

Материалы IX Всероссийской научно-практической конференции «Проблемы авиации и космонавтики». Т1. Технические науки. Информационные технологии. Красноярск, 2013. P. 165-166.

9. Ponomarev S.I., Eresko S.P. Development of processes for production of metal-turbine units // Материалы 13-й Международной конференции «Reshetnevskie chteniya». Красноярск, 2009. P. 218.

10. Ponomarev S.I., Eresko S.P. Getting gas turbines diffusion welding // Материалы Российской академии наук «XXXVII Академические чтения по космонавтике». Секция 19 «Производство ракетно-космической техники». М., 2013. P. 29-30.

11. The Russian Federal Space Program for 2006-2015 [Elektronnyi resurs]. Perechen' nauchno-issledovatel'skikh i opytno-konstruktorskikh rabot, vydvigaemykh na otkrytyi konkurs 2006 goda Federal'nym kosmicheskim agentstvom v ramkakh «Federal'noi kosmicheskoi programmy Rossii na 2006-2015 gody» i federal'noi tselevoi programmy «Reformirovanie i razvitie oboronno-promyshlennogo kompleksa (2002-2006 gody)». Dostup iz spravочно-prav. sistemy «Konsul'tant Plyus».

12. Ponomarev S.I., Utenkov V.D., Kovalenko N.A., Neklyudov A.V. Modelling of the design process of machining technology // Технологии машиностроения. 2002. № 4. P. 49-52.

13. Ponomarev S.I., Utenkov V.D., Filippov Yu.A., Mikhailov S.V., Krasovets E.L. Design automation of optimal routing machining processes // Материалы III Всероссийской научно-практической конференции «Innovatsii v mashinostroenii». Penza: PGU, 2003. P. 45-47.

14. Ponomarev S.I., Ruchkin L.V., Ruchkina N.L. Attributive database processing equipment, tools and equipment for machining aerospace parts production: Sv. GR baz dannykh 2014620691; zayavl. № 2014620376; zareg. v Reestre baz dannykh 15.05.14.

15. Ponomarev S.I., Eresko S.P. Constructing process models of diffusion welding // Материалы 15-й Международной конференции «Reshetnevskie chteniya». Красноярск, 2010. P. 246-247.

16. Ponomarev S.I., Eresko S.P. Building a model of technological process of diffusion welding // Материалы 15-й Международной конференции «Reshetnevskie chteniya». Красноярск, 2011. Т. 1. P. 243.

17. Ponomarev S.I., Eresko S.P. Management of automated equipment diffusion welding // Материалы 16-й Международной конференции «Reshetnevskie chteniya». Красноярск, 2012. P. 265-266.

18. Ponomarev S.I., Eresko S.P., Eresko T.T., Prokop'ev S.I. Connection method superalloy cobalt-based ceramics based on silicon nitride: pat. 2433026 Ros. Federatsiya, zayavka № 2010128800/02; zareg. 10.11.11.

19. Ponomarev S.I., Eresko S.P., Eresko T.T. Apparatus for producing metal lokeramicheskikh products.: pat. 93722. Ros. Ros. Federatsiya, zayavka № 2009148910/22; zareg. 10.05.2010.

20. Ponomarev S.I., Eresko S.P., Eresko T.T. Improving manufacturing technology nodes aerospace manufacturing // Vestnik SibGAU. 2014. Vyp. 3 (42). P. 78-80.

УДК 539.3

Определение критических нагрузок с помощью энергетического критерия устойчивости для локального круглого дефекта

Л.А. Бохоева^{1 a}, В.Е. Рогов^{2 b}, А.С. Чермошнцева^{3 c}

¹Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления, ул.Ключевская 40В, Улан-Удэ, Россия

²Байкальский институт природопользования Сибирского отделения РАН, ул. Сахьяновой 8, Улан-Удэ, Россия

³Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, ул. Вторая Бауманская 5, Москва, Россия

^abohoeva@yandex.ru, ^brogov54v@mail.ru, ^canechka@yandex.ru

Статья поступила 11.09.2014, принята 13.11.2014

Отслоения являются распространенным видом дефекта и часто считаются определяющим фактором при решении вопроса об использовании композиционных материалов. В данной работе решена нелинейная задача устойчивости тонкой пластины с дефектом в виде круглого отслоения. При достижении критической нагрузки возможны три вида потери устойчивости элементов конструкций из композиционных материалов с дефектами типа отслоений. Первый вид потери устойчивости — глобальное выпучивание всей пластины, т. е. потеря устойчивости композиционной балки как единого целого. Оно наблюдается при дефектах малой длины. Второй вид потери устойчивости — локальное выпучивание лишь отслоившейся верхней части, когда нижняя и основная части пластины остаются плоскими. Локальная потеря устойчивости является основным видом разрушения при сжатии слоистых композиционных материалов с дефектами типа тонких отслоений. Подобное выпучивание обусловлено высокой концентрацией межслойного напряжения на фронте дефекта (вершине трещины); далее при возрастании нагрузки область выпучивания увеличивается до критического размера. Такой вид потери устойчивости носит название «отслоение тонкого слоя». В работе рассмотрена модель тонкого слоя (локальное выпучивание). Определена критическая нагрузка с помощью энергетического критерия устойчивости. Критическая нагрузка представлена как точка бифуркации равновесных форм, найдены соответствующие ей перемещения для круглых по форме отслоений. Получены аналитические выражения для прогибов на начальной стадии закритического деформирования. Определен характер возможных равновесных форм — устойчивый и неустойчивый.

Ключевые слова: межслойные дефекты, слоистые материалы, устойчивость, критическая нагрузка.

Determination of critical loads using the energy criterion of stability for the local circular defect

L.A. Bokhoeva^{1 a}, V.E. Rogov^{2 b}, A.S. Chermoshentseva^{3 c}

¹ East Siberia State University of Technology and Management; 40V, Kluchevskaya St., Ulan-Ude, Republic of Buryatia, Russia

² Baikal Institute of Nature Management, Siberian branch of the Russian Academy of sciences; 6, Sakhyanovoy Str., Ulan-Ude, Republic of Buryatia, Russia

³ Bauman Moscow State Technical University; 5, Vtoraya Baumanskaya Str., Moscow, Russia

^abohoeva@yandex.ru, ^brogov54v@mail.ru, ^canechka@yandex.ru

Received 11.09.2014, accepted 13.11.2014

Detachments are a common type of defects and often considered to be a crucial factor when deciding about the use of composite materials. The article touches upon the solution of a nonlinear stability problem of a thin plate with a defect in the form of a circular detachment. When critical load is reached, three buckling types for structural elements made of composite materials with the defects such as detachments are possible. The first buckling type is a global swelling of the entire plate, i.e. buckling of a composite beam as one. It is observed in small length defects. The second buckling type is a local swelling of a detached upper part when the lower and main parts of the plate remain flat. Local buckling is the main damage type under the compression of layered composite materials with defects such as thin detachments. This swelling type is caused by a high concentration of an interlayer stress at the front part of the defect (at the top of the crack); hereinafter, when the load grows, the buckling area increases to a critical size. This buckling type is called a thin layer detachment. The article studies a thin layer model (a local swelling). Critical load using the energy criterion of stability has been determined. Critical load has been shown as a bifurcation point of equilibrium forms. Proper bifurcation displacements have been found for circular detachments. Analytical expressions for the buckles at the initial stage of supercritical deformation have also been found. The nature of the possible equilibrium forms has been determined as stable and unstable.

Key words: interlayer defects, layered materials, stability, critical load.

Введение. Дефекты типа отслоения, образующиеся в результате несовершенства технологии производства, механической обработки или действия эксплуатационных нагрузок, могут существенно влиять на прочность и жесткость элементов конструкций из слоистых композиционных материалов. Отслоения являются распространенным видом дефекта и часто считаются определяющим фактором при решении вопроса об использовании композиционных материалов [1, 2, 3]. В данной работе решена нелинейная задача устойчивости тонкой пластины с дефектом в виде круглого отслоения, найдена критическая нагрузка.

После локальной потери устойчивости отслоение может продолжать воспринимать возрастающую внешнюю нагрузку. Рассмотрена модель тонкого слоя (локальное выпучивание). Если длина отслоения велика, то любому другому виду потери устойчивости будет предшествовать локальное выпучивание отслоившегося слоя, так как отслоившаяся часть гораздо тоньше всего элемента конструкции. В этом случае перемещения совершает лишь отслоение, тогда как нижняя и основная части будут находиться в состоянии чистого сжатия. Тогда можно предположить, что закритическое поведение и рост отслоения не влияют на напряженно-деформированное состояние основной части элемента конструкции, которая остается безмоментной. Этот факт позволяет рассматривать отслоение как отдельную тонкостенную круглую пластину, защемленную по контуру, которая несет нагрузку в соответствии с нагрузкой основного элемента.

Посредством вариационного критерия устойчивости можно найти ряд собственных значений параметра нагрузки P_n и соответствующие ей функции, описывающие конфигурацию системы в момент перехода к

новому возмущенному состоянию равновесия. С помощью энергетического критерия устойчивости можно выяснить, при каких значениях нагрузки P исходное равновесное состояние будет устойчивым. Критическим значением параметра нагрузки $P = P_{кр}$ будет такое значение, при превышении которого начальное состояние перестает быть устойчивым. Устойчивыми в закритической области будут искривленные формы равновесия, т. е. в критической точке происходит бифуркация равновесных форм [4, 5, 6].

Решение задачи. Рассмотрим пластину толщиной h с отслоением, нагруженную сжимающими деформациями ε_0 по торцам (рис. 1).

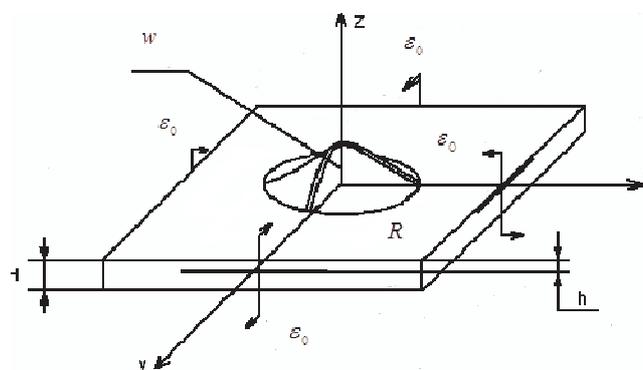


Рис. 1. Пластина с круглым по форме межслойным дефектом

Исследуем круглое отслоение с радиусом R , толщиной h . Центр ее совпадает с началом координат oxy . Будем рассматривать отслоение как тонкую осесимметричную пластину, защемленную по контуру и подверженную равномерно распределенной нагрузке ε_0

интенсивностью $q = \frac{Eh\varepsilon_0}{1-\mu_{12}}$, соответствующей основной нагрузке элемента конструкции.

Для описания возмущенного состояния равновесия, смежного с начальным невозмущенным состоянием, воспользуемся бесконечно малым параметром η , не зависящим от координат [6, 7, 8]. Отклонение точек от их начального положения определим с точностью до η^2 . Перемещения, которые описывают переход пластины в новое отклоненное состояние от начального состояния равновесия, представим в виде:

$$\begin{aligned} u &= \eta u_1(r) + \eta^2 u_2(r); \\ w &= \eta w_1(r), \end{aligned}$$

где η — параметр, зависящий от уровня нагружения пластины, r — радиальная координата, u — радиальное перемещение, w — поперечное перемещение u_1, u_2 — радиальные перемещения первого и второго порядка малости, w_1 — поперечное перемещение первого порядка малости. Радиальные и окружные деформации срединной поверхности второго порядка малости представляются в виде [8]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r'' &= \eta^2 \frac{du_2}{dr} + \frac{1}{2} \eta^2 \left(\frac{dw_1}{dr} \right); \\ \varepsilon_\theta'' &= \eta^2 \frac{u_2}{r}; \quad \gamma'' = 0. \end{aligned}$$

Поперечный прогиб аппроксимируем рядом:

$$w_1(r) = \bar{C}_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)^2 + \sum_{i=1}^n \bar{C}_i \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)^2 \left(\frac{r}{R} \right)^i, \quad (1)$$

где $\bar{C}_0, \dots, \bar{C}_i \dots$ — произвольные неизвестные коэффициенты ($n = 0, 1, 2, \dots$). Зададим граничные условия для защемленного края в виде:

$$\begin{aligned} w(R) &= 0; \\ \frac{dw(R)}{dr} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Очевидно, что функция прогиба $w_1(r)$ удовлетворяет условиям (2).

Для определения радиального перемещения $u_2(r)$ введем величины T_r'', T_θ'' , связанные с $\varepsilon_\theta'', \varepsilon_r''$ зависимостями закона Гука:

$$\begin{aligned} T_r'' &= \frac{Eh}{1-\mu_{12}\mu_{21}} (\varepsilon_r'' + \mu_{12}\varepsilon_\theta''); \\ T_\theta'' &= \frac{Eh}{1-\mu_{12}\mu_{21}} (\varepsilon_\theta'' + \mu_{12}\varepsilon_r''). \end{aligned}$$

Как показано в [8], из условия самоуравновешенности:

$$\frac{d}{dr} (rT_r'') - T_\theta'' = 0$$

можно выразить радиальные перемещения через функцию поперечного прогиба $w_1(r)$:

$$\frac{d^2 u_2}{dr^2} + \frac{1}{r} \left(\frac{du_2}{dr} \right) - \frac{u_2}{r} = -\frac{1-\mu_{12}}{2} \cdot \frac{1}{r} \left(\frac{dw_1}{dr} \right)^2 - \frac{dw_1}{dr} \left(\frac{d^2 w_1}{dr^2} \right).$$

Интегрируя, находим:

$$u_2(r) = A_1 r + \frac{A_2}{r} - \frac{1}{r} \int_0^R \int_0^R \left[\frac{1-\mu_{12}}{2} \cdot \frac{1}{r} \left(\frac{dw_1}{dr} \right)^2 + \frac{dw_1}{dr} \frac{d^2 w_1}{dr^2} \right] dr dr,$$

где A_1 и A_2 — постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий. Эта функция удовлетворяет следующим условиям:

а) в центре $u_2(0)$ должно быть ограничено, поэтому $A_2 = 0$;

б) при $r=R, T_r'' = 0$ или:

$$\frac{du_2(r)}{dr} + \mu_{12} \frac{u_2(r)}{r} = -\frac{1}{2} \left[\frac{dw_1(r)}{dr} \right]^2.$$

Учитывая вышеизложенное, находим радиальные перемещения:

$$u_2(r) = \frac{\bar{C}_0^2}{6R} \left[3(1-\mu_{12}) \frac{r}{R} - 6(3-\mu_{12}) \left(\frac{r}{R} \right)^3 + + \right. \\ \left. 4(5-\mu_{12}) \left(\frac{r}{R} \right)^5 - (7-\mu_{12}) \left(\frac{r}{R} \right)^7 \right]$$

Определим изменение полной потенциальной энергии $\Delta \mathcal{E}$ для тонких круглых отслоений при отклонении от начального плоского состояния:

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{E} &= \eta^2 \pi \int_0^R D \left[\left(\frac{d^2 w_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw_1}{dr} \right)^2 - \frac{2(1-\mu_{12})}{r} \frac{dw_1}{dr} \frac{d^2 w_1}{dr^2} \right] r dr + \\ &+ \eta^2 A - \eta^2 2\pi q R u_2(R), \end{aligned}$$

где $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu_{12}\mu_{21})}$ — цилиндрическая жесткость пластины,

$$A = \frac{1}{2} \frac{Eh}{1-\mu_{12}\mu_{21}} \int_0^R \left(\varepsilon_r'^2 + 2\mu \varepsilon_r' \varepsilon_\theta' + \varepsilon_\theta'^2 + \frac{1-\mu_{12}}{2} \gamma_{r\theta}^2 \right) r dr.$$

Поскольку величина A положительно определена, т. е. при $u_1(r)$, не равном нулю, $A > 0$, отсюда следует, что для определения критической минимальной нагрузки необходимо положить $u_1(r) = 0$.

Из условия $\Delta \mathcal{E} = 0$ в первом приближении находим:

$$q_{кр} = K \frac{D}{R^2}, \quad \text{где } K \approx 16. \quad (3)$$

Потеря устойчивости защемленного по контуру дефекта типа круглого отслоения происходит по осесимметричной форме, и вид изогнутой срединной поверхности описывается функцией $w(r)$. Анализ геометрически нелинейного поведения круглой пластины проведем с помощью энергетического подхода, предложен

ного в работах [4 – 20], обобщенного впервые для решения задач устойчивости элементов конструкций с дефектами типа отслоения. Учитывая вышеизложенное, линейная задача устойчивости решена энергетическим методом, найдены критическая нагрузка $q_{кр}$ и соответствующие ей функции $u_2(r)$, $w_1(r)$. Тогда представим перемещения пластины в виде:

$$\begin{aligned} u(r) &= u_0(r) + \eta^2 u_2(r), \\ w(r) &= w_0(r) + \eta^2 w_1(r). \end{aligned}$$

Радиальную и окружную деформации срединной поверхности подсчитаем с точностью до слагаемых, имеющих множитель η^2 :

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \varepsilon_r^0 + \varepsilon_r'', \\ \varepsilon_\theta &= \varepsilon_\theta^0 + \varepsilon_\theta'', \\ \gamma_{r\theta} &= 0 \end{aligned}$$

где $\varepsilon_r^0, \varepsilon_\theta^0$ — компоненты деформаций в начальном состоянии:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^0 &= \frac{\partial u_0(r)}{\partial r}, \\ \varepsilon_\theta^0 &= 0, \end{aligned}$$

$\varepsilon_r'', \varepsilon_\theta''$ — компоненты деформаций второго порядка малости:

$$\varepsilon_r'' = \eta^2 \frac{\partial u_2(r)}{\partial r} + \eta^2 \frac{1}{2} \left[\frac{\partial w_1(r)}{\partial r} \right]^2, \quad \varepsilon_\theta'' = \eta^2 \frac{u_2(r)}{r}.$$

Потенциальная энергия срединной поверхности с точностью до η^4 определяется выражением:

$$U_c = U_0 + U_2 + U_4,$$

где:

$$U_0 = \frac{Eh}{2(1-\mu_{12}\mu_{21})} \int_0^R \int_0^{2\pi} (\varepsilon_r^0{}^2 + \varepsilon_\theta^0{}^2 + 2\mu_{12}\varepsilon_r^0\varepsilon_\theta^0) r d\varphi dr,$$

$$U_2 = \frac{2Eh}{2(1-\mu_{12}\mu_{21})} \times \int_0^R \int_0^{2\pi} [\varepsilon_r''\varepsilon_r^0 + \varepsilon_\theta''\varepsilon_\theta^0 + 2\mu_{12}(\varepsilon_r''\varepsilon_\theta^0 + \varepsilon_\theta''\varepsilon_r^0)] r d\varphi dr,$$

$$U_4 = \frac{Eh}{2(1-\mu_{12}\mu_{21})} \int_0^R \int_0^{2\pi} (\varepsilon_r''^2 + \varepsilon_\theta''^2 + 2\mu_{12}\varepsilon_r''\varepsilon_\theta'') r dr d\varphi.$$

Используя зависимости:

$$\begin{aligned} \sigma_r^0 &= \frac{E}{1-\mu_{12}\mu_{21}} (\varepsilon_r^0 + \mu_{12}\varepsilon_\theta^0), \\ \sigma_\theta^0 &= \frac{E}{1-\mu_{12}\mu_{21}} (\varepsilon_\theta^0 + \mu_{21}\varepsilon_r^0) \end{aligned}$$

и вводя обозначения:

$$T_r^0 = \sigma_r^0 h, \quad T_\theta^0 = \sigma_\theta^0 h,$$

выражение для U_2 можно записать в виде:

$$U_2 = \frac{1}{2} \int_0^R \int_0^{2\pi} (\varepsilon_r'' T_r^0 + \varepsilon_\theta'' T_\theta^0) r d\varphi dr.$$

Определим изменение полной потенциальной энергии $\Delta \mathcal{E}$ пластины при отклонении от начального плоского состояния

$$\Delta \mathcal{E} = U_2 + \Pi_2 + U_4 + V,$$

где Π_2 — потенциал внешних сил; V — энергия деформации изгиба пластины.

Перемещения круглой пластины $u_2(r)$, $w_1(r)$ подобраны так, что обращают в нуль все слагаемые в U_2 , содержащие начальные усилия T_r^0, T_θ^0 . Тогда выражение для $\Delta \mathcal{E}$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{E} &= \eta^2 \pi D \int_0^R \left[\left(\frac{d^2 w_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw_1}{dr} \right)^2 - \frac{2(1-\mu_{12})}{r} \frac{dw_1}{dr} \frac{d^2 w_1}{dr^2} \right] r dr + \\ &+ \eta^4 \frac{Eh\pi}{1-\mu_{12}\mu_{21}} \int_0^R \left[\left(\frac{du_2}{dr} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw_1}{dr} \right)^2 \right)^2 + \right. \\ &\left. + \left(\frac{u_2}{r} \right)^2 + 2\mu_{12} \left[\frac{du_2}{dr} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw_1}{dr} \right)^2 \right] \frac{u_2}{r} \right] r dr - \eta^2 2\pi q R u_2. \end{aligned}$$

Будем считать варьируемым параметр η , который характеризует стрелу прогиба отслоения. Из условия стационарности полной потенциальной энергии получаем следующее выражение:

$$\frac{\partial \Delta \mathcal{E}}{\partial \eta} = 0$$

$$\frac{8}{3} \frac{D}{R^2} \eta + \frac{1}{28} \frac{Eh}{R^2} \eta^3 - \frac{q}{6} \eta = 0.$$

Учитывая значение:

$$q_{кр.} = 16 \frac{D}{R^2} = \frac{4Eh^3}{3R^2(1-\mu_{12}\mu_{21})},$$

приходим к уравнению:

$$\eta q_{кр.} - \eta q + \eta^3 \frac{3}{14} \frac{Eh}{R^2} = 0.$$

Исследуем положения равновесия отслоившейся части. Введем следующие безразмерные величины:

$$q^* = \frac{qR^2}{Eh^3}; \quad q_{кр}^* = \frac{q_{кр}R^2}{Eh^3}; \quad w_{max}^* = \frac{w_{max}}{h},$$

где $w_{max} = \eta w_1$ при $r = 0$, $\eta = h \sqrt{\frac{14}{3} h^2 (q^* - q_{кр}^*)}$.

Функция поперечного прогиба $w_1(r)$ задается рядом (1). Зависимость между прогибом в центре пластины и нагрузкой имеет вид:

$$w_{\max}^* = \sqrt{\frac{14}{3}(q^* - q_{кр.}^*)} = 2,16\sqrt{q^* - q_{кр.}^*} .$$

Видно, что при $q^* < q_{кр.}^*$ возможна только одна прямолинейная форма равновесия. Согласно теореме Лагранжа это положение равновесия устойчиво (рис. 2). При $q^* > q_{кр.}^*$ возможна изгибная форма равновесия. Исследуя знак второй производной полной потенциальной энергии, нетрудно установить, что изгибная форма равновесия устойчива. Зависимость радиального перемещения от величины нагрузки показана на рис. 2:

$$u_{\max}^* = \frac{14}{9}(q^* - q_{кр.}^*) + u_0^* .$$

Представляемые величины приведены к безразмерному виду при помощи нормировок $u_0^* = \frac{u_0 R}{h^2}$,

$$u_{\max}^* = \frac{u_{\max} R}{h^2}, u_{\max} = \eta^2 u_2(R) + u_0 = \frac{\eta^2}{3R} + u_0 \text{ при } r = R.$$

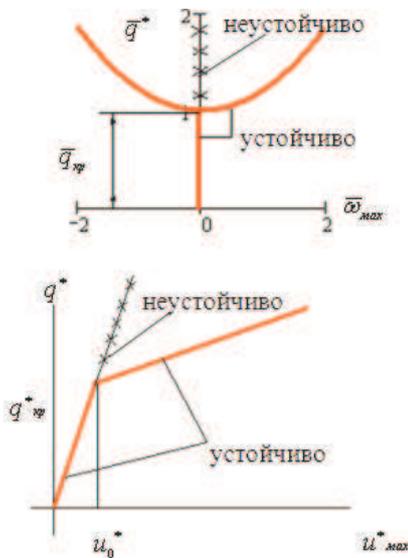


Рис. 2. Зависимость прогиба и радиального перемещения от величины нагрузки

Характер влияния длины отслоившейся части на закритическое поведение дефекта типа круглого отслоения представлен на рис. 3.

На рис. 3 показан профиль прогиба при различных значениях нагрузки, равной $\bar{q} = 5, 9, 20$; $r = r/R$, где в выражении ряда $w_1(r)$ учтено только одно первое слагаемое $w^* = \eta w_1$, где $\eta = \sqrt{\frac{56h^2}{9(1-\mu_1\mu_2)}}(\bar{q} - 1)$ и

$$\bar{q} = \frac{q}{q_{кр.}}$$

Для сравнения приведен расчет, сделанный в системе ANSYS, где наблюдается качественное сходство кривых прогиба в центре отслоения. Характер влияния длины отслоившейся части на закритическое поведение дефекта типа круглого отслоения представлен на рис. 3. Прогиб увеличивается с уменьшением текущего радиуса дефекта.

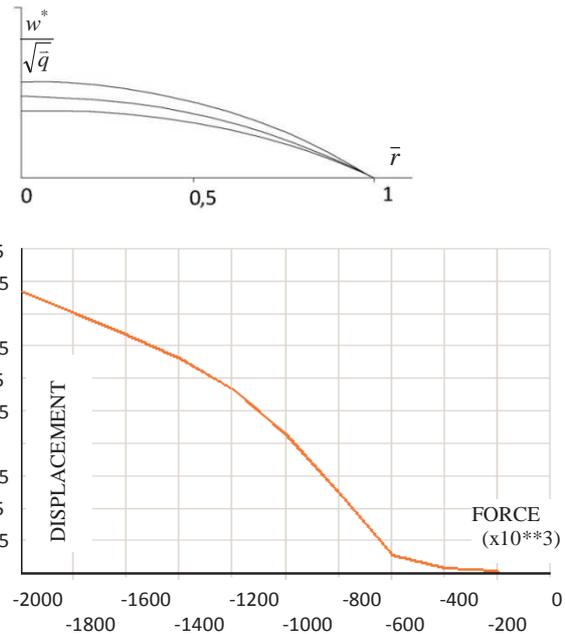


Рис. 3. Профиль прогиба при различных значениях нагрузки

Выводы

В работе разработана двумерная модель элементов конструкций из слоистых традиционных и композиционных материалов с допустимыми дефектами типа отслоений. Получены аналитические выражения для прогибов на начальной стадии закритического деформирования, определена критическая нагрузка. Определен характер возможных равновесных форм — устойчивый и неустойчивый. При большом числе слагаемых можно получить решение практически с любой степенью точности.

Литература

1. Бохоева Л.А., Балданов А.Б., Рогов В.Е. Прочность кольцевых образцов из слоистых композиционных материалов с межслойными дефектами // *Фундаментальные проблемы современного материаловедения*. 2013. Т. 10. № 1. С. 87-92.
2. Бохоева Л.А., Курохтин В.Ю., Чермошнцева А.С., Перевалов А.В. Моделирование и технология изготовления конструкций авиационной техники из композиционных материалов // *Вестник ВСГУТУ*. 2013. № 2 (41). С. 12-18.
3. Бохоева Л.А., Пнев А.Г., Филиппова К.А. Разработка алгоритма автоматической обработки результатов эксперимента образцов из композиционных материалов с дефектами // *Вестник Казанского государственного технического университета им. А.Н. Туполева*. 2010. № 4. С. 10-16.
4. Бохоева Л.А. Исследование устойчивости пластин с дефектами типа круглых отслоений // *Вестник Бурятского государственного университета*. 2007. № 6. С. 85-89.
5. Бохоева Л.А., Дамдинов Т.А. Определение критических нагрузок энергетическим методом с учетом деформаций сдвига // *Вестник Казанского государственного технического университета им. А.Н. Туполева*. 2006. № 1. С. 3-7.
6. Бохоева Л.А. Исследование устойчивости пластин из слоистых композиционных материалов с дефектами типа сквозное отслоение // *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*. 2007. № 2. С. 7-16.
7. Бохоева Л.А. Исследование устойчивости пластин с дефектами в нелинейной постановке // *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*. 2008. № 2. С. 22-28.
8. Бохоева Л.А. Особенности расчета на прочность элементов конструкций из изотропных и композиционных материалов с допустимыми дефектами. Улан-Удэ: Изд-во ВСГТУ, 2007. 192 с.

9. Алфутов Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. М.: Машиностроение, 1991. 311 с.

10. Болотин В.В., Зебельян З.Х., Курзин Л.А. Устойчивость сжатых элементов с дефектами типа расслоений // Проблемы прочности. 1980. № 7. С. 3-8.

11. Болотин В.В. Дефекты типа расслоений в конструкциях из композиционных материалов // Механика композиционных материалов. 1984. № 2. С. 239-256.

12. Бохова Л.А., Дамдинов Т.А. Поведение дефектов в слоистых пластинах после локальной потери устойчивости // Вестник БГУ. 2005. Вып. 4. С. 234-243.

13. Бохова Л.А., Пнев А.Г., Чермошнцева А.С. Испытание на прочность кольцевых образцов из слоистых композиционных материалов с межслойными дефектами // Вестник Бурятского государственного университета. 2011. № 9. С. 230-236.

14. Бохова Л.А. Влияние дефектов типа отслоений в слоистых пластинах на величину критической нагрузки // Вестник БГУ. 2005. Вып. 4. С. 243-251.

15. Бохова Л.А. Разрушение слоистых композиционных материалов отслоением // Проблемы механики современных машин: материалы международной научной конференции. Улан-Удэ, 2006. Т. 2. С. 178-182.

16. Бохова Л.А. Разрушение слоистых пластин с дефектами при сжатии // Вестник БГУ. 2006. Вып. 5. С. 91-97.

17. Бохова Л.А. Устойчивость и рост круглых расслоений в слоистых элементах конструкций // Известия вузов. Машиностроение. 1989. № 8. С. 12-15.

18. Болотин В.В. Разрушение композиционных материалов по типу отслоений // Расчеты на прочность. 1986. Вып. 27. С. 8-20.

19. Бохова Л.А., Зангеев Б.И., Дамдинов Т.А., Пнев А.Г., Филиппова К.А. Экспериментальное исследование образцов труб из слоистых композиционных материалов с дефектами // Вестник ВСГУТУ. 2010. № 4 (31). С. 38-42.

20. Благонядежин В.Л., Воронцов А.П., Мурзаханов Г.Х. Технологические задачи механики конструкций из композитных материалов // Механика композитных материалов. 1987. № 5. С. 859-877.

References

1. Bohoeva L.A., Baldanov A.B., Rogov V.E. Strength ring samples of layered composite materials with interlayer defects // Fundamental'nye problemy sovremennogo materialovedeniya. 2013. T. 10. № 1. P. 87-92.

2. Bohoeva L.A., Kurohtin V.Ju., Chermoshenceva A.S., Pevalov A.V. Modeling and technology OF aviation constructions from composite materials // Vestnik VSGUTU. 2013. № 2 (41). P. 12-18.

3. Bohoeva L.A., Pnev A.G., Filippova K.A. Development of an algorithm for automatic processing of the results of the experiment samples of composite materials with defects // Vestnik Kazanskogo gosudarstvennogo tehnikeskogo universiteta im. A.N. Tupoleva. 2010. № 4. P. 10-16.

4. Bohoeva L.A. Investigation of the stability of plates with defects such as a circular delaminations // Vestnik Burjatskogo gosudarstvennogo universiteta. 2007. № 6. P. 85-89.

5. Bohoeva L.A., Damdinov T.A. Determination of critical loads by power method taking into account shear deformation // Vestnik Kazanskogo gosudarstvennogo tehnikeskogo universiteta im. A.N. Tupoleva. 2006. № 1. P. 3-7.

6. Bohoeva L.A. Investigation of the stability of the plates of layered composite materials with defects such as delamination // Izvestija vysshih uchebnyh zavedenij. Mashinostroenie. 2007. № 2. P. 7-16.

7. Bohoeva L.A. Investigation of the stability of plates with defects in nonlinear formulation // Izvestija vysshih uchebnyh zavedenij. Mashinostroenie. 2008. № 2. P. 22-28.

8. Bohoeva L.A. Particular strength calculation of the elements of the structures of isotropic and composite materials with a valid defects. Ulan-Udje: Izd-vo VSGTU, 2007. 192 p.

9. Alfutov N.A. Bases of calculation on stability of elastic systems. M.: Mashinostroenie, 1991. 311 p.

10. Bolotin V.V., Zebel'jan Z.H., Kurzin L.A. Stability of compressed elements with defects such as delaminations // Problemy prochnosti. 1980. № 7. P. 3-8.

11. Bolotin V.V. Defects such as delaminations in structures made of composite materials // Mehanika kompozicionnyh materialov. 1984. № 2. P. 239-256.

12. Bohoeva L.A., Damdinov T.A. Behavior of defects in layered plates after local buckling // Vestnik BGU. 2005. Vyp.4. P. 234-243.

13. Bohoeva L.A., Pnev A.G., Chermoshenceva A.S. Strength test ring samples of layered composite materials with interlayer defects // Vestnik Burjatskogo gosudarstvennogo universiteta. 2011. № 9. P. 230-236.

14. Bohoeva L.A. The Influence of defects such as delaminations in layered plates on the value of the critical load // Vestnik BGU. 2005. Vyp. 4. P. 243-251.

15. Bohoeva L.A. Fracture of laminated composites detachment // Problemy mehaniki sovremennyh mashin: materialy mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii. Ulan-Udje, 2006. T.2. P. 178-182.

16. Bohoeva L.A. The destruction of laminated plates with defects in compression // Vestnik BGU. 2006. Vyp. 5. P. 91-97.

17. Bohoeva L.A. Stability and growth round of delamination in layered elements of structures // Izvestija vuzov. Mashinostroenie. 1989. № 8. P. 12-15.

18. Bolotin V.V. Fracture of composite materials by type delaminations // Raschetny na prochnost'. 1986. Vyp. 27. P. 8-20.

19. Bohoeva L.A., Zangeev B.I., Damdinov T.A., Pnev A.G., Filippova K.A. Experimental Study sample tubes made of laminated composite materials with defects // Vestnik VSGUTU. 2010. № 4 (31). P. 38-42.

20. Bлагонядежин В.Л., Воронцов А.П., Мурзаханов Г.Х. Technological problems of mechanics of structures made of composite materials // Mehanika kompozitnyh materialov. 1987. № 5. P. 859-877.