

УДК 621.01:620.17

## Обзор методов определения упругопластической деформации при внедрении сферы

П.М. Огарь<sup>1 а</sup>, Д.Б. Горохов<sup>1 б</sup><sup>1</sup>Братский государственный университет, ул. Макаренко 40, Братск, Россия<sup>а</sup>ogar@brstu.ru, <sup>б</sup>denis\_gorohov@mail.ru

Статья поступила 15.08.2015, принята 10.09.2015

*Статья посвящена определению деформации при внедрении сферы и ее взаимосвязи с деформацией при растяжении. Этот вопрос является ключевым при разработке методов безобразцового определения механических свойств материалов по параметрам твердости (прямая задача) и описания упругопластического внедрения сферы при известных механических свойствах (обратная задача). Рассмотрены методы определения деформации начиная с работы Д. Тэйбора и его модификации, которые получил название метод АВІ (Automated Ball Indentation). Данный метод использован в руководящем документе РД ЭО 0027-2005 концерна «Росэнергоатом». Недостатком метода является игнорирование эффектов «sink-in/pile-up». Указано, что в последнее десятилетие для определения деформации широко используется конечно-элементный анализ, который учитывает эффекты «sink-in/pile-up» путем введения параметра  $c^2 = h_c/h$ , где  $h_c$  – глубина внедрения, по которой происходит контакт с материалом,  $h$  – глубина внедрения от уровня исходной поверхности. Из анализа С.И. Булычева следует, что при исследовании корреляции диаграмм твердости и растяжения исходят из эмпирического закона Майера. Приведено выражение, посредством которого осуществляется переход от диаграмм растяжения к диаграмм твердости и наоборот.*

*Авторами отмечена бесперспективность определения деформации по методу АВІ с учетом современных представлений о разгрузке отпечатка и целесообразность использование подхода С.И. Булычева, основанного на взаимосвязи индекса Майера  $m$  и экспоненты упрочнения  $n$ . Целесообразность данного подхода показана с использованием результатов конечно-элементного моделирования.*

**Ключевые слова:** диаграмма вдавливания, вдавливание сферы, деформация, диаграмма растяжения, деформация при растяжении, метод АВІ (Automated Ball Indentation), конечно-элементное моделирование, закон Майера.

## Review of the methods for determining elastic-plastic deformation under spherical indentation

P.M. Ogar<sup>a</sup>, D.B. Gorokhov<sup>b</sup>

Bratsk State University; 40, Makarenko St., Bratsk, Russia

<sup>a</sup>ogar@brstu.ru, <sup>b</sup>denis\_gorohov@mail.ru

Received 15.08.2015, accepted 10.09.2015

*The paper is devoted to the determination of the deformation under spherical indentation and its relationship to the tensile strain. This is a key issue when developing methods for non-invasive determination of material mechanical properties on the hardness parameters (direct problem) and when describing elastic-plastic spherical indentation under certain mechanical properties (inverse problem). Methods for determining deformation have been studied, beginning with D. Tabor's work. Modification of his method is called ABI method (Automated Ball Indentation) and is used in the guidance document RD EO 0027-2005 of Rosenergoatom Concern OJSC. A disadvantage of this method is «sink-in/pile-up» effect's neglect. It has been found that finite-element analysis is widely used to determine deformation over the past decade. The analysis takes «sink-in/pile-up» effects into account by introducing a parameter  $c^2 = h_c/h$ , where  $h_c$  is a penetration depth, for which the contact with the material takes place;  $h$  is a penetration depth from the level of the original surface. According to S.I. Bulychev's analysis, it follows that when studying the correlation of the hardness and tensile diagrams, the empirical Mayer's law is used. An expression has been shown by which it is possible to transfer from tensile diagram to hardness diagram and vice versa.*

*The authors have noted the lack of prospects when determining the deformation by ABI method in accordance with modern concepts of indentation unloading and the practicability of using S.I. Bulychev's approach based on the relationship of the Mayer's index  $m$  and hardening exponent  $n$ . Practicability of this approach has been shown by using the results of finite-element modeling.*

**Key words:** indentation diagram; spherical indentation; deformation; tensile diagram; tensile strain; ABI (Automated Ball Indentation); finite-element model; Mayer law.

**Введение.** В настоящее время для описания истинных напряжений при растяжении (сжатии) используется степенной закон Холломоны:

$$\sigma = \begin{cases} E\varepsilon, & \varepsilon \leq \varepsilon_y, \quad \sigma \leq \sigma_y; \\ K\varepsilon^n, & \varepsilon \geq \varepsilon_y, \quad \sigma \geq \sigma_y, \end{cases} \quad (1)$$

где  $E$  — модуль упругости;  $\sigma_y$  — предел текучести;  $n$  — экспонента упрочнения;  $K$  — постоянная для данного материала.

Из условия равенства:

$$\sigma = E\varepsilon_y = K\varepsilon_y^n$$

следует:

$$K = E\varepsilon_y^{1-n}. \quad (2)$$

Учитывая, что общая деформация состоит из двух частей:

$$\varepsilon = \varepsilon_y + \varepsilon_p,$$

для  $\sigma > \sigma_y$ , с учетом выражений (1) и (2) и полагая  $\varepsilon_p = \varepsilon_r$ , имеем:

$$\sigma_r = \sigma_y \left(1 + E\varepsilon_r / \sigma_y\right)^n$$

или:

$$\sigma_r = \sigma_y \left(1 + \varepsilon_r / \varepsilon_y\right)^n, \quad (3)$$

где  $\varepsilon_y = \sigma_y / E$ .

Вопрос об оценке величины деформации при вдавлении сферы и ее взаимосвязи с деформацией при растяжении является одним из ключевых при разработке методов безобразцового определения механических свойств материалов по параметрам твердости [1] (прямая задача) и описании упругопластического внедрения сферы при известных механических свойствах (обратная задача).

**Методы определения деформации.** Благодаря обширному анализу экспериментальных данных Д. Тейбор в 1951 г. предложил следующее соотношение [2] для описания деформации при внедрении сферы:

$$\varepsilon_p = 0,2 \frac{d_p}{D}, \quad (4)$$

где  $d_p$  — диаметр отпечатка;  $D$  — диаметр индентора. Согласно такому подходу эффекты «sink-in / pile-up» были проигнорированы. Соответствующие напряжения описываются выражением:

$$\sigma_t = \frac{P_m}{\Psi}, \quad (5)$$

где  $P_m$  — среднее давление;  $\Psi$  — ограничивающий фактор, для упругого идеальнопластического тела  $\Psi = 3$ ;

$$P_m = \frac{4P}{\pi d_p^2}, \quad (6)$$

где  $P$  — нагрузка, приложенная к индентору.

Так как  $d_p/D = a_c/R$ , где  $a_c$  — радиус отпечатка,  $R = 0,5D$ , то выражение (4) можно переписать в виде

$$\varepsilon_r = \beta \sin \gamma, \quad (6 а)$$

где  $\beta = 0,2$ ,  $\gamma$  — половина угла вдавливания индентора в материал.

В работе [3] авторами был предложен новый подход к определению  $\varepsilon_r$ :

$$\varepsilon_r = \left( \frac{\alpha}{\sqrt{1 - (a_c/R)^2}} \right) \left( \frac{a_c}{R} \right) = \alpha t g \gamma, \quad (6 б)$$

где  $\alpha = 0,14$ .

Подход Тейбора Д. впоследствии был модифицирован для упругопластической области Франсисом Х. А., затем с минимальными изменениями Хаггагом Ф. В. [4]:

$$\Psi = \begin{cases} 1,12, & \phi \leq 1; \\ 1,12 + 0,53 \log \phi, & 1 < \phi < 27,3; \\ 2,87, & \phi \geq 27,3. \end{cases} \quad (7)$$

$$\phi = \frac{\varepsilon_p E^*}{0,43 \sigma_t}, \quad (8)$$

$$E^* = \left( \frac{1 - \nu_i^2}{E_i} + \frac{1 - \nu_m^2}{E_m} \right)^{-1}, \quad (9)$$

где  $\nu_i$ ,  $\nu_m$  и  $E_i$ ,  $E_m$  — коэффициенты Пуассона, модули упругости материала индентора и испытываемого образца соответственно;

$$d_p = \left( \frac{3PD}{E^*} \frac{h_p^2 + (d_p/2)^2}{h_p^2 + (d_p/2)^2 - h_p D} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (10)$$

Авторы [6] предложили заменить уравнение (10) следующим выражением:

$$d = 2\sqrt{h_c(D - h_c)}, \quad (11)$$

где  $h_c$  — глубина, вдоль которой имеется контакт между сферой и полупространством.

Метод безобразцового определения механических свойств, предложенный авторами [3–5], является одним из наиболее распространенных и получил название «метод АВІ» (Automated Ball Indentation). Данный метод описан также в руководящем документе РД ЭО 0027-2005 [7].

Для каждого цикла нагружения до  $d_t/D$  анализируем следующую зависимость:

$$\frac{P}{d_t^2} = A^* \left( \frac{d_t}{D} \right)^{m-2}, \quad (12)$$

где  $A^*$  — константа;  $m$  — индекс Майера,

$$d_t^2 = 4(Dh_t - h_t^2). \quad (13)$$

В дальнейшем параметр  $A^*$  используется для расчета предела текучести:

$$\sigma_y = \beta_m A^*, \quad (14)$$

где  $\beta_m = 0,229$  — константа для определенного класса материалов.

Несмотря на принципиальные недостатки, связанные с игнорированием эффектов «sink-in / pile-up» и примитивной схемой разгруженного отпечатка, метод АВИ находит применение и в настоящее время, например в работах [8; 9].

К следующему усовершенствованию процедуры определения деформации при внедрении сферы можно отнести результаты работы [10], полученные конечно-элементным моделированием для  $n = 0...0,5$ ,  $E^* = 0,4...200$  ГПа:

$$\varepsilon_p = \left( 0,5n + \frac{1,44}{\sqrt{n+0,1}} - 1,6 \right) \left( \frac{d_p}{D} \right); \quad (15)$$

$$\psi = \begin{cases} -0,65 + \ln(\varphi), & \text{для упругопластической} \\ & \text{области;} \\ -0,81 + \frac{2}{\sqrt{n+0,2}}, & \text{для полной} \\ & \text{пластичности.} \end{cases} \quad (16)$$

Для оценки характеристик упрочняемого материала методом сферического индентирования в последнее десятилетие широко используется конечно-элементный анализ (FEA — *finite element analysis*) [10–16 и др.]. В указанных работах деформация  $\varepsilon_r$  является функцией отношения  $h/R$ , где  $h$  — величина внедрения от исходной поверхности;  $R$  — радиус сферы.

В работе [11] характеристики упругопластического контакта при внедрении сферического индентора описываются полиномиальными функциями, полученными в результате конечно-элементного анализа:

$$c^2(\varepsilon_y, n, \bar{h}_r) = \frac{h_c}{h} = \sum_{i=0}^1 f_{ci}(\varepsilon_y, n) \cdot \ln(0,5\bar{h}_r)^i, \quad (17)$$

$$f_{ci}(\varepsilon_y, n) = \sum_{j=0}^4 \left[ \sum_{k=0}^3 (a_{ijk} \cdot \varepsilon_y^k) \cdot n^j \right];$$

$$\varepsilon_r(\varepsilon_y, n, \bar{h}_r) = \sum_{i=0}^3 f_{\varepsilon i}(\varepsilon_y, n) \cdot (0,5\bar{h}_r)^i, \quad (18)$$

$$f_{\varepsilon i}(\varepsilon_y, n) = \sum_{j=0}^4 \left[ \sum_{k=0}^3 (b_{ijk} \cdot \varepsilon_y^k) \cdot n^j \right];$$

$$\Psi_r(\varepsilon_y, n, \bar{h}_r) = \frac{P}{4R^2 \sigma_r} = \sum_{i=0}^3 f_{\Psi i}(\varepsilon_y, n) \cdot (0,5\bar{h}_r)^i, \quad (19)$$

$$f_{\Psi i}(\varepsilon_y, n) = \sum_{j=0}^4 \left[ \sum_{k=0}^3 (c_{ijk} \cdot \varepsilon_y^k) \cdot n^j \right];$$

где  $\sigma_r$  — определяется выражением (4). Значения 200 коэффициентов  $a_{ijk}$ ,  $b_{ijk}$  получены для

$$\varepsilon_y = 0,001...0,004, \quad n = 0...0,2 \quad \text{и} \quad \bar{h}_r = 0...0,12.$$

Вкладом авторов [11] в процедуру определения деформации является определение диаметра пятна контакта с учетом эффектов «sink-in / pile-up»:

$$d = 2\sqrt{h_c D - h_c^2} = 2\sqrt{c^2 h D - (c^2 h^2)^2}. \quad (20)$$

Используя выражения (18) и (3), можно построить диаграмму истинных напряжений при внедрении сферы в зависимости от величины деформации.

Важной характеристикой при описании упругопластического контакта является параметр  $c^2 = h_c/h$ , который определяется эффектами «sink-in / pile-up», т. е. упругим продавливанием материала и пластическим вытеснением материала вокруг отпечатка. В этом плане кроме упомянутой [11] отличается работа [12], где параметр  $c^2$  представлен в виде:

$$c^2(\varepsilon_y, n, \bar{h}) = M^{\frac{2}{N}} (2\bar{h})^{\frac{2}{N}-1}, \quad (21)$$

где  $\bar{h} = h/R$  — относительная глубина внедрения  $M = M(\varepsilon_y, n)$ ,  $N = N(\varepsilon_y, n)$ .

Значения параметров  $M(\varepsilon_y, n)$  и  $N(\varepsilon_y, n)$  определены конечно-элементным моделированием при значении коэффициента трения  $\mu = 0$ . Для других значений коэффициента трения следует использовать выражение:

$$c^2(\varepsilon_y, n, \bar{h}, \mu) = 1 + (c^2(\varepsilon_y, n, \bar{h}) - 1) \frac{F_\mu(\mu)}{F_\mu(0)}, \quad (22)$$

где:

$$F_\mu(\mu) = \begin{cases} 0,49 - 0,955\mu + 0,601\mu^2 + \\ + 3,855\mu^3 - 3,641\mu^4, & \mu \leq 0,29; \\ 0,3357 - 0,014\mu, & \mu > 0,29. \end{cases} \quad (23)$$

Относительный радиус  $\bar{a} = a/R$  площади контакта определяется выражением:

$$\bar{a}(\varepsilon_y, n, \bar{h}, \mu) = \sqrt{2\bar{h}_c(\varepsilon_y, n, \bar{h}, \mu) - \bar{h}_c^2(\varepsilon_y, n, \bar{h}, \mu)}, \quad (24)$$

где  $\bar{h}_c(\varepsilon_y, n, \bar{h}, \mu) = c^2(\varepsilon_y, n, \bar{h}, \mu) \cdot \bar{h}$ .

Для определения относительной нагрузки, приложенной к индентору, удобно использовать результаты работы [16]:

$$\bar{P}(\varepsilon_y, n, \bar{h}) = e^{-B\bar{h}^A}, \quad (25)$$

где  $A = A(\varepsilon_y, n)$ ;  $B = B(\varepsilon_y, n)$ ;

$$\bar{P} = \frac{P}{E^* R^2}.$$

Вопрос определения деформации не оставался без внимания отечественных ученых. Средняя степень деформации при вдавливании шара в плоскость по М.П. Марковцу [17]:

$$\psi_n = 0.5 \left[ 1 - \sqrt{1 - (d/D)^2} \right], \quad (26 \text{ а})$$

или:

$$\psi_n = \frac{t}{D}, \quad (26 \text{ б})$$

где  $t$  — величина внедрения шара.

Общая деформация в лунке  $\psi_n = 0.2\%$  достигается при  $d/D = 0.09$ . Данное соотношение использовано при определении  $H_{0.2}$  и  $\sigma_{0.2}$  по ГОСТ 22762-77.

Выражение (26 б) использовано также для определения деформации автором [18].

В работах [19; 20] для количественной оценки средней пластической деформации применялось следующее выражение:

$$\psi^{\text{ср}} = \frac{t}{R} = 1 - \left[ 1 - (d/D)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (27)$$

где  $R = 0,5D$ .

Между  $(d/D)_e$  на пределе прочности и индексом Майера  $m$  существует однозначная связь [20; 21]:

$$\left( \frac{d}{D} \right) = \frac{[m(m-2)]^{\frac{1}{2}}}{m-1}. \quad (28)$$

После подстановки в (27) получим:

$$\psi_e^{\text{ср}} = \frac{m-2}{m-1}. \quad (29)$$

Таким образом, деформация при вдавливании связана с индексом Майера. Такая же связь наблюдается в работах С.И. Булычева [22–24]. Так, в частности в работе [22, с. 10] указано, что при исследовании корреляции диаграмм твердости и растяжения исходят из эмпирического закона Майера. Диаграммы истинных напряжений  $S$  и  $HM$  сравнивают, используя степенные аппроксимации:

$$S = K\varepsilon^n; \quad (30)$$

$$HM = B_m(d/D)^{m-2}. \quad (31)$$

В работах [23; 24] деформация описывается зависимостью:

$$\varepsilon = \alpha(d/D)^\beta, \quad (32)$$

где согласно [23]:

$$\alpha = 0.15 + 1.2(m-2), \quad \beta = 1.2[1 + (m-2)^{1.7}]; \quad (33)$$

согласно [24]:

$$\alpha = 0.15 + 1.83(m-2)^{1.4}, \quad \beta = 1.18 + (m-2)^{1.6}. \quad (34)$$

Выражение (32) позволяет записать зависимость Майера в виде:

$$HM = B_m(d/D)^{m-2} = B^* [\alpha(d/D)^\beta]^{\frac{m-2}{\beta}} = K\varepsilon^n, \quad (35)$$

где:

$$S = HM/3; \quad B^*/3 = K; \quad B^* \alpha^{\frac{m-2}{\beta}} = B_m; \quad \frac{m-2}{\beta} = n.$$

Таким образом осуществляется переход от диаграмм растяжения к диаграммам твердости и наоборот по С.И. Булычеву.

Аналогичные вопросы рассматривались также в работах [25; 26], где указано, что величину контактных давлений целесообразно рассматривать в зависимости от степени деформации в отпечатке  $\varepsilon$ , которая в отличие от конуса и пирамиды при вдавливании сферического индентора переменна из-за нарушения геометрического подобия лунки. Для анализа значений  $\varepsilon$  подбирались соответствующие эквиваленты деформации в лунке, при этом рассматривались параметры отпечатков — глубина и диаметр. Был сделан вывод, что при нагружении степень деформации следует рассчитывать по формуле:

$$\varepsilon_i = k_\varepsilon \sqrt{\frac{h_i}{R}}, \quad (36)$$

где  $k_\varepsilon = 0,11$ ;  $h_i$  — величина внедрения;  $R$  — радиус сферы.

**Задачи исследований.** Учитывая принципиальные недостатки, связанные с игнорированием эффектов «sink-in / pile-up» и недостоверной схемой восстановленного отпечатка в работах [3–5], положенных в основу метода АВИ, а также в связи с новыми достижениями в области конечно-элементного моделирования при упругопластическом внедрении сферы авторы поставили следующие задачи:

– рассмотреть возможность определения деформации по выражению (4) с учетом современных представлений о разгрузке отпечатка;

– определить деформацию, учитывая последние достижения в области конечно-элементного моделирования при упругопластическом внедрении сферы.

Рассмотрим процесс нагружения и разгрузки сферического индентора. Нагружение можно описать выражением [27; 28]:

$$P = C_1 h^\alpha, \quad (37)$$

где  $C_1$  и  $\alpha$  — константы для данного материала.

Тогда распределение давления на площадке радиусом  $a_c$  [29; 30]:

$$p_r = \alpha p_m \left( 1 - r^2/a_c^2 \right)^{\alpha-1}, \quad (38)$$

где  $p_m = P/(\pi a_c^2)$  — среднее давление на площадке контакта.

В нагруженном состоянии, при действии нагрузки  $P$  индентор внедряется на величину  $h$ . В работах [31; 32] допускалось, что при разгрузке перемещения

$u_z$  точек поверхности нагруженной лунки происходят вертикально. Схема восстановленной лунки представлена на рис. 1.

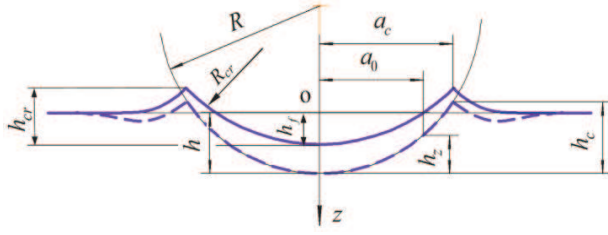


Рис. 1. Схема восстановленной лунки

Пересечение профиля восстановленной лунки происходит при  $r = a_0$ . При этом имеет место равенство:

$$h = h_z + u_z, \quad (39)$$

где  $u_z$  — вертикальное перемещение поверхности лунки при  $r = a_0$ ; величина  $h_z$  определяется выражением:

$$h_z = R - \sqrt{R^2 - a_0^2}$$

или:

$$h_{zr} = \frac{h_z}{R} = 1 - \sqrt{1 - a_{r0}^2}, \quad (40)$$

где  $a_{r0} = a_0/R$ .

Вертикальные перемещения  $\bar{u}_{zr} = u_z/R$  согласно [33] равны:

$$\bar{u}_{zr}(a_{0r}) = \frac{\bar{P}K_\alpha}{\pi a_{cr}} \int_0^{\pi/2} \left( 1 - \frac{a_{0r}^2 \sin^2 \varphi}{a_c^2} \right)^{\alpha-0,5} d\varphi, \quad (41)$$

где  $a_{cr} = a_c/R$ ;  $a_{0r} = a_0/R$ ;

$$K_\alpha = \frac{2^\alpha}{\pi} \alpha B(\alpha, \alpha).$$

Подставляя выражения (40) и (41) в (39) и с учетом того, что  $\alpha = A(\epsilon_y, n)$ , получим уравнение:

$$\bar{h} = 1 - \sqrt{1 - a_{r0}^2} + \frac{\bar{P}K_\alpha}{\pi a_{cr}} \int_0^{\pi/2} \left( 1 - \frac{a_{0r}^2 \sin^2 \varphi}{a_c^2} \right)^{A(\epsilon_y, n)-0,5} d\varphi, \quad (42)$$

из которого необходимо определить  $a_{0r}$ .

Согласно принятым обозначениям  $d_p = 2a_0$ . Деформации, рассчитанные по выражению (4), в зависимости от  $h/R$  для разных значений  $\epsilon_y$  и  $n$  приведены на рис. 2.

Первым описал поведение материала в упругопластической области Е. Майер, связывая нагрузку  $P$  с диаметром  $d$ :

$$P = Ad^m. \quad (43)$$

В логарифмических координатах  $\lg P - \lg d$  выражение (43) представляет собой линию, а индекс  $m$  — тангенс угла наклона к оси абсцисс.

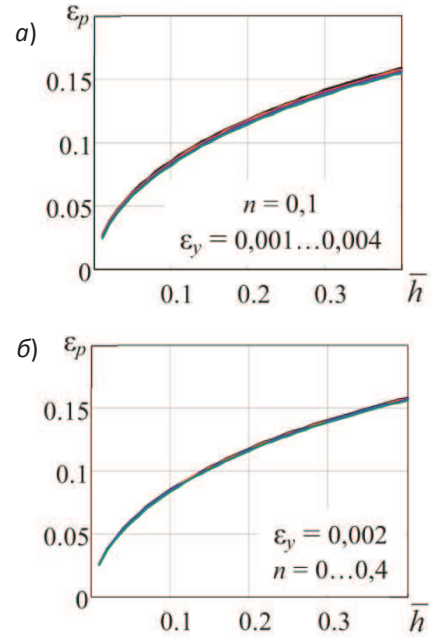


Рис. 2. Деформации, рассчитанные по выражениям (4) и (42)

Для определения  $m$  воспользуемся результатами работ конечно-элементного моделирования [12; 16], применяя выражения (21) и (25).

Из выражения (43):

$$m = \frac{\lg(P_2/P_1)}{\lg(d_2/d_1)}. \quad (44)$$

Следует отметить, что  $\lg(P_2/P_1) = \lg(\bar{P}_2/\bar{P}_1)$ , где  $\bar{P} = P/(ER^2)$ , а  $\lg(d_2/d_1) = \lg(a_2/a_1) = \lg(a_{r2}/a_{r1})$ , где:

$$a_i = \sqrt{2Rc^2 h_i - (c^2 h_i)^2};$$

$$a_{ri} = \frac{a_i}{R} = \sqrt{2c^2 \bar{h}_i - (c^2 \bar{h}_i)^2}; \quad (45)$$

$\bar{h}_i = h_i/R$ .

Таким образом, исходя из вышесказанного:

$$m = \frac{\lg \left( \frac{P_2(\epsilon_y, n, \bar{h}_2)}{P_1(\epsilon_y, n, \bar{h}_1)} \right)}{\lg \left( \frac{2c^2(\epsilon_y, n, \bar{h}_2)\bar{h}_2 - (c^2(\epsilon_y, n, \bar{h}_2)\bar{h}_2)^2}{2c^2(\epsilon_y, n, \bar{h}_1)\bar{h}_1 - (c^2(\epsilon_y, n, \bar{h}_1)\bar{h}_1)^2} \right)^{0,5}}, \quad (46)$$

где  $P_i(\epsilon_y, n, \bar{h}_i)$  — определяется выражением (25).

Зависимости индекса Майера  $m$  от экспоненты упрочнения  $n$  представлены на рис. 3.

Если закон Майера представить в виде (31), то константа  $B_m = B_m(\epsilon_y, n)$  определяется выражением:

$$\frac{B_m(\epsilon_y, n)}{E_{-B}^*} = B_E(\epsilon_y, n) = \frac{e^{-B(\epsilon_y, n)}}{\pi} \bar{h}_2^{A(\epsilon_y, n)} a_{r, (\epsilon_y, n, \bar{h}_z)}^{-m(\epsilon_y, n)}. \quad (47)$$

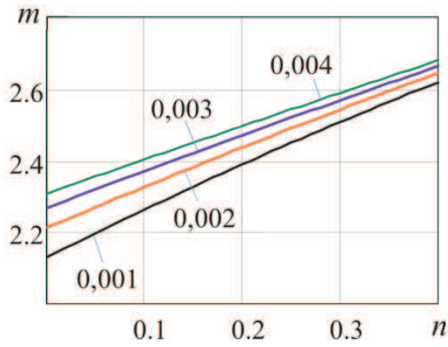


Рис. 3. Зависимость индекса Майера  $m$  от экспоненты упрочнения  $n$  для разных значений  $\epsilon_y$

С помощью константы  $B_m(\epsilon_y, n)$  осуществляется переход от диаграмм твердости к диаграммам растяжения и наоборот.

Если деформация описывается зависимостью (32), то:

$$\beta = (m - 2)/n; \quad (48)$$

$$\alpha(d/D)_e^\beta = \epsilon_p; \quad (49)$$

$$\alpha = \frac{\epsilon_p}{(d/D)_e^\beta} = \frac{n}{(d/D)_e^\beta}; \quad (50)$$

так как согласно данным [34; 35]  $\epsilon_p = n$ .

Подставляя выражение (50) в (32), получим:

$$\epsilon = n \left( \frac{d/D}{(d/D)_e} \right)^\beta = n \left( \frac{a/R}{(a/R)_e} \right)^\beta \quad (51)$$

При  $(d/D) = (d/D)_e$  имеем  $\epsilon = n = \epsilon_p$ .

На рис. 4 представлены зависимости деформации от  $a_r$  (рис. 4а) и от  $\bar{h}$  (рис. 4б). Как следует из рис. 4б, функция  $\epsilon(\bar{h})$  может быть выпуклой при  $m(\epsilon_y, n) - 2 < n$  и вогнутой при  $m(\epsilon_y, n) - 2 > n$ .

На рис. 5 представлены зависимости  $\epsilon(\bar{h})$  для разных значений  $\epsilon_y$  и  $n$ .

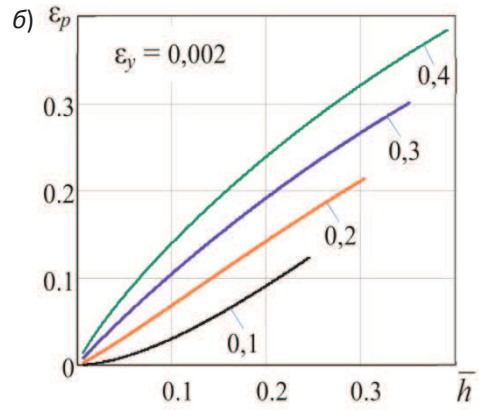
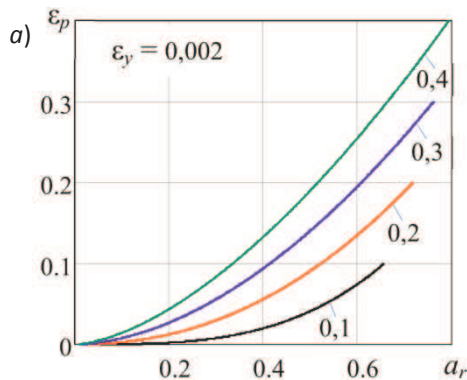


Рис. 4. Зависимость деформации от  $a_r$  (а) и от  $\bar{h}$  (б) для разных значений  $n$

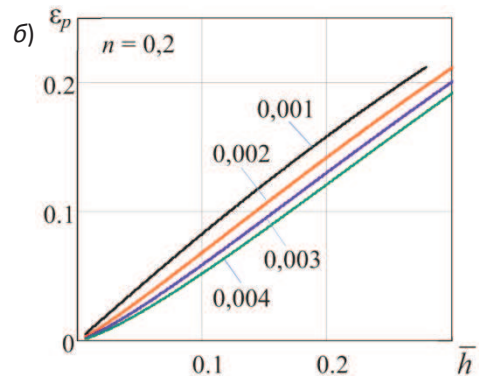
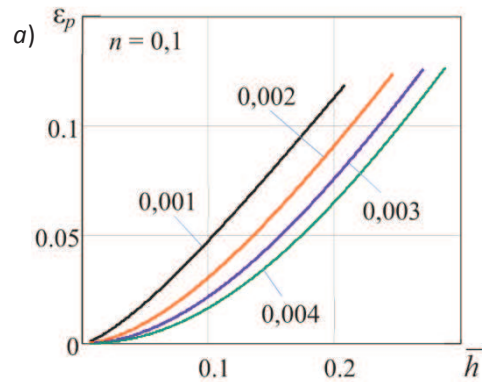


Рис. 5. Зависимость деформации от величины  $\bar{h}$  для значений  $n = 0,1; 0,2$  и разных значений  $\epsilon_y$

### Заключение

1. Из приведенного следует, что величина деформации при разных методах определения может отличаться в разы.

2. Несмотря на недостатки, связанные с игнорированием эффектов «sink-in / pile-up» и примитивной схемой разгруженного отпечатка, метод АВІ находит применение и в настоящее время.

3. Для схемы разгруженного профиля лунки, представленной в работе [11, Fig. 1], с учетом последних представлений авторов [29-33] получено выражение (42), из которого определяется параметр  $a_{0r}$ . Так как  $a_{0r} = a_0/R = d_p/D$ , то представляется возможность определить деформацию по выражению (4). Из результатов вычислений, представленных на рис. 2, следует, что  $\epsilon_p$  практически не зависит от параметров упруго-

пластического тела Холломона –  $\epsilon_y$  и  $n$ . Это противоречит представленному выше утверждению, что при исследовании корреляции диаграмм твердости и растяжения исходят из эмпирического закона Майера. Как следует из рис. 3, параметры  $\epsilon_y$  и  $n$  оказывают значительное влияние на индекс Майера.

Из вышесказанного следует сомнение определения деформации по методу АВИ, игнорирующего эффекты «sink-in / pile-up», на которые в значительной мере влияют параметры  $\epsilon_y$  и  $n$ .

4. Используя выражение (32), предложенное С.И. Булычевым для определения деформации, получено выражение (51), из которого следует, что функция  $\epsilon(\bar{h})$  может быть выпуклой при  $m(\epsilon_y, n) - 2 < n$  и вогнутой при  $m(\epsilon_y, n) - 2 > n$ .

Учитывая влияние на индекс Майера параметров  $\epsilon_y$  и  $n$ , данный подход является более информативным и предпочтительным.

Исследования проведены при поддержке Минобрнауки России в рамках госзадания № 2014/10 на 2015 г. (проект № 1754).

### Литература

1. Матюнин В.М. Методы и средства безобразцовой оперативной оценки механических свойств материалов элементов конструкций и машин: автореф. дис. ... д-ра техн. наук. М., 1993. 36 с.
2. Tabor D. The Hardness of Metals. Oxford: Clarendon Press, 1951.
3. Ahn J.-H., Kwon D. Derivation of plastic stress-strain relation ship from ball indentations: Examination of strain definition and pileup effect // J. Mater. Res. 2001. Vol. 16. P. 3170-3178.
4. Haggag F.M. In-Situ Measurements of Mechanical Properties Using Nover Automation System. ASTM STP 1204.1993. P. 27-44.
5. Haggag F.M., Wang J.A., Sokolov M.A., Murty K.L. Use of Portable/in situ Stress-Strain Microprobe System to Measure Stress-Strain Behaviour and Damage in Metallic Materials and Structures, Nontraditional Methods of Sensign Stress, Strain, and Damage in Materials and Structures. ASTM STP 1318. 1997. P. 85-98.
6. Taljat B., Zacharia T., Kosel F. New Procedure to determine Stress Curve from Spherical Indertation // International Journal of Solids and Structures. 1998. Vol. 35. P. 4411-4426.
7. Инструкция по определению механических свойств металла оборудования атомных станций безобразцовыми методами по характеристикам твердости: РД ЭО 0027-2005. М.: ФГУП КОНЦЕРН «РОСЭНЕРГОАТОМ», 2005. 47 с.
8. Chatterjee S., Panwar Sanjay, Madhusoodanan K. Qualification of In-situ Property Measurement System Using Heat Treated Spool Pieces of Zr 2.5 wt% Nb Pressure Tube // Procedia Engineering. 2014. № 86. P. 892-898.
9. Chatterjee S., Panwar Sanjay, Madhusoodanan K., Vijayan P.K., Mallik G.K., Alur V.D. Measurement of mechanical properties of a PHWR operated pressure tube using an in-house developed 'In situ Property Measurement System [Электронный ресурс] (IPrMS)'. URL <http://www.barc.gov.in/publications/nl/2014/2014070806.pdf>. (дата обращения: 30.06.2015).
10. Cao Y.P., Lu J. A new method to extract the plastic properties of metal materials from an instrumented spherical indentation loading curve // Acta Materialia. 2004. Vol. 52. P. 4023-4032.
11. Lee H., Lee J.H., Pharr G.M. A numerical approach to spherical indentation techniques for material property evaluation // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2005. Vol. 53. P. 2037-2069
12. Hernot X., Bartier O., Bekouche Y., El Abdi R., Mauvoisin G. Influence of penetration depth and mechanical properties on contact radius determination for spherical indentation //

International Journal of Solids and Structures. 2006. № 43. P. 4136-4153.

13. Kim S.H., Lee B.W., Choi Y., Kwon D. Quantitative determination of contact depth during spherical indentation of metallic materials-a FEM study // Materials Science and Engineering A. 2006. Vol. 415. P. 59-65.

14. Cui H., Chen H., Chen J., Huand C., Wu C. FEA of evaluating material yield strength, and strain hardening exponent using a spherical indentation // Acta metallurgica sinica. 2009. Vol. 45. P. 189-194.

15. Cui H., Chen H., Chen J., Huand C., Wu C. Behavior of pile-up and sinking-in around spherical indentation and its effect on hardness determination // Chinese journal of materials research. 2009. Vol. 23, № 1. P. 54-58.

16. Collin J.M., Mauvoisin G., Pilvin P. Materials characterization by instrumented indentation using two different approaches // Materials and Design. 2010. Vol. 32. P. 636-640.

17. Марковец М.П. Определение механических свойств металлов по твердости. М.: Машиностроение, 1979. 191 с.

18. Шабанов В.М. Экспресс-диагностика технического состояния металла элементов конструкций АЭС методом кинетического индентирования // Технологии техногенной безопасности. 2013. № 3 (39). С. 1-7.

19. Матюнин В.М. Оперативная диагностика механических свойств конструкционных материалов. М.: Изд. дом МЭИ, 2006. 214 с.

20. Матюнин В.М., Дубов А.А., Марченков А.Ю. Общие закономерности проявления масштабного фактора при определении прочности и твердости металла // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2010. Т. 76, № 8. С. 43-47.

21. Огар П.М., Тарасов В.А., Горохов Д.Б., Турченко А.В. Учет характеристик упрочняемого материала при применении эмпирического закона Майера // Системы. Методы. Технологии. 2013. № 4. С. 50-54.

22. Булычев С.И., Алехин В.П. Испытание материалов непрерывным вдавливанием индентора. М.: Машиностроение, 1990. 224 с.

23. Булычев С.И. Переход от диаграмм вдавливания к диаграммам растяжения с учетом упрочненного поверхностного слоя // Деформация и разрушение материалов. 2010. № 2. С. 43-48.

24. Булычев С.И. Твердость и гистерезис на пределе текучести // Деформация и разрушение материалов. 2011. № 1. С. 41-45.

25. Ковалев А.П. Основные закономерности вдавливания сферического индентора и оценка физико-механических свойств поверхностного слоя деталей // Упрочняющие технологии и покрытия. 2007. № 1. С. 36-41.

26. Ковалев А.П. Оценка несущей способности поверхностного слоя деталей вдавливанием сферического индентора // Технология машиностроения. 2007. № 9. С. 50-53.

27. Огар П.М., Тарасов В.А., Турченко А.В. Описание взаимодействия жесткой сферы с упругопластическим полупространством // Труды Братского государственного университета. Сер. Естественные и инженерные науки. 2012. Т. 1. С. 163-169.

28. Огар П.М., Тарасов В.А. Kinetic Indentation Application to Determine Contact Characteristics of Sphere and Elastoplastic Half-Space // Advanced Materials Research. 2013. Vol. 664. P. 625-631.

29. Огар П.М., Тарасов В.А., Турченко А.В. Развитие инженерных расчетов характеристик контакта жесткой сферы с упругопластическим полупространством // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2012. № 1. С. 80-87.

30. Огар П.М., Тарасов В.А., Турченко А.В. Распределение давления при контактировании сферического индентора с упругопластическим полупространством // Механика XXI века. 2013. № 12. С. 71-72.

31. Огар П.М., Тарасов В.А., Федоров И.Б. Энергетический подход к определению твердости материалов при индентировании сферой // Механика XXI века. 2013. № 12. С. 66-70.

32. Ogar P.M., Tarasov V.A., Gorokhov D.B. Energy concept of hardness by the kinetic sphere indentation // *Advanced Materials Research*. 2015. Vol. 1061-1062. P. 579-583.

33. Огар П.М., Тарасов В.А. Влияние формы осесимметричной нагрузки на напряженно-деформированное состояние упругопластического полупространства // *Системы. Методы. Технологии*. 2010. № 5. С. 14-20.

34. ASTM E646-07e1, Standard Test Method for Tensile Strain-Hardening Exponents (n -Values) of Metallic Sheet Materials, ASTM International, West Conshohocken, PA, 2007 [Электронный ресурс] // URL: <http://www.astm.org/Standards/E646.htm> (дата обращения: 10.07.2015).

35. Огар П.М., Горохов Д.Б. Определение экспоненты упрочнения материалов из характеристик условной диаграммы растяжения // *Труды Братского государственного университета. Сер. Естественные и инженерные науки*. 2015. Т. 1. С. 55-59.

### References

1. Matyunin V.M. Methods and tools for specimenless operational estimation of mechanical properties of materials and constructional elements of machines: avtoref. dis. ... d-ra tekhn. nauk. M., 1993. 36 p.

2. Tabor D. *The Hardness of Metals*. Oxford: Clarendon Press, 1951.

3. Ahn J.-H., Kwon D. Derivation of plastic stress-strain relationship from ball indentations: Examination of strain definition and pileup effect // *J. Mater. Res*. 2001. Vol. 16. P. 3170-3178.

4. Haggag F.M. In-Situ Measurements of Mechanical Properties Using Nover Automation System. ASTM STP 1204.1993. P. 27-44.

5. Haggag F.M., Wang J.A., Sokolov M.A., Murty K.L. Use of Portable in-situ Stress-Strain Microprobe System to Measure Stress-Strain Behaviour and Damage in Metallic Materials and Structures, Nontraditional Methods of Sensign Stress, Strain, and Damage in Materials and Structures. ASTM STP 1318. 1997. P. 85-98.

6. Taljat B., Zacharia T., Kosel F. New Procedure to determine Stress Curve from Spherical Indertation // *International Journal of Solids and Structures*. 1998. Vol. 35. P. 4411-4426.

7. Instruktsiya po opredeleniyu mekhanicheskikh svoystv metalla oborudovaniya atomnykh stantsii bezobraztsovymi metodami po kharakteristikam tverdoti: RD EO 0027-2005. M.: FGUP KONTsERN «ROSENERGOATOM», 2005. 47 p.

8. Chatterjee S., Panwar Sanjay, Madhusoodanan K. Qualification of In-situ Property Measurement System Using Heat Treated Spool Pieces of Zr 2.5 wt% Nb Pressure Tube // *Procedia Engineering*. 2014. № 86. P. 892-898.

9. Chatterjee S., Panwar Sanjay, Madhusoodanan K., Vijayan P.K., Mallik G.K., Alur V.D. Measurement of mechanical properties of a PHWR operated pressure tube using an in-house developed 'In situ Property Measurement System [Elektronnyi resurs] (IProMS)'. URL <http://www.barc.gov.in/publications/nl/2014/2014070806.pdf>. (data obrashcheniya: 30.06.2015)

10. Cao Y.P., Lu J. A new method to extract the plastic properties of metal materials from an instrumented spherical indentation loading curve // *Acta Materialia*. 2004. Vol. 52. P. 4023-4032.

11. Lee H., Lee J.H., Pharr G.M. A numerical approach to spherical indentation techniques for material property evaluation // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2005. Vol. 53. P. 2037-2069.

12. Hernot X., Bartier O., Bekouche Y., El Abdi R., Mauvoisin G. Influence of penetration depth and mechanical properties on contact radius determination for spherical indentation // *International Journal of Solids and Structures*. 2006. № 43. P. 4136-4153.

13. Kim S.H., Lee B.W., Choi Y., Kwon D. Quantitative determination of contact depth during spherical indentation of metallic materials-a FEM study // *Materials Science and Engineering A*. 2006. Vol. 415. P. 59-65.

14. Cui H., Chen H., Chen J., Huand C., Wu C. FEA of evaluating material yield strength, and strain hardening exponent

using a spherical indentation // *Acta metallurgica sinica*. 2009. Vol. 45. P. 189-194.

15. Cui H., Chen H., Chen J., Huand C., Wu C. Behavior of pile-up and sinking-in around spherical indentation and its effect on hardness determination // *Chinese journal of materials research*. 2009. Vol. 23, № 1. P. 54-58.

16. Collin J.M, Mauvoisin G., Pilvin P. Materials characterization by instrumented indentation using two different approaches // *Materials and Design*. 2010. Vol. 32. P. 636-640.

17. Markovets M.P. Determination of mechanical properties of metals hardness. M.: Mashinostroenie, 1979. 191 p.

18. Shabanov V.M. Rapid diagnosis of the technical state of the metal structural elements of NPP using kinetic indentation method // *Technology of technosphere safety*. 2013. № 3 (49). 1-7 p.

19. Matyunin V.M. Express-diagnosis of mechanical properties of constructional materials. M.: Izd. dom MEI, 2006. 214 p.

20. Matyunin V.M., Dubov A.A., Marchenkov A.Yu. General regularities of manifestation of the scale factor in determining the strength and hardness of the metal // *Industrial laboratory. Materials diagnostics*. 2010. T. 76, № 8. P. 43-47.

21. Ogar P.M., Tarasov V.A., Gorokhov D.B., Turchenko A.V. The account of hardening material characteristics in applying of Meyer's empirical law // *Systems. Methods. Technologies*. 2013. № 4. P. 50-54.

22. Bulychev S.I., Alekhin V.P. *Material Testing by Continuous Indentation of an Indenter*. M.: Mashinostroenie, 1990. 224 p.

23. Bulychev S.I. Transition from indentation diagrams to stress-strain diagrams taking into consideration hardened surface layer // *Deformation and Fracture of Materials*. 2010. № 2. P. 43-48.

24. Bulychev S.I. Hardness and hysteresis at the yield strength // *Deformation and Fracture of Materials*. 2011. № 1. P. 41-45.

25. Kovalev A.P. Basic laws of the indentation of a spherical indenter and evaluation of physical and mechanical properties of the surface layer parts // *Strengthening Technologies and Coatings*. 2007. № 1. P. 36-41.

26. Kovalev A.P. Evaluation of the bearing capacity of the surface layer of details of a spherical indenter indentation // *Tekhnologiya mashinostroeniya*. 2007. № 9. P. 50-53.

27. Ogar P.M., Tarasov V.A., Turchenko A.V. Description of the contact of a rigid sphere and elastoplastic half-space // *Trudy Bratskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. Estestvennye i inzhenernye nauki*. 2012. T. 1. P. 163-169.

28. Ogar P.M., Tarasov V.A. Kinetic Indentation Application to Determine Contact Characteristics of Sphere and Elastoplastic Half-Space // *Advanced Materials Research*. 2013 Vol. 664. P. 625-631.

29. Ogar P.M., Tarasov V.A., Turchenko A.V. Development of engineering calculation characteristics of the contact of a rigid sphere with an elastic-plastic half-space // *Modern technologies. System analysis. Modeling*. 2012. № 1. P. 80-87.

30. Ogar P.M., Tarasov V.A., Turchenko A.V. The pressure distribution in contact of the spherical indenter with an elastic-plastic half-space // *Mekhaniki XXI veku*. 2013. № 12. P. 71-72.

31. Ogar P.M., Tarasov V.A., Fedorov I.B. Power approach to determination of materials hardness by spherical indentation // *Mekhaniki XXI veku*. 2013. № 12. P. 66-70.

32. Ogar P.M., Tarasov V.A., Gorokhov D.B. Energy concept of hardness by the kinetic sphere indentation // *Advanced Materials Research*. 2015. Vol. 1061-1062. P. 579-583.

33. Ogar P.M., Tarasov V.A. Effect of the axisymmetrical load shape on the loaded-strained state of elasticoplastic half-space // *Systems. Methods. Technologies*. 2010. № 5. P. 14-20.

34. ASTM E646-07e1, Standard Test Method for Tensile Strain-Hardening Exponents (n -Values) of Metallic Sheet Materials, ASTM International, West Conshohocken, PA, 2007 [Elektronnyi resurs] // URL: <http://www.astm.org/Standards/E646.htm> (data obrashcheniya: 10.07.2015).

35. Ogar P.M., Gorokhov D.B. Determination of hardening material exponent from the characteristics of engineering stress-strain diagram // *Trudy Bratskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. Estestvennye i inzhenernye nauki*. 2015. T. 1. P. 55-59.