The transition to an idealized system can be implemented by increasing the stiffness of the connection that leads to a simplification of the mathematical model in limiting process.*

**Key words:** connection; mathematical models; vibration protection and vibration isolation.

**Введение.** Контроль за изменением динамического состояния машин, агрегатов, узлов и передач можно отнести к одной из актуальнейших проблем современной техники, что находит подтверждение в развитии и расширении исследований, составляющих междисциплинарную область науки и техники, формирующую продвижение в теоретической и прикладной механике, теории управления, вибродиагностике, робототехнике, мехатронике. Особое направление составляют задачи транспортной динамики, в которых проблема обеспечения надежности и безопасности функционирования оборудования и агрегатов связана с необходимостью обновления соответствующих условий труда операторов машин.

Повышение требований к безопасности работы машин и технологического качества оборудования стимулируют дальнейшее развитие, углубление и расширение

поиска способов и средств снижения вибрационной активности, защиты технических объектов и человека-оператора от воздействия вибраций, а также разработку управляемых виброзащитных систем. Последние все чаще применяются на практике и представляют собой, по существу, специализированные системы автоматического управления с развитыми приводами и системами обработки информации.

**Общие сведения о сочленениях.** Обобщенное представление об основных свойствах динамических гасителей (ДГ) колебаний связано с присоединением одних элементов к другим. При этом в схемах важны детали и конструктивные формы соединений, поскольку именно они часто определяют возможности ДГ. Можно утверждать, что введение динамического гаси-

теля как дополнительного устройства [2] соответствует введению в механическую колебательную систему так называемых дополнительных связей [1]. Конструктивные особенности дополнительных связей можно увидеть в том, что они должны иметь точки крепления, то есть принимать форму дуальных элементов и обеспечивать возможность создания в динамическом смысле некоторых структур или блоков, что определяется сочленениями. В простейших формах сочленение интерпретируется как кинематическая пара [3]. Последнее позволяет рассматривать в механических колебательных системах, в случае необходимости, сочленения элементов систем или звеньев, твердых тел, часто принимающих форму сочленения стержней между собой или стержней и твердых тел. Учет сочленений необходим для динамических расчетов, поскольку их наличие определенным образом меняет динамику системы. В реальных конструкциях сочленение может обладать упругими и диссипативными свойствами, что выражается через дополнительные степени свободы взаимного движения. Однако, делая жесткость упругих соединений высокой, мы можем переходить к введению или формированию сочленения как элемента, ограничивающего свободу движений [4].

Учет сочленений часто связан с рассмотрением в механических системах рычажных соединений, рычажных механизмов, рычажных связей [5; 6 и др.], что приводит к определенной специфике в оценку спектра динамических возможностей механических колебательных систем, в частности виброзащитных.

Рассмотрение конструктивно-технических форм реализации в технических системах функций упругих, диссипативных и упруго-диссипативных звеньев показывает, что так называемые элементарные звенья достаточно сложны по своему устройству, содержат соединения твердых тел между собой и могут называться шарнирами. В свою очередь шарниры являются кинематическими парами, которые представлены в теории механизмов и машин в нескольких классификациях. Наибольшее распространение получили кинематические пары V класса (вращательные шарниры, поступательные пары), IV класса (зубчатые передачи, кулачковые механизмы) и пары III класса (сферические шарниры).

Сочленение твердых тел характерно для машин, поскольку последние состоят из механизмов, а те, в свою очередь, представляют собой механические цепи, состоящие из твердых тел, соединенных кинематическими парами. В теории механизмов и машин развит аналитический аппарат, позволяющий решать задачи статики, кинематики и динамики сочленений. В теории колебаний механических систем сочленения твердых тел рассматриваются в задачах теоретической механики, например при рассмотрении движения физических маятников с одной и двумя степенями свободы, бифилярных подвесов, горизонтальных маятников сейсмических приборов и др. [3]. Вместе с тем в строении механических колебательных систем имеется определенная специфика, поскольку такие системы состоят из твердых тел или материальных точек, соединяемых пружинами и демпферами. При этом, как правило, внимание не фиксируется на физических формах самого соединения и его деталях, однако вид самого соеди-

нения как такового имеет значение. Сочленение локализует место динамического взаимодействия, что требует разработки детализированной методики построения математических моделей, позволяющих определять те или иные параметры механических систем.

В идеализированном виде сочленение привносит в систему определенные кинематические ограничения. Так, например, сочленение обеспечивает одинаковые скорости двум точкам, которые принадлежат разным телам. В этой точке возникают динамические реакции. Место расположения сочленения изменяет приведенные значения массинерционных, упругих и других характеристик системы. В реальных условиях в сочленениях возникают силы трения. Если сочленения обладают упругими свойствами, то учет таких особенностей деталей связан с повышением сложности математических моделей, с увеличением числа рассматриваемых независимых степеней свободы движения. Переход к идеализированной системе может быть осуществлен увеличением жесткости сочленения, что в предельном переходе приводит к упрощению математической модели.

Расчетная схема виброзащитной системы (ВЗС) (рис. 1) представлена двумя блоками (контуры I и II). В основе блоков — твердое тело, обладающее массой и моментом инерции; в составе ВЗС задействованы упругие элементы. Предполагается, что смещение центра тяжести блока I не оказывает существенного влияния на динамику системы в целом, а силы сопротивления достаточно малы.

Расчетная схема в виде колебательной системы с тремя степенями свободы ( $y \div y_2$ ) может рассматриваться как фрагмент ВЗС, в которой совместно работают блок I (контур I на рис. 1) и блок II (контур II на рис. 1), состоящий из твердого тела, опирающегося на упругие опоры. Контуры I и II находятся во взаимодействии через упругий связующий элемент  $k_{01}$ .

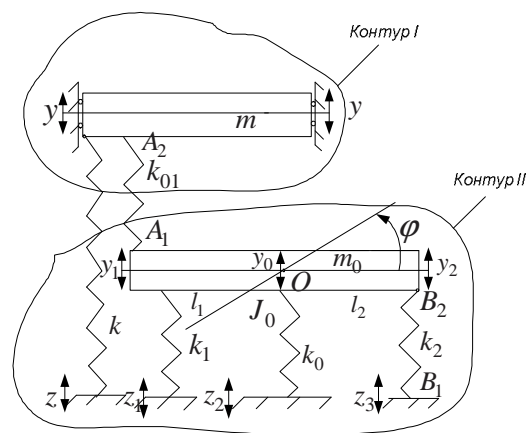


Рис. 1. Расчетная схема колебательной виброзащитной системы, имеющей два контура взаимодействия

Развивая высказанные выше положения о сочленениях твердых тел как соединениях твердых тел, принимающих форму вращательного шарнира, отметим, что, полагая жесткости  $k_{01}$  и  $k_0$  достаточно большими, расчетную схему можно преобразовать (рис. 2).

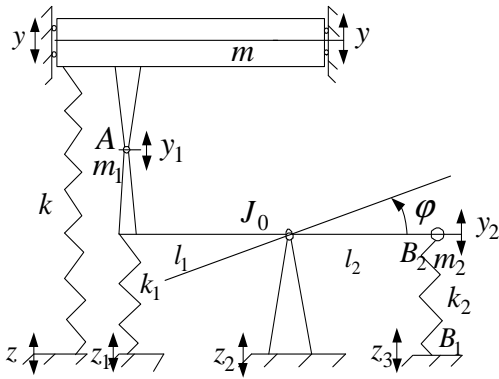


Рис. 2. Преобразованная расчетная схема, содержащая сочленения

Полученная в результате упрощения схемы на рис. 1 расчетная схема (рис. 2) использовалась, например, в работе [7], однако вопрос об особенностях сочленений здесь не рассматривался. Преобразованная схема отражает возможность получения расчетных схем с двумя сочленениями.

Запишем выражения для кинетической и потенциальной энергий для расчетной схемы ВЗС (рис. 2):

$$T = \frac{1}{2}(m + m_1)\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{y}_2^2 \quad (1)$$

$$\Pi = \frac{1}{2}k(y - z)^2 + \frac{1}{2}k_1(y - z_1)^2 + \frac{1}{2}k_2(y_2 - z_3)^2, \quad (2)$$

где  $\dot{y}_2$  — скорость элемента массой  $m_2$  в абсолютном движении, которая определяется выражением:

$$\dot{y}_2 = -\left(\frac{\dot{y}}{l_1} \cdot l_2\right) + \dot{z}_2.$$

Знак «минус» отражает изменение движения, вызванное рычагами второго рода. Таким образом, найдем, что (1) преобразуется к виду:

$$T = \frac{1}{2}(m + m_1)\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m_2[-\dot{y}i + \dot{z}_2(1+i)]^2, \quad (3)$$

где  $i = \frac{l_2}{l_1}$  — передаточное отношение рычага.

Потенциальная энергия определяется выражением:

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2}k(y - z)^2 + \frac{1}{2}k_1(y_1 - z_1)^2 + \\ &+ \frac{1}{2}k_2(y_{2аб} - z_3)^2 = \frac{1}{2}k(y - z)^2 + \\ &+ \frac{1}{2}k_1(y_1 - z_1)^2 + \frac{1}{2}k_2[-yi + z_2(1+i) - z_3]^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Используя формализм Лагранжа, получим дифференциальное уравнение движения для системы (рис. 2):

$$\begin{aligned} \ddot{y}(m_1 + m_2 + m_2i^2) + y(k + k_1 + k_2i^2) = \\ = m_2(1+i)\ddot{z}_2 + z_2k_2(1+i) + k_1z_1 + kz_3 - k_2iz_3 \end{aligned} \quad (5)$$

Для дальнейших расчетов примем, что  $z_1 = z_2 = z_3; k_1 = 0$  и  $k_2 = 0$ , тогда передаточная функция системы примет вид:

$$W(p) = \frac{\bar{y}(p)}{\bar{z}(p)} = \frac{m_2(1+i)p^2 + k}{(m_1 + m + m_2i^2)p^2 + k}, \quad (6)$$

где  $p = j\omega$  — переменная Лапласа ( $j = \sqrt{-1}$ ). В качестве примера на рис. 3 показано семейство амплитудно-частотных характеристик, построенных на основе (6) при изменении параметра  $i$  в пределах от 0 ÷ 3 с шагом 0,5. В качестве исходных приняты следующие параметры системы:  $m = 100$  кг;  $m_1 = m_2 = 20$  кг;  $k = 10000$  Н/м.

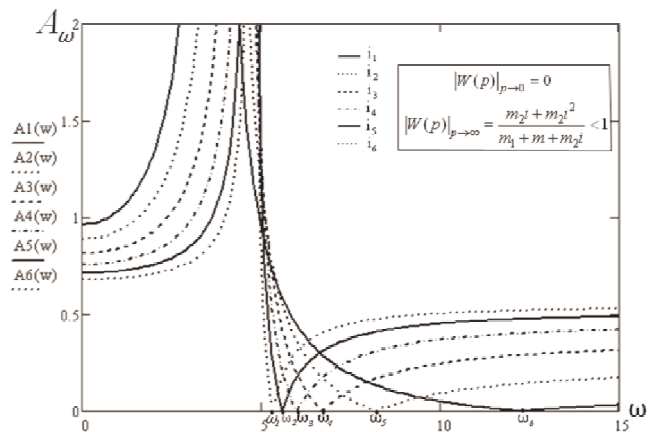


Рис. 3. Семейство амплитудно-частотных характеристик системы с передаточной функцией

На рис. 3 через  $\omega_1$  ч  $\omega_6$  обозначены частоты динамического гашения. Соответствующие значения частот собственных колебаний в сопоставлении с частотами  $\omega_1$  ч  $\omega_6$  приведены в табл. 1.

Таблица 1

Значения частот собственных колебаний в сопоставлении с частотами  $\omega_1$  ч  $\omega_6$  для системы (рис. 2)

$i$	0,5	1	1,5	2	2,5	3
Значение частот динамического гашения	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\omega_5$	$\omega_6$
	25.81	15.81	11.54	9.12	7.55	6.45
Значение частот собственных колебаний	$\omega_{соб1}$	$\omega_{соб2}$	$\omega_{соб3}$	$\omega_{соб4}$	$\omega_{соб5}$	$\omega_{соб6}$
	8.94	8.45	7.78	7.07	6.38	5.77

Особенность амплитудно-частотных характеристик заключается в том, что при увеличении  $i$  происходит смещение частот динамического гашения влево, то есть разность частот  $\omega_1 - \omega_6$  уменьшается. При этом частота собственных колебаний тоже уменьшается, но гораздо медленнее. На высоких частотах коэффициент

передачи амплитуды колебаний после режима динамического гашения стремится к предельному значению

$$|W(p)|_{p \rightarrow \infty} = \frac{m_2 i + m_2 i^2}{m_1 + m + m_2 i} < 1; \text{ чем больше } i, \text{ тем}$$

больше будет значение  $|W(p)|_{p \rightarrow \infty}$  при  $i \rightarrow \infty$  –  $|W(p)|_{p \rightarrow 0} = 0$ .

### Заключение

Разработка метода построения математических моделей колебательных механических системах при наличии сочленений между отдельными звеньями позволяет исследовать динамические эффекты системы с целью создания методологических основ для поиска и разработки способов и средств вибрационной защиты объектов.

### Литература

1. Eliseev S.V., Lukyanov A.V., Reznik Yu.N., Khomenko A.P. Dynamics of mechanical systems with additional ties. Irkutsk: Irkutsk State University of Railway Engineering, 2006. P. 316.
2. Вибрации в технике: справочник в 6 т. Т.1 Колебания линейных систем / под ред. В.В. Болотина. М.: Машиностроение, 1978. 456 с.
3. Лойцянский Л.Г. Курс теоретической механики. М.: Наука, 1980. 640 с.
4. Виттенбург Й. Динамика систем твердых. М.: Мир, 1980. 295 с.
5. Брысин А.Н. Повышение эффективности виброзащитных устройств за счет введения инерционно-преобразовательных блоков: дис. ... канд. техн. наук, М., 2008. С. 42-61.
6. Четвериков С.В., Петуров В.И. Теоретическое исследование возможностей повышения стойкости инструмента из композита [Электронный ресурс] // Современные проблемы науки и образования. 2014. № 2. URL: <http://www.science-education.ru/116-12432>.
7. Климов А.В. Динамика рычажной релаксационной подвески с прерывистым демпфированием: дис. ... канд. техн. наук, Орел, ОрелГТУ, 2001. 186 с.
8. Насников Д.Н., Упырь Р.Ю. Мехатроника виброзащитных систем. Особенности структурных преобразований // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2009. № 4 (24). С. 75-85.
9. Елисеев С.В., Резник Ю.Н., Фомина И.В. Задачи управляемости и наблюдаемости в системах вибрационной защиты // Труды XIV Байкальской Всероссийской конференции «Информационные технологии в науке и управлении». Иркутск, 2009. Т. 1. С. 81–91.
10. Фомина И.В. Разработка метода построения математических моделей виброзащитных систем с сочленениями звеньев: дис. ... канд. техн. наук. Иркутск: ИрГУПС, 2011. 168 с.
11. Елисеев С.В., Ермошенко Ю.В., Фомина И.В. Возможности сочленения твердых тел в цепных механических системах // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2010. № 3 (27). С. 146-152.
12. Елисеев С.В. Структуризация виброзащитных систем. Новосибирск: Наука, 1978. 238 с.

13. Фомина И.В., Елисеев С.В. Введение дополнительных связей. Возможные соотношения между квадратичными формами кинетической и потенциальной энергии виброзащитных систем // Вестн. ИжГТУ. 2010. Вып. 4. С. 43–47.

14. Фомина И.В., Сигачев Н.П. Особенности получения информации о колебательных объектах // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2010. № 1 (25). С. 192-199.

15. Упырь Р.Ю., Ермошенко Ю.В., Фомина И.В. Построение математических моделей колебательных структур из типовых элементов // Зб. наукових праць (галузеve машинобудування, будівництво). Полтава: ПолтНТУ, 2009. Т. 1, № 3 (25). С. 214–222.

### References

1. Eliseev S.V., Lukyanov A.V., Reznik Yu.N., Khomenko A.P. Dynamics of mechanical systems with additional ties. Irkutsk: Irkutsk State University of Railway Engineering, 2006. P. 316.
2. Vibration technique: reference to the 6 t. T.1 Fluctuations linear systems. M.: Mashinostroenie, 1978. 456 p.
3. Loitsyanskii L.G. The course of theoretical mechanics. M.: Nauka, 1980. 640 p.
4. Vittenburg I. Dynamics of rigid. M.: Mir, 1980. 295 p.
5. Brysin A.N. Improving the efficiency of vibration isolation devices by introducing inertial transducer blocks: dis. ... kand. tekhn. nauk, M., 2008. P. 42-61.
6. Chetverikov S.V., Peturov V.I. Theoretical study of the possibilities to increase tool life of a composite [Elektronnyi resurs] // Sovremennye problemy nauki i obrazovaniya. 2014. № 2. URL: <http://www.science-education.ru/116-12432>.
7. Klimov A.V. The dynamics of the relaxation arm suspension with intermittent damping: dis. ... kand. tekhn. nauk, Orel, OrelGTU, 2001. 186 p.
8. Nasnikov D.N., Upyr' R.Yu. Mechatronics vibration isolation systems. Features of structural transformations // Modern technologies. System analysis. Modeling. 2009. № 4 (24). P. 75-85.
9. Eliseev S.V., Reznik Yu.N., Fomina I.V. Problems of controllability and observability in vibration protection systems // Trudy KhIV Baikalskoi Vserossiiskoi konferentsii «Informatzionnye tekhnologii v nauke i upravlenii». Irkutsk, 2009. T. 1. P. 81-91.
10. Fomina I.V. Development of a method of constructing mathematical models of vibration isolation systems articulated units: dis. ... kand. tekhn. nauk. Irkutsk: IrGUPS, 2011. 168 p.
11. Eliseev S.V., Ermoshenko Yu.V., Fomina I.V. Features articulation of solids in the chain of mechanical systems // Modern technologies. System analysis. Modeling. 2010. № 3 (27). P. 146-152.
12. Eliseev S.V. Structuring vibration isolation systems. Novosibirsk: Nauka, 1978. 238 p.
13. Fomina I.V., Eliseev S.V. The introduction of additional bonds. The possible relation between quadratic forms of kinetic and potential energy of vibration isolation systems // Vestn. IzhGTU. 2010. Vyp. 4. P. 43-47.
14. Fomina I.V., Sigachev N.P. Features information on the vibrational objects // Modern technologies. System analysis. Modeling. 2010. № 1 (25). P. 192-199.
15. Upyr' R.Yu., Ermoshenko Yu.V., Fomina I.V. Construction of mathematical models of the vibrational structure of the typical elements / Zb. naukovikh prats' (galuzeve mashinobuduvannya, budivnitstvo). Poltava: PoltNTU, 2009. T. 1, № 3 (25). P. 214-222.