МОДЕЛИРОВАНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

УДК 681.5

Алгоритм разложения дробного числа $\frac{a}{b}$, если a – нечетное число, b – нечетное число

Ю.Н. Алпатов[a], О.В. Бунтин[b], С.С. Унистюк[c]

Братский государственный университет, ул. Макаренко 40, Братск, Россия
[a]iipm@brstu.ru, [b]buntin@gmail.com, [c]1229664@gmail.com
Статья поступила 15.08.2014, принята 18.11.2014

В статье рассматривается алгоритм разложения дробного числа, если числитель и знаменатель являются нечетными числами. На основе методики декомпозиции элементарных звеньев в виде целочисленных значений получен результат разложения числа $\frac{a}{b}$, если a — нечетное число, а b — нечетное число, в виде конечной цепной дроби. *Приводится соответствующая структурная схема полученного разложения числа* $\frac{a}{b}$. *На основе данного алгоритма разработана программа на языке программирования математического пакета Maple 13, программный код которой представлен в статье. Алгоритм соответствует одному из трех чисел* $\frac{a}{b}$ *(a — нечетное число, b — нечетное число). Для двух других случаев, где a — четное число, b — нечетное число и a — нечетное число, b — четное число, также получены соответствующие алгоритмы. Случай, где a — четное число и b — четное число, необходимо привести к одному из трех указанных случаев, для чего надо сократить дробь* $\frac{a}{b}$. *Используя данный алгоритм при технической реализации звеньев, полученных при разложении передаточной функции, возможно представить коэффициенты* $\frac{a}{b}$ *(a — нечетное число, b — нечетное число) этих звеньев в виде определенной структуры из элементарных звеньев с целочисленными значениями параметров. Полученная структура имеет высокий уровень точности. В статье показаны примеры использования предложенного алгоритма.*

Ключевые слова: разложение числа, алгоритм, нечетное число, целочисленные значения, вещественные коэффициенты, элементарные звенья.

Algorithm of expansion of fractional number $\frac{a}{b}$, if a is an odd number, b is an odd number

Yu.N. Alpatov[a], O.V. Buntin[b], S.S. Unistyuk[c]

Bratsk State University; 40, Makarenko St., Bratsk, Russia
[a]iipm@brstu.ru, [b]buntin@gmail.com, [c]1229664@gmail.com
Received 15.08.2014, accepted 18.11.2014

The article deals with the algorithm of expansion of a fractional number if the numerator and a denominator are odd numbers. On the basis of a technique of decomposition of elementary units in the form of whole-number values the result of expansion of number $\frac{a}{b}$ *has been received in the form of final chain fraction if a is an odd number, and b is an odd number. Action diagram for the expansion of number* $\frac{a}{b}$ *has been received. On the basis of the given algorithm a program has been developed in a programming language of mathematical package Maple 13, the program code of the program developed is presented in the article. The algorithm corresponds to one of three numbers* $\frac{a}{b}$ *(a is an odd number, b is an odd number), for two other cases where a is an even number, b is an odd number and a is an odd number, b is an even number, corresponding algorithms have also been received. The case in which a is an even* *number and b is an even number should be led to one of three cases mentioned above by reducing the fraction $\frac{a}{b}$. By using the given algorithm under engineering implementation of the units received under expansion of a transfer function, it is possible to present coefficients $\frac{a}{b}$ (a is an odd number, b is an odd number) of these units in the form of a certain structure of elementary units with whole-number values of parameters. The received structure has high level of accuracy. Examples of the use of the algorithm are shown in the article.*

Keywords: number expansion, algorithm, odd number, whole-number values, real coefficients, elementary units.

Введение. При синтезе САУ получаются передаточные функции в виде дробно-рациональной функции достаточно высокого порядка. Реализация техническими средствами такой функции вызывает большие, часто неоправданные трудности. Естественно стремление представить дробно-рациональную функцию с помощью определенной структуры элементарных или простых звеньев. При дальнейшей реализации полученных элементарных звеньев в определенных случаях возникает необходимость представления коэффициентов передач и постоянных времени в целых числах. Для этого можно использовать методику декомпозиции элементарных звеньев в виде целочисленных значений. Из методики можно выделить три алгоритма разложения дробного числа $\frac{a}{b}$: a — четное число, b — нечетное число; a — нечетное число, b — нечетное число; a — нечетное число, b — четное число.

Методика исследования. На основе методики декомпозиции элементарных звеньев в виде целочисленных значений получен результат разложения числа $\frac{a}{b} \in Q$, если a — нечетное число, а b — нечетное число, в виде [1; 7; 9]:

$$\frac{a}{b} = \cfrac{d_0}{a_0 + \cfrac{d_1}{a_1 + \cfrac{d_2}{a_2 + \ddots + \cfrac{d_n}{a_n + d}}}}, \qquad (1)$$

где

$a_1 = \frac{1}{c_i}$; $i = 1:n$; $c_i \in N$; $c_i > 1$; $d_i \in N$; $d \in N$; $d > 1$;

N — множество натуральных чисел.

Разложение числа $\frac{a}{b} \in Q$ в виде (1), если a — нечетное число, b — нечетное число, производим следующим образом.

1. Проверяем, если $a=1$ или $a=3$, то числитель и знаменатель дроби $\frac{a}{b}$ умножаем на число $m \in N$, m — нечетное число и $m>3$.
2. Прибавим и отнимем единицу в знаменателе b, получим знаменатель в следующем виде: $1+(b-1)$.
3. Разложим числитель a на простые множители. В качестве делителя a_1 используем наименьший простой множитель числа a.
4. Проверяем делитель $a_1 = 3$ и в качестве делителя выбираем наименьший множитель $a_i \neq 3$, если такого множителя нет, то в качестве делителя берем само число a.
5. Разделим число a на a_1, получим d_0.
6. Разделим 1 и $b-1$ в знаменателе числа $\frac{a}{1+(b-1)}$ на a_1, получим $\frac{1}{c_0} = \frac{1}{a_1}$ и $\frac{b-1}{a_1}$.
7. Прибавим и отнимем единицу в знаменателе числа $\frac{b-1}{a_1}$, получим знаменатель в следующем виде: $1+(a_1-1)$.
8. В качестве делителя b_1 числа $b-1$ берем $b_1 = 2$.
9. Разделим число $b-1$ на b_1, получим d_1.
10. Разделим 1 и $a_1 - 1$ в знаменателе числа $\frac{b-1}{1+(a_1-1)}$ на b_1, получим $\frac{1}{c_1} = \frac{1}{b_1}$ и $d = \frac{b-1}{b_1}$.

В результате данного алгоритма получим разложение следующего вида:

$$\frac{a}{b} = \cfrac{d_0}{\cfrac{1}{c_0} + \cfrac{d_1}{\cfrac{1}{c_1} + d}}. \qquad (2)$$

Данному разложению соответствует структурная схема на рис. 1.

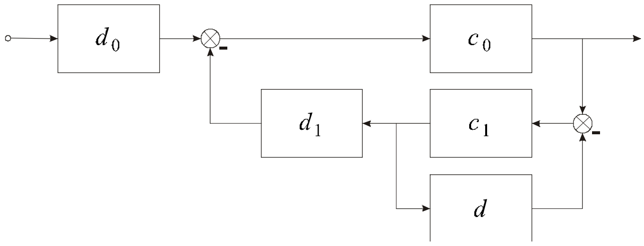

Рис. 1. Структурная схема разложения числа $\frac{a}{b} \in Q$ (2), при a — нечетном числе, b — нечетном числе

Рассмотрим действие предложенного алгоритма на примерах.

Пример 1.

Пусть дано число $\frac{379}{645}$. Выразим это дробное число через целые.

Прибавим и отнимем единицу в знаменателе, получим:

$$\frac{379}{645}=\frac{379}{1+644}.$$

Далее разложим числитель на простые множители:

$$\frac{379}{645}=\frac{379}{1+644}.$$

Наименьший простой множитель числителя равен 379, значит, разделим числитель на 379, а знаменатель по частям — на 379, получим:

$$\frac{379}{645}=\frac{1}{\frac{1}{379}+\frac{644}{379}}.$$

Прибавим и отнимем единицу в знаменателе числа $\frac{644}{379}$, получим:

$$\frac{379}{645}=\frac{1}{\frac{1}{379}+\frac{644}{1+378}}.$$

Далее разделим числитель числа $\frac{644}{1+378}$ на 2, а знаменатель по частям на 2, получим:

$$\frac{379}{645}=\frac{1}{\frac{1}{379}+\frac{322}{\frac{1}{2}+189}}. \qquad (3)$$

Пример 2.

Пусть дано число $\frac{583}{153}$. Выразим это дробное число через целые.

Прибавим и отнимем единицу в знаменателе, получим:

$$\frac{583}{153}=\frac{583}{1+152}.$$

Далее разложим числитель на простые множители:

$$\frac{583}{153}=\frac{11\cdot 53}{1+152}.$$

Наименьший простой множитель числителя равен 11, значит, разделим числитель на 11, а знаменатель по частям на 11, получим:

$$\frac{583}{153}=\frac{53}{\frac{1}{11}+\frac{152}{11}}.$$

Прибавим и отнимем единицу в знаменателе числа $\frac{152}{11}$, получим:

$$\frac{583}{153}=\frac{53}{\frac{1}{11}+\frac{152}{1+10}}.$$

Далее разделим числитель числа $\frac{152}{1+10}$ на 2, а знаменатель по частям на 2, получим:

$$\frac{583}{153}=\frac{53}{\frac{1}{11}+\frac{76}{\frac{1}{2}+5}}. \qquad (4)$$

Пример 3.

Пусть дано число $\frac{4767}{8461}$. Выразим это дробное число через целые.

Прибавим и отнимем единицу в знаменателе, получим:

$$\frac{4767}{8461}=\frac{4767}{1+8460}.$$

Далее разложим числитель на простые множители:

$$\frac{4767}{8461}=\frac{3\cdot 7\cdot 227}{1+8460}.$$

Наименьший простой множитель числителя равен 3, значит, в качестве делителя берем наименьший множитель, не равный 3, т. е. 7. Разделим числитель на 7, а знаменатель по частям на 7, получим:

$$\frac{4767}{8461}=\frac{681}{\frac{1}{7}+\frac{8460}{7}}.$$

Прибавим и отнимем единицу в знаменателе числа $\frac{8460}{7}$, получим:

$$\frac{4767}{8461}=\frac{681}{\frac{1}{7}+\frac{8460}{1+6}}.$$

Далее разделим числитель числа $\frac{8460}{1+6}$ на 2, а знаменатель по частям на 2, получим:

$$\frac{4767}{8461}=\frac{681}{\frac{1}{7}+\frac{4230}{\frac{1}{2}+3}} \qquad (5)$$

Для (3), (4) и (5) получаем структурные схемы разложения чисел $\frac{379}{645}$, $\frac{583}{153}$, $\frac{4767}{8461}$ соответственно (рис. 2 *а*, *б*, *в*).

На основе данного алгоритма разработана программа на языке программирования математического пакета Maple 13 [2; 4; 5], программный код которой представлен ниже.

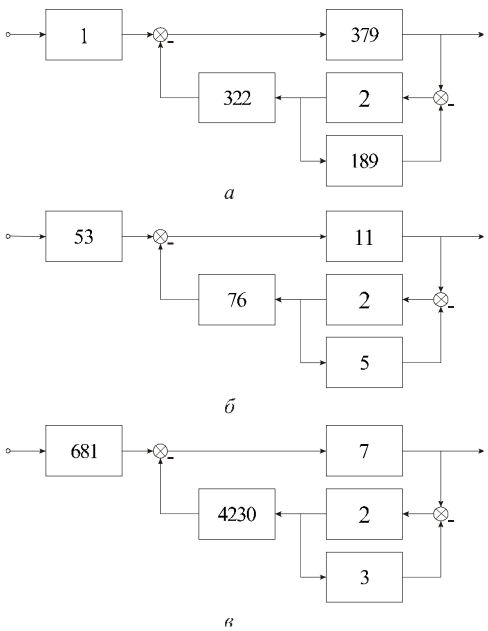

Рис. 2. Структурные схемы разложения чисел (3) – (5)

```
  CelZn:=proc(drob::rational);
  description "Разложение рационального
числа a/b в виде цепной дроби";
  local
a,b,x,m,i,Raz,flist,a1,b1,a1_,d0,d1,d2,
d,c0,c1,c2;
  a:=numer(drob);
  b:=denom(drob);
  x:=2;
  m:=5;
  if (a mod 2)<>0 and (b mod 2)<>0 then
       if (a=1) or (a=3) then
            a:=a*m;
            b:=b*m;
       end if;
       flist:=Del(a);
       a1:=op(1, flist);
       if (a1=3) and (nops(flist)>1)
     then
            a1:=a;
            for i from 2 to
          nops(flist) do
                 if op(i,flist)>3
               then
                      a1:=op(i,flis
                    t);
                      break;
                 end if;
            end do;
       end if;
       d0:=(a)/(a1);
       c0:=(1)/(a1);
       b1:=2;
       d1:=(b-1)/(b1);
       c1:=1/(b1);
       d:=(a1-1)/(b1);
            Raz:=(d0)/((convert(c0,symbol)+
          (d1)/((convert(c1,symbol)+d))));
       end if;
       end proc:
```

Выводы

Таким образом, с помощью разработанного алгоритма возможно представить вещественные коэффициенты $\frac{a}{b}$ (a — нечетное число, b — нечетное число) элементарных звеньев в виде определенной структуры из элементарных звеньев с целочисленными значениями параметров. По аналогии разработаны алгоритмы для чисел $\frac{a}{b}$, когда a — четное число, b — нечетное число и a — нечетное число, b — четное число.

Литература

1. Алпатов Ю.Н. Синтез систем управления методом структурных графов. Иркутск, Изд-во Иркут. ун-та, 1988. 184 с.
2. Ануфриев И.Е., Смирнов А.Б., Смирнова Е.Н. MATLAB 7. СПб.: БХВ-Петербург, 2005. 1104 с.
3. Арнольд В.И. Цепные дроби. Изд-во МЦНМО. 2009. 40 с.
4. Кутков Ю.Л., Кетков А.Ю., Шульц М.М. MATLAB 7: программирование, численные методы. СПб.: БХВ-Петербург, 2005. 752 с.
5. Мартынов Н.Н., Иванов А.П. Matlab 5.x. Вычисление, визуализация, программирование. М.: КУДИЦ-ОБРАЗ, 2000. 336 с.
6. Парфинов И.И. Цепные дроби – ожерелье мехатроники. М.: КомКнига, 2007. 120 с.
7. Хинчин Д.Я. Цепные дроби. М.: Наука, 1978. 112 с.
8. Хованский А.Н. Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа. М.: Мир, 1973. 368 с.
9. Olds C.D. Continued fractions. Random House, New York, 1963.
10. Wall H.S. Analytic Theory of Continued Fractions. D. Van Nostrand Company, Inc., 1948.

References

1. Alpatov Yu.N. Synthesis of control systems by structural graphs. Irkutsk, Izd-vo Irkut. un-ta, 1988. 184 p.
2. Anufriev I.E., Smirnov A.B., Smirnova E.N. MATLAB 7. SPb.: BKhV-Peterburg, 2005. 1104 p.
3. Arnol'd V.I. Continued Fractions. Izd-vo MTsNMO, 2009. 40 p.
4. Kutkov Yu.L., Ketkov A.Yu., Shul'ts M.M. MATLAB 7: programming, numerical methods. SPb.: BKhV-Peterburg, 2005. 752 p.
5. Martynov N.N., Ivanov A.P. Matlab 5.x. Computing, visualization, programming. M.: KUDITs-OBRAZ, 2000. 336 p.
6. Parfinov I.I. Continued fractions - a necklace of mechatronics. M.: KomKniga, 2007. 120 p.
7. Khinchin D.Ya. Continued Fractions. M.: Nauka, 1978. 112 p.
8. Khovanskii A.N. Application of continued fractions and their generalizations to the issues of approximate analysis. M.: Mir, 1973. 368 p.
9. Olds C.D. Continued fractions. Random House, New York, 1963.
10. Wall H.S. Analytic Theory of Continued Fractions. D. Van Nostrand Company, Inc., 1948.