

УДК 539.3:519.612

Контроль точности решения при анализе напряженно-деформированного состояния высокоответственных технических объектов*

А.Н. Рогалев^{1 a}, С.В. Доронин^{2 b}, А.А. Рогалев^{3 c}¹Институт вычислительного моделирования СО РАН, Академгородок 50/44, Красноярск, Россия²Специальное конструкторско-технологическое бюро «Наука» Красноярского научного центра СО РАН, пр. Мира 53, Красноярск, Россия³Институт космических и информационных технологий Сибирского федерального университета, ул. Киренского 26, Красноярск, Россия^arogalyov@icm.krasn.ru, ^bs.doronin@gmail.com, ^cran@akadem.ru

Статья поступила 18.06.2015, принята 6.09.2015

В статье рассматриваются подходы к оценке вычислительной ошибки при решении системы линейных алгебраических уравнений, в качестве матрицы коэффициентов которой рассматривается матрица жесткости конечно-элементной модели технического объекта. Предлагаемый подход предполагает, что уровень вычислительной ошибки определяется структурой и значениями матрицы коэффициентов, и заключается в численном решении системы линейных уравнений с матрицей жесткости и такой специально подобранной правой частью, для которой известно точное решение. Сравнение численного и точного решений позволяет получить оценку вычислительной ошибки, позволяющую судить о приемлемости построенной конечно-элементной модели. Получение указанной оценки является дополнительной процедурой контроля точности численного решения при анализе его сходимости путем последовательного уменьшения шага конечных элементов. Развиваемый подход весьма актуален для конструкций ответственных технических объектов, где цена ошибки при проектных расчетах оказывается неприемлемо высокой. Для реализации предлагаемого подхода организован интерфейс между пакетом конечно-элементного моделирования ANSYS и вычислительным пакетом компьютерной алгебры Wolfram Mathematica. В качестве примера приводится получение оценки вычислительной ошибки численного решения системы линейных алгебраических уравнений с матрицей жесткости силовой конструкции бака высокого давления для перспективных электрореактивных двигателей космических аппаратов. Силовая конструкция представляет собой оболочку давления, подвешенную на системе вантов с регулируемым уровнем натяжения, закрепленных, в свою очередь, на пространственной стержневой системе — силовой структуре корпуса космического аппарата. Для рассматриваемой конструкции найден уровень конечно-элементной дискретизации, обеспечивающий сходимость численного решения.

Ключевые слова: вычислительная ошибка; матрица жесткости; моделирование; система линейных алгебраических уравнений; контроль точности.

Solution accuracy control for analysis of stress-strain state of critical technical objects

A.N. Rogalyov^{1 a}, S.V. Doronin^{2 b}, A.A. Rogalyov^{3 c}¹Institute of Computer Simulation of Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences; 50/44, Akademgorodok, Krasnoyarsk, Russia²Design Bureau «Nauka», Krasnoyarsk Scientific Centre of Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences; 53, Mira Ave., Krasnoyarsk, Russia³Institution for Space and Information Technologies of Siberian Federal University; 26, Academician Kirensky St., Krasnoyarsk, Russia^arogalyov@icm.krasn.ru, ^bs.doronin@gmail.com, ^cran@akadem.ru

Received 18.06.2015, accepted 6.09.2015

The paper is devoted to approaches to a problem of numerical error evaluation when solving the system of linear equations. The stiffness matrix of a finite-element model of a technical object is a coefficient matrix of the system of linear equations. The approach proposed supposes that the level of numerical error is determined by a structure and magnitude of coefficient matrix. The approach consists of numerical solving system of linear equations with stiffness matrix and special right-hand member with exact solution known. Comparison of numerical and exact solutions allows evaluating numerical error and making decision on the quality of finite-element model. Evaluation numerical error is a supplementary procedure for checking accuracy of numerical solution within solution convergence analysis by means of cascade reduction mesh spacing. The approach is of great actuality for structures of critical technical objects with great worth of design calculations error. To implement the approach, data interface between the finite-element analysis package ANSYS and computer algebra package Wolfram Mathematica has been created. Evaluated numerical error has been given as an example for numerical solution system of linear equations with stiffness matrix for load-bearing unit of high pressure tank for perspective spacecraft electrojet engines. The load-bearing unit consists of pressure shell suspended by means of cable system with controlled

tension. The cable system is attached to spatial bar system – load-bearing frame structure of spacecraft. For the structures considered the level of finite-element discretization has been determined to provide numerical solution convergence.

Key words: numerical error; stiffness matrix; modeling; system of linear equations; accuracy control.

Введение. Анализ напряженно-деформированного состояния (НДС) силовых конструкций технических объектов в настоящее время является неотъемлемой частью их проектных расчетов с использованием CAD/CAE-систем. Традиционно предметом анализа при этом оказываются количественные характеристики компонент деформаций и напряжений и определяемые на их основе интегральные показатели (эквивалентные напряжения по различным теориям прочности, коэффициенты объемности напряженного состояния и др.). При этом вопросы точности результатов численных решений оказываются в большинстве случаев вне зоны внимания технических специалистов и не подвергаются серьезному анализу и обсуждению. Таким образом, можно утверждать, что в рамках стандартных процедур автоматизированного проектирования результаты численного моделирования силовых конструкций и исследования их НДС характеризуются неопределенной точностью: мы, как правило, не располагаем информацией о величине ошибки и точности результатов [1–3].

Данное обстоятельство свидетельствует о потенциальной опасности принятия необоснованных решений относительно технических параметров проектируемых объектов, способных привести к повреждениям и разрушениям на стадии эксплуатации. Анализ и предотвращение этой опасности весьма актуальны для силовых конструкций высокоответственных технических объектов, используемых для обеспечения критических технологий в космическом и транспортном машиностроении, авиации, ядерной энергетике и ряде других отраслей.

Можно предположить, что в современных высококачественных CAD/CAE-системах использование совершенных математических моделей, численных методов и программного кода обеспечивает незначительный уровень ошибки и высокую точность результатов. Возражение заключается в том, что опасность заключается не только в количественном значении ошибки, но и в самом факте его незнания. Таким образом, постулируем, что количественная оценка величины ошибки численного анализа НДС имеет самостоятельную ценность и должна контролироваться, для чего необходимо предусмотреть процедуры анализа ошибки в качестве обязательных элементов автоматизированного проектирования.

Проблема анализа точности и контроля ошибок численных оценок напряженно-деформированного состояния. В наиболее полной систематизации источников ошибок вычислительных процессов [4] рассматриваются:

погрешности аппроксимации, связанные с заменой исходной задачи более простой приближенной задачей или последовательностью таких задач;

искажения, связанные с определением (вычислением) данных указанной выше приближенной задачи, алгоритма решения приближенной задачи;

округления.

Как известно, основными ошибками при решении задач методом конечных элементов (МКЭ) являются [5]:

– ошибки дискретизации вследствие неполного совпадения границы исследуемой области и ее конечно-элементной модели;

– ошибки базисных функций вследствие отличия точного решения от его представления в виде комбинации базисных функций заданного вида;

– ошибки округления вследствие конечной длины разрядной сетки компьютера и большого числа вычислительных операций, выполняемых при решении задач МКЭ.

При решении задач МКЭ все указанные погрешности и ошибки оказываются зависящими от сетки конечных элементов, причем далеко не всегда в силу сложности моделируемой геометрии удается построить регулярную сетку, характеризующуюся единственным параметром — шагом сетки. В связи с этим следует рассматривать взаимосвязанную проблему точности и сходимости численного решения. Эта проблема является предметом многочисленных исследований, систематизированных в [6–9].

В дальнейшем сосредоточимся на ошибках округления при выполнении компьютерных вычислений при решении задач МКЭ, а именно на той их части, которая возникает при решении разрешающей системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$Ax = b, \quad (1)$$

где A — разреженная матрица коэффициентов (матрица жесткости); b — вектор правой части (вектор нагрузок).

Накопление погрешности при численном решении алгебраических уравнений может быть изучено как суммарное влияние округлений, сделанных на отдельных шагах вычислительного процесса, на точность численного решения линейной алгебраической системы [10]. Считается, что уровень этих ошибок непосредственно зависит от меры вырожденности матрицы коэффициентов решаемой системы — числа обусловленности матрицы коэффициентов системы (1), т. е. матрицы жесткости конечно-элементной модели. Таким образом, в первом приближении анализ точности и контроля ошибок сводится к вычислению числа обусловленности и выводам на этой основе о достоверности полученного решения. Как показано в дальнейших рассуждениях, это недостаточно и может привести к неверным выводам.

Точность численных решений систем линейных алгебраических уравнений с матрицами жесткости. При описании моделей механики (а также в задачах анализа НДС силовых конструкций технических объ-

ектов) крайне редко применяются системы линейных алгебраических уравнений:

$$\bar{A} \cdot \bar{x} = \bar{b} \quad (2)$$

с точными исходными данными. Наиболее типичным является задание уравнений вида (1) с указанием погрешности в исходных данных:

$$\|\bar{A} - A\| = \|\Delta A\| \leq \varepsilon_A, \quad \|\bar{b} - b\| = \|\Delta b\| \leq \varepsilon_b. \quad (3)$$

Таким образом, физическая модель описывается целым классом уравнений. В качестве формального решения задачи (1)–(3) может быть взят любой вектор, который обращает уравнение с матрицами A' и правыми частями b' , удовлетворяющими неравенствам (3), в тождество. Отметим, что в случае прямоугольной $m \neq n$ или вырожденной $\det \bar{A} = 0$ матрицы точной системы (2) приближенная система (3) может оказаться несовместной при любой точности задания исходных данных.

Таким образом, для СЛАУ с приближенными данными нельзя просто ставить вопрос о решении индивидуально заданной приближенной системы (1), а следует уточнить, что понимается под решением и численным решением такого класса задач.

В оценках ошибок решений СЛАУ, а также в оценке степени близости матриц коэффициентов к сингулярным матрицам используются числа обусловленности матриц [11–14]. Приведем кратко необходимые для исследования степени близости матриц к сингулярной матрице свойства норм матриц, это позволит подойти к сути обусловленности. Предположим, что $A, B \in R^{m \times n}$ (при этом A, B не обязательно квадратные матрицы).

Отображение $\|\cdot\|: R^{m \times n} \rightarrow R$ является матричной нормой [15; 16], при условии, что выполняются следующие аксиомы:

$$\begin{aligned} \|A\| \geq 0 \quad \forall A, \quad \|A\| = 0 &\Leftrightarrow A = 0 \\ \|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|; \quad \|\alpha A\| &= |\alpha| \|A\|. \end{aligned}$$

Константа α принадлежит тому же полю чисел, что элементы матрицы A . В нашем контексте обычно рассматриваются числа $\alpha \in R$.

Наиболее общей матричной нормой является норма Фробениуса:

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{n-1} |a_{kl}|} \quad (4)$$

и p -нормы:

$$\|A\|_p = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}. \quad (5)$$

Мы видим, что в (5) матричная p -норма зависит от векторной p -нормы Гельдера.

Векторная l_p -норма (или норма Гельдера с показателем p) равна:

$$\|x\|_p \equiv \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

где $p \geq 1$.

Можно рассматривать A как оператор, примененный к x , что дает на выходе Ax . Уравнение (5) дает верхнюю границу выходной величины A , и величины x представляют их соответствующие p -нормы. Мы наблюдаем, что:

$$\|A\|_p = \sup_{x \neq 0} \left\| A \left(\frac{x}{\|x\|_p} \right) \right\| = \max_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_p.$$

Одно свойство, которым обладает матрица относительно p -норм, называется свойством полумультимпликативности:

$$\|AB\|_p \leq \|A\|_p \|B\|_p, \quad A \in R^{m \times n}, \quad B \in R^{n \times q}$$

Для наших целей мы используем следующие свойства матричной нормы [11; 12]:

$$\|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n} \|A\|_2$$

$$\max_{i,j} |a_{ij}| \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{mn} \max_{i,j} |a_{ij}|,$$

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^m |a_{ij}|, \quad (6)$$

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, \quad (7)$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_\infty \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|_\infty,$$

$$\frac{1}{\sqrt{m}} \|A\|_1 \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|_1.$$

Как известно, задача является корректно поставленной, если решение ее существует и единственно при любых входных данных из некоторой области ее изменения, и это решение непрерывно зависит от исходных данных.

Отыскание классического решения x системы (1), (2), т. е. вектора, при котором невязка $r = b - Ax$ тождественно равна нулю, будет корректно поставленной задачей, если матрица коэффициентов квадратная:

$$m = n, \quad \det A \neq 0 \quad \text{и} \quad \|\Delta A \cdot A^{-1}\| < 1 \quad \text{или} \quad \|\Delta A\| \cdot \|A^{-1}\| \quad (8)$$

при произвольном возмущении ΔA из окрестности, определяемой условиями (3).

Действительно, выполнение (8) гарантирует, что при любом возмущении элементов в пределах точности их задания матрица системы останется невырожденной, а, следовательно, решение $x = A^{-1}b$ системы существует, оно единственно и непрерывно зависит от

исходных данных. Оценим разность $x' - x$ решений системы (2) и произвольной возмущенной системы $A'x' = b'$, принадлежащей классу систем (3), где:

$$A' = A + \Delta A, b' = b + \Delta b, x' = x + \Delta x.$$

Будем действовать согласно [11; 14]. Согласно (3) ΔA – ошибка матрицы коэффициентов (матрицы жесткости), Δb – ошибка правой части, Δx – ошибка решения, мы не предполагаем, что величины ошибки малы.

Введем определения:

$$M = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \|A\|, \quad m = \min_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \frac{1}{\|A^{-1}\|}.$$

Поскольку $A(\Delta x) = \Delta b$, то $\|b\| \leq M\|\Delta x\|$, $\|\Delta b\| \geq m\|\Delta x\|$.

Следовательно, при $m \neq 0$:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{M}{m} \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}.$$

Величина $\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$ называется относительным изменением правой части (относительной ошибкой правой части), величина $\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}$ — относительной ошибкой решения, величина $\frac{M}{m} = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ — числом обусловленности матрицы $cond(A)$.

Полученное неравенство показывает, что число обусловленности выполняет роль множителя в увеличении относительной ошибки.

Абсолютно так же определим систему с возмущением матрицы коэффициентов и возмущением правой части:

$$(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b + \Delta b.$$

Тогда $A(\Delta x) + \Delta A(x + \Delta x) = \Delta b$. При этом требуется выполнение естественного условия:

$$\|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\| < 1 \text{ и } \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} < 1.$$

Легко получить неравенство:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \left(\frac{cond(A)}{1 - \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}} \right) \cdot \left(\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \right). \quad (9)$$

При малых значениях нормы $\|\Delta A\|$ правая часть в (9) эквивалентна выражению $\left(\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \right)$; таким образом,

можно полагать, что относительная ошибка в решении имеет одинаковый порядок малости с относи-

тельной ошибкой в сумме ошибки начальных данных и право части, при условии, что величина $cond(A)$ не слишком велика. Имея в виду задачу решения системы при больших $cond(A)$, говорят о плохой обусловленности решения системы линейных уравнений с матрицей коэффициентов A и правой частью b (по отношению к матричной норме $\|\cdot\|$). Когда величина $cond(A)$ мала (близка к единице), говорят о хорошей обусловленности матрицы (по отношению к матричной норме $\|\cdot\|$). Наконец, при $cond(A) = 1$ матрицу A называют идеально обусловленной (по отношению к матричной норме $\|\cdot\|$). Следует отметить, что сама величина числа обусловленности является всего лишь верхней границей в оценке точности. При вычислении числа обусловленности может использоваться одна из норм матрицы, которая увеличивается при увеличении размерности матрицы (см. (4), (6), (7)). Это приводит к сильному росту числа обусловленности системы, что в свою очередь не связано напрямую с увеличением ошибки численного решения [11; 13]. Поэтому порядок чисел обусловленности при расчетах технических объектов сложной конфигурации нередко достигает высоких значений. Проиллюстрируем последнее утверждение следующими примерами роста числа обусловленности с увеличением размерности матрицы жесткости.

Исследованы вычислительные ошибки численного решения задачи Колосова–Инглиса [17]. Для варианта задачи с круглым отверстием (задача Кирша) при последовательном уменьшении шага сетки конечных элементов наблюдается одновременное увеличение как размерности матрицы жесткости, так и ее числа обусловленности (табл. 1).

Таблица 1

Характеристика матрицы жесткости растягиваемой пластины с круглым отверстием

Размерность матрицы	Число обусловленности
2 575	$1,80 \cdot 10^4$
16 067	$1,15 \cdot 10^5$
20 015	$1,44 \cdot 10^5$
25 387	$1,96 \cdot 10^5$
44 843	$3,46 \cdot 10^5$
1 619 619	$1,68 \cdot 10^7$
6 482 151	$7,06 \cdot 10^7$

Аналогичная картина наблюдается для численного решения одной из классических задач строительной механики — деформирования защемленной по контуру равномерно нагруженной круглой пластинки [18] (табл. 2).

Таблица 2

Характеристика матрицы жесткости заземленной по контуру пластинки

Размерность матрицы	Число обусловленности
1 038	$2,06 \cdot 10^4$
7 950	$1,37 \cdot 10^5$
9 798	$1,66 \cdot 10^5$
12 342	$2,31 \cdot 10^5$
22 614	$4,12 \cdot 10^5$
847 302	$2,02 \cdot 10^7$
3 411 222	$1,67 \cdot 10^8$

Для более сложных конфигураций рассчитываемых объектов получаются гораздо более высокие значения чисел обусловленности.

Таким образом, сталкиваемся с дилеммой: повышение точности решения при уменьшении шага сетки и ошибок дискретизации предположительно сопровождается снижением точности вследствие роста числа обусловленности и накопления ошибок округления при решении системы (1). Это обуславливает необходимость контроля фактического уровня ошибки при анализе и обеспечении сходимости численного решения. Мы в данной работе предлагаем следующий выход из этой ситуации. Для вычисления оценки нормы ошибки СЛАУ с матрицей жесткости рассматриваются две СЛАУ, имеющие одну и ту же матрицу коэффициентов A , являющуюся матрицей жесткости, и различные правые части, имеющие одну норму.

Метод оценки ошибки численного решения СЛАУ с матрицей жесткости. Рассмотрим две СЛАУ, имеющие одну и ту же матрицу коэффициентов A , являющуюся матрицей жесткости. Первая (исходная) система:

$$Ax = b_1 \tag{10}$$

имеет вектор правых частей $b_1 = (b_{1,i})_{i=1,n}$. Вторая система:

$$Az = b_2 \tag{11}$$

является тестовой. Решения этой системы необходимо подобрать таким образом, чтобы нормы правых частей СЛАУ (10) и (11) совпадали.

Формируем вектор правых частей b_2 таким образом, чтобы полученная система имела известное решение: каждая компонента вектора решения z равна:

$$z_i = \left(\max_k |b_{1,k}| / \sum_{j=1}^n a_{sj} \right), i=1,n,$$

где номер строки s , элементы которой суммируются в знаменателе дроби, соответствует номеру строки с максимальной по модулю суммой элементов. Можно записать, что вектор правой части системы (11) равен:

$$(b_2)_i = \max_k |b_k| \cdot \frac{\left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \right)}{\left(\sum_{j=1}^n a_{sj} \right)} = \begin{pmatrix} \max_k |b_k| \cdot \alpha_1 \\ \max_k |b_k| \cdot \alpha_2 \\ \dots \\ \max_k |b_k| \cdot 1 \\ \dots \\ \max_k |b_k| \cdot \alpha_n \end{pmatrix},$$

где:

$$\alpha_i = \left(\frac{\sum_{j=1}^n a_{ij}}{\sum_{j=1}^n a_{sj}} \right), \quad |\alpha_i| < 1, \quad i = 1, \dots, n.$$

Для двух рассматриваемых СЛАУ (10) и (11) совпадают нормы матриц коэффициентов, равны нормы правых частей:

$$\max_k |b_{2,k}| = \max_k |b_{1,k}| \cdot \max_i |\alpha_i| = \max_k |b_k| \cdot 1 = \|b_1\|.$$

При численном решении систем (10) и (11) получаем ошибки:

$$x - x_{num} = A^{-1} (E + \Delta A \cdot A^{-1})^{-1} (\Delta b_1 - \Delta A \cdot A^{-1} b_1), \tag{12}$$

$$z - z_{num} = A^{-1} (E + \Delta A \cdot A^{-1})^{-1} (\Delta b_2 - \Delta A \cdot A^{-1} b_2),$$

где x, z — точные, x_{num}, z_{num} — численные решения СЛАУ (10) и (11) соответственно; здесь E — единичная матрица, ΔA — ошибка матрицы коэффициентов (матрицы жесткости), Δb — ошибка правой части, Δx — ошибка решения (были введены выше).

Учитывая свойства построенных нами векторов правых частей $b_{2,i} = \max_k |b_{1,k}|, \forall i$, из (12) не сложно получить оценку:

$$\|x - x_{num}\| \leq \|z - z_{num}\| L, |L| < 1,$$

или:

$$\|x - x_{num}\| \leq \|z - z_{num}\|.$$

Это неравенство означает, что норма ошибки тестовой системы (11) при выполнении наших условий больше, чем норма ошибки исходной системы с матрицей жесткости.

Вычислительная технология реализации метода.

При решении задачи конечно-элементного анализа в среде пакета ANSYS файлы базы данных задачи содержат матрицу жесткости A и вектор правой части b в бинарном формате. С использованием команды hbmat вспомогательного процессора aux2 осуществляется преобразование и сохранение этих данных в файл в текстовом формате Harwell-Boeing.

В среде пакета компьютерной алгебры Wolfram Mathematica с помощью команды Import осуществляется чтение матрицы жесткости и вектора правой части

из сохраненных текстовых файлов. Рассматриваемый в статье алгоритм метода оценки ошибки численного решения СЛАУ с матрицей жесткости закодирован с использованием языка программирования пакета Wolfram Mathematica.

Оценка ошибки численного решения СЛАУ с матрицей жесткости силовой конструкции бака высокого давления для перспективных электрореактивных двигателей космических аппаратов. В настоящее время осуществляется интенсивный процесс разработки, исследования, испытаний, опытной эксплуатации баков высокого давления для перспективных электрореактивных двигателей космических аппаратов. Силовая конструкция включает в себя как непосредственно бак, так и элементы инфраструктуры, в пределах которой осуществляется замыкание силового потока, что является основанием для определения границ деформируемой системы и ее анализа в качестве самостоятельно объекта исследования.

Непосредственно бак представляет собой сосуд давления, имеющий форму эллипсоида вращения (рис. 1) и гибко подвешиваемый на вантовой системе.

Вантовая система крепится на силовой конструкции корпуса — пространственной стержневой системе, относящейся к классу анизотридных композитных сетчатых конструкций [19; 20]. Конечно-элементная модель рассматриваемой силовой конструкции представлена на рис. 2.

В результате анализа сходимости численного решения найден максимально допустимый шаг сетки конечных элементов. При этом размерность матрицы жесткости составила 169452×169452 элементов. Оценка числа обусловленности этой матрицы составила $9,96 \cdot 10^9$. Оценка ошибки вычисления узловых перемещений по предложенному алгоритму равна $1,94 \cdot 10^{-8}$. Таким образом, получено сходящееся решение, характеризующееся малой величиной ошибки, что свидетельствует о достоверности результата.

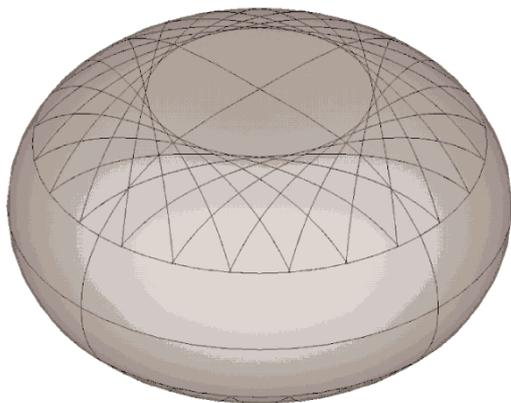


Рис. 1. Оболочка бака со следами вантовой системы

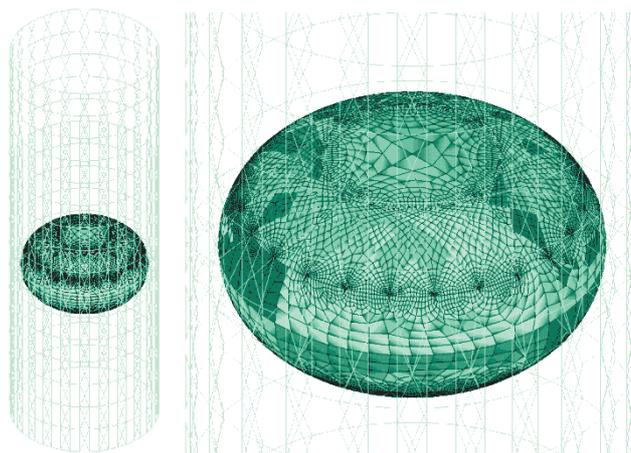


Рис. 2. Конечно-элементная модель силовой конструкции бака

Заключение

Первоначально число обусловленности матрицы было введено как средство априорной оценки того, насколько большими могут быть ошибки при решении системы $Ax = b$. Такое использование числа обусловленности не очень надежно, однако последующие улучшения сделали его более полезным. Главным образом эти улучшения возникли при использовании числа обусловленности для апостериорной оценки ошибок: сначала задача решается, а затем оценивается правильность полученного решения. При такой оценке бывает полезна различного рода информация, полученная в процессе решения системы $Ax = b$. В статье предлагается апостериорная оценка ошибки решения СЛАУ с матрицей жесткости с помощью решения СЛАУ с той же матрицей жесткости и правой частью, норма которой равна норме правой части исходной системы. Получаемая таким образом оценка ошибки вычисления узловых перемещений определяет уровень ошибки относительных деформаций и напряжений. Такой подход показал свою эффективность в задачах анализа НДС высокоответственных технических объектов.

Литература

1. Рогалев А.Н., Доронин С.В. Вопросы сходимости конечно-элементных оценок напряженного состояния силовых конструкций с концентраторами напряжений // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2015. № 1. С. 8-13.
2. Доронин С.В., Рогалев А.Н. Анализ конечно-элементных оценок напряженного состояния силовых конструкций с концентраторами напряжений // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2015. № 2. С. 26-31.
3. Сигова Е.М., Доронин С.В. Неопределенность численных оценок характеристик напряженного состояния оболочечных конструкций в связи с геометрическими особенностями // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2014. № 3. С. 37-42.
4. Михлин С.Г. Погрешности вычислительных процессов. Л.: Изд-во ЛГУ, 1983. 264 с.
5. Чернявский А.О. Метод конечных элементов. Основы практического применения. М.: Машиностроение, 2007. 106 с.
6. Akin J.E. Finite element analysis with error estimators. Oxford. England. Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005. 512 p.

7. Cook R.D., Malkus D.S., Plesha M.E., Witt R.J. Concepts and applications of finite element analysis. New York: John Wiley & Sons, 2002. 719 p.
8. Reddy J.N. An introduction to the finite element method. New York. McGraw-Hill Companies, 2006. 766 p.
9. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhu J.Z. The finite element method: its basis and fundamentals. Oxford. England. Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005. 752 p.
10. Wilkinson J. Rounding errors in algebraic processes. London. Her Majesty's Stationary Office. 1963. 161 p.
11. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры. М.: Наука, 1977. 304 с.
12. Бахвалов Н.С. Численные методы (анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения). М.: Наука, 1975. 632 с.
13. Дж. Райс. Матричные вычисления и математическое обеспечение. М.: Мир, 1984. 264 с.
14. Rice J. Matrix computations and mathematical software. New York. McGraw-Hill Book Company, 1981. 264 p.
15. Golub G., Loan C. Matrix computations. Baltimore, London // J. Hopkins University Press, 1996. 693 p.
16. Roger A. Horn, Charles R. Johnson. Matrix Analysis. Cambridge, New York. Cambridge University Press, 1985. 608 p.
17. Доронин С.В., Роголев А.Н. Оценка вычислительной ошибки решения задачи о растяжении пластины с дуговым вырезом // Вестник машиностроения. 2015. № 1. С. 24-27.
18. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. М.: Наука, 1966. 636 с.
19. Васильев В.В., Барынин В.А., Разин А.Ф., Петроковский С.А., Халиманович В.И. Анизогридные композитные сетчатые конструкции – разработка и приложение к космической технике // Композиты и наноструктуры. 2009. № 3. С. 38-50.
20. Vasiliev V.V., Barynin V.A., Razin A.F. Anisogrid composite lattice structures - development and aerospace applications // Composite structures. 2012. Vol. 94, №. 3. P. 1117-1127.
- concentrators // Modern technologies. System analysis. Modeling. 2015. № 2. P. 26-31.
3. Sigova E.M., Doronin S.V. The uncertainty of numerical assessment of characteristics of the shell structures stress state in connection with geometric singularities // Modern technologies. System analysis. Modeling. 2014. № 3. P. 37-42.
4. Mikhlin S.G. Errors of computational processes. L.: Izd-vo LGU, 1983. 264 p.
5. Chernyavskii A.O. Finite element method. The grounds of practical applications. M.: Mashinostroenie, 2007. 106 p.
6. Akin J.E. Finite element analysis with error estimators. Oxford. England. Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005. 512 p.
7. Cook R.D., Malkus D.S., Plesha M.E., Witt R.J. Concepts and applications of finite element analysis. New York: John Wiley & Sons, 2002. 719 p.
8. Reddy J.N. An introduction to the finite element method. New York. McGraw-Hill Companies, 2006. 766 p.
9. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhu J.Z. The finite element method: its basis and fundamentals. Oxford. England. Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005. 752 p.
10. Wilkinson J. Rounding errors in algebraic processes. London. Her Majesty's Stationary Office. 1963. 161 p.
11. Voevodin V.V. Computational basics of linear algebra. M.: Nauka, 1977. 304 p.
12. Bakhvalov N.S. Numerical techniques (analysis, algebra, ordinary differential equations). M.: Nauka, 1975. 632 p.
13. Dzh. Rais. Matrix computations and mathematical software. M.: Mir, 1984. 264 p.
14. Rice J. Matrix computations and mathematical software. New York. McGraw-Hill Book Company, 1981. 264 p.
15. Golub G., Loan C. Matrix computations. Baltimore, London // J. Hopkins University Press, 1996. 693 p.
16. Roger A. Horn, Charles R. Johnson. Matrix Analysis. Cambridge, New York. Cambridge University Press, 1985. 608 p.
17. Doronin S.V., Rogalev A.N. Error in calculating the extension of a plate with a circular notch // Russian Engineering Research. 2015. № 1. P. 24-27.
18. Timoshenko S.P., Voinovskii-Kriger S. Plates and shells. M.: Nauka, 1966. 636 p.
19. Vasil'ev V.V., Barynin V.A., Razin A.F., Petrokovskii S.A., Khalimanovich V.I. Anisogrid composite lattice structures - development and aerospace applications // Composites and Nanostructures. 2009. № 3. P. 38-50.
20. Vasiliev V.V., Barynin V.A., Razin A.F. Anisogrid composite lattice structures - development and aerospace applications // Composite structures. 2012. Vol. 94, №. 3. P. 1117-1127.

References

1. Rogalev A.N., Doronin S.V. Issues of convergence of the finite element estimations of stress state of load-bearing structures with stress concentrators // Modern technologies. System analysis. Modeling. 2015. № 1. P. 8-13.
2. Doronin S.V., Rogalev A.N. Analysis of the finite element estimations of stress state of load-bearing structures with stress