

УДК 624.012.45.04

Нелинейная модель бетона на основе теории пластического течения

Л.Ю. Соловьев

Сибирский государственный университет путей сообщения, ул. Д. Ковальчук 191, Новосибирск, Россия

lys111@yandex.ru

Статья поступила 15.09.2014, принята 20.11.2014

Излагаются основные положения и математические зависимости модели нелинейного деформирования бетонных элементов, находящихся в трехосном напряженном состоянии, построенные на базе математического аппарата теории пластического течения. Показано место разработанной модели в общей модели деформирования железобетонных элементов с трещинами. Модель ориентирована на применение в рамках метода конечных элементов. Главным постулатом теории течения является постулат пластичности, или ортогональности вектора приращений пластических деформаций поверхности нагружения (пластического потенциала). В такой постановке закон течения называется ассоциированным. Ему подчиняется, например, деформирование металлов. При этом поверхность нагружения (потенциала) принимается подобной предельной поверхности прочности в пространстве главных напряжений. Для бетона (и подобных ему геоматериалов) характерным является несовпадение поверхностей нагружения и пластического потенциала, что приводит к необходимости введения двух поверхностей, одна из которых (поверхность нагружения) также строится на основе принципа подобия поверхности прочности. Известно, что из-за нарастания микроповреждений к моменту разрушения объем бетонного образца увеличивается (эффект дилатации). Однако известно, что в трехосном напряженном состоянии для бетонов (и некоторых геоматериалов) проявляется еще одно свойство — нелинейной сжимаемости. Поверхность прочности в этом случае строится в виде замкнутого объема (колпачковая модель). Для учета этих особенностей в рассматриваемой модели вводятся дополнительные поверхности нагружения и пластического потенциала, соответствующие явлению необратимой сжимаемости. Сложность полученной математической модели компенсируется возможностями расчета конструкций при непропорциональных нагружениях с изменениями траекторий нагружения. Эти эффекты возникают, например, в массивных бетонных конструкциях в зоне образования трещин.

Ключевые слова: теория пластического течения, неассоциированный закон течения, нелинейное деформирование бетона.

Non-linear concrete model based on the plastic flow theory

L.Yu. Soloviev

Siberian Transport University; 191, D. Kovalchuk St., Novosibirsk, Russia

lys111@yandex.ru

Received 15.09.2014, accepted 20.11.2014

The article states fundamentals and mathematical relations for models of nonlinear deformation of concrete elements in the triaxial stress state. The fundamentals and mathematical relations are based on the mathematical apparatus of the plastic flow theory. Place of the developed model has been shown in the general model of deformation of reinforced concrete elements with cracks. The model focuses on using it within finite element method. The main postulate of flow theory is the postulate of plasticity, or of orthogonality of an incremental plastic strain vector for the loading surface (plastic potential). Being stated like this, the flow law is called the associated one. For example, deformation of metals obeys this law. In these circumstances, the loading surface (potential) is like strength limiting surface among principal stresses. Mismatch between loading surface and plastic potential is typical for concrete (and for geomaterials similar to it) which makes it necessary to introduce two surfaces, one of which (the loading surface) is also based on the principle of similarity to strength surface. It is known that due to the increase of microdamages, the volume of the concrete sample increases by the destruction point (dilatation effect). However, it is known that there also is another feature in a triaxial stress state for concretes (and some geomaterials) such as nonlinear compressibility. The resistance surface in this case is constructed as enclosed volume (cap model). To account these features in the model, additional loading surfaces and plastic potential surfaces have been introduced, corresponding to the phenomenon of irreversible compressibility. The complexity of the mathematical model is compensated by making it possible to calculate structures under non-proportional loadings with changes in the loading trajectory. These effects can occur in cracking zones of massive concrete structures.

Key words: plastic flow theory, non-associated flow rule, non-linear concrete deformation.

Введение. Теория пластического течения является одним из фундаментальных направлений механики деформируемого твердого тела. Соотношения, получаемые на ее основе, позволяют единым образом описывать зависимости $\sigma \sim \varepsilon$ при различных напряженных состояниях, непропорциональных

нагрузениях, включая повторные и знакопеременные. В целом теория пластического течения в ее нынешнем виде является феноменологической. Это позволяет применять ее положения не только для металлов, но и для геоматериалов, бетонов и других дилатирующих сред.

Применительно к бетону варианты теории течения представлены во многих работах [2 – 8].

Основные гипотезы. Основные гипотезы теории пластического течения [9, 10] сводятся к следующему.

1. Вектор полных деформаций является суммой упругой и пластической составляющих, что, применительно к бесконечно малым приращениям полных деформаций, записывается в виде:

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p, \quad (1)$$

где $d\varepsilon_{ij}^e$ — приращения упругих деформаций; $d\varepsilon_{ij}^p$ — приращения пластических деформаций.

Приращения упругих деформаций связаны с приращениями напряжений законом Гука в форме:

$$d\sigma_{ij}^e = D_{ijkl}^e d\varepsilon_{kl}, \quad (2)$$

где D_{ijkl}^e — матрица коэффициентов упругой податливости материала (матрица упругости).

2. Главным постулатом теории течения является постулат пластичности, или постулат ортогональности вектора приращений пластических деформаций поверхности пластического потенциала:

менно [15]. Такой подход не вносит существенных погрешностей в представление о процессе деформировании материала, но заметно облегчает математическое моделирование его свойств.

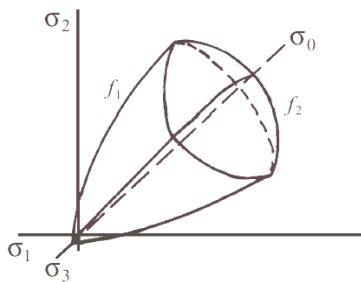


Рис. 1. Комбинированная поверхность нагружения

3. Мгновенная огибающая поверхность нагружения состоит из двух частных поверхностей (рис. 1): поверхности $f_1(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) = 0$, позволяющей учитывать дилатационные процессы в бетоне за счет отрицательности производной по среднему октаэдрическому напряжению σ_0 (или по первому инварианту I_1 тензора напряжений) и переходящей в предельном случае в поверхность прочного сопротивления материала; и поверхности $f_2(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) = 0$, отражающей процесс необратимой сжимаемости и не имеющей предельного положения в

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (3)$$

где $d\lambda$ — пластический множитель; $G(\sigma_{ij}, \varepsilon^p)$ — функция пластического потенциала.

Весьма важной характеристикой пластического деформирования является поверхность начала текучести (или поверхность нагружения для упрочняющихся материалов) $F(\sigma_{ij}, \varepsilon^p) = 0$, которая ограничивает область упругого деформирования.

Для бетона и некоторых других материалов из-за наличия внутреннего трения и микроразрушений [8] характерной особенностью является несовпадение поверхности пластического потенциала G и нагружения F . В этом случае закон (3) становится законом неассоциированного течения. Как показано в [4], для бетона совпадение поверхности нагружения и поверхности потенциала наблюдается лишь вблизи меридиональных сечений $\mu_\sigma = \pm 1$ (μ_σ — параметр Лоде–Надаи).

Бетон является пластически сжимаемым материалом, что характеризуется замкнутостью начальной поверхности текучести в области увеличения всесторонних сжимающих напряжений. С другой стороны, поверхность прочного сопротивления бетона, которая рассматривается в теории течения как предельное положение развивающейся при нелинейном деформировании поверхности нагружения (текучести), в осях главных напряжений замкнута только со стороны всестороннего растяжения.

В ряде работ [7, 11 – 14, 29] предлагается рассматривать поверхность нагружения для бетона как комбинированную, состоящую из двух независимых поверхностей (рис. 1). Каждая из таких поверхностей предназначена для отображения одного из двух противоположных процессов (дилатации и необратимой сжимаемости), протекающих в бетоне

одновременно описанных выше причин. Пересечение поверхностей образует ребро огибающей поверхности, что не противоречит постулату Друккера (постулату пластичности) [9, 16 – 18].

Величина пластической деформации при этом будет определяться обобщенным законом течения [16] или течением на ребре [19] (рис. 2):

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\varepsilon_{ij}^{p(1)} + d\varepsilon_{ij}^{p(2)}, \quad (4)$$

где:

$$d\varepsilon_{ij}^{p(1)} = d\lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial \sigma_{ij}}; \quad d\varepsilon_{ij}^{p(2)} = d\lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (5)$$

$d\lambda_k$, $g_k(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p)$ — пластические множители и пластические потенциалы соответствующих поверхностей нагружения.

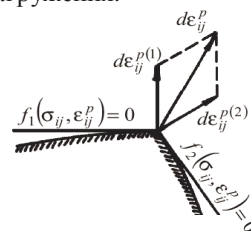


Рис. 2. Вектор пластических деформаций на ребре

4. Механизмы упрочнения поверхностей не зависят друг от друга [7], т. е. раскрытие или перемещение

одной поверхности не влияет на изменение другой. При этом условие активного нагружения определяется положительностью неполного дифференциала соответствующей функции нагружения [13]:

$$d\sigma_{ij} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \sigma_0} \geq 0; d\sigma_{ij} \frac{\partial f_\beta}{\partial \sigma_0} \leq 0, \alpha \neq \beta, \alpha, \beta = 1, 2. \quad (6)$$

Основные соотношения сингулярной модели. Приведем наиболее полную на настоящий момент формулировку математической модели бетона на базе теории пластического течения с двойным изотропным упрочнением при многоосном напряженном состоянии.

Один из способов построения определяющих соотношений для геоматериалов был предложен в работе [16] и далее применительно к бетону развит в [20, 21].

В теории пластического течения математическим условием начала пластического деформирования является равенство нулю полного дифференциала уравнения поверхности нагружения. В сингулярных моделях, оперирующих составными (сингулярными) поверхностями, дифференцированию подлежат уравнения каждого участка такой поверхности. В рамках сингулярной модели нелинейного деформирования бетона рассмотрим систему двух дифференциальных уравнений, отвечающих каждой из поверхностей

$$f_1(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}^p) = 0 \text{ и } f_2(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}^p) = 0:$$

$$\left. \begin{aligned} d f_1 &= \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f_1}{\partial \epsilon_{kl}^p} d\epsilon_{kl}^p = 0; \\ d f_2 &= \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f_2}{\partial \epsilon_{kl}^p} d\epsilon_{kl}^p = 0. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где $d\sigma_{ij}^e$ вычисляются по формуле (2);

$$\det \mathbf{R} = R_{11}R_{22} - R_{21}R_{12}, B_{\alpha\alpha} = -h_\alpha \sqrt{\frac{\partial g_\alpha}{\partial \sigma_{kl}} \frac{\partial g_\alpha}{\partial \sigma_{kl}}}, \alpha = 1, 2,$$

h_α — эмпирические величины, называемые параметрами упрочнения.

Одним из эффективных способов определения величин h_α является составление для них на основе экспериментов на одноосное сжатие специального эмпирического уравнения.

Опуская подробные выкладки, которые можно найти в [4], представим выражение для упругопластической матрицы D_{ijkl}^{ep} :

$$D_{ijkl}^{ep} = D_{ijkl}^e - \frac{1}{\det \mathbf{R}} \sum_{\alpha=1}^2 D_{ijmn}^e \frac{\partial g_\alpha}{\partial \sigma_{mn}} \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial \sigma_{rs}} R_{\beta\beta} - \frac{\partial f_\beta}{\partial \sigma_{rs}} R_{\alpha\beta} \right) D_{rskl}^e, \quad (12)$$

$$\alpha \neq \beta, \alpha, \beta = 1, 2.$$

Представим приращения напряжений как разность упругих и добавочных напряжений [50*]:

$$d\sigma_{ij} = D_{ijkl}^e (d\epsilon_{kl} - d\epsilon_{kl}^p), \quad (8)$$

где D_{ijkl}^e — матрица упругости.

Система дифференциальных уравнений (7) соответствует процессу пластического деформирования материала. Тогда с учетом (8) можно записать:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_{ij}} D_{ijkl}^e d\epsilon_{kl} - d\lambda_1 R_{11} - d\lambda_2 R_{12} &= 0; \\ \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_{ij}} D_{ijkl}^e d\epsilon_{kl} - d\lambda_1 R_{21} - d\lambda_2 R_{22} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

где:

$$R_{\alpha\beta} = \frac{\partial f_\alpha}{\partial \sigma_{rs}} D_{rstu}^e \frac{\partial g_\beta}{\partial \sigma_{rs}} - B_{\alpha\beta}, \alpha, \beta = 1, 2. \quad (10)$$

Учитывая гипотезу о независимости механизмов упрочнения, заметим, что величины B_{12} и B_{21} в (10) будут равняться нулю. Отсюда имеем выражения для пластических множителей $d\lambda_\alpha$

$$\left. \begin{aligned} d\lambda_1 &= \frac{1}{\det \mathbf{R}} \left(\frac{\partial f_1}{\partial \sigma_{ij}} R_{22} - \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_{ij}} R_{12} \right) d\sigma_{ij}^e; \\ d\lambda_2 &= \frac{1}{\det \mathbf{R}} \left(\frac{\partial f_2}{\partial \sigma_{ij}} R_{11} - \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_{ij}} R_{21} \right) d\sigma_{ij}^e, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

В случае неполного активного нагружения, когда $d\lambda_1 > 0, d\lambda_2 \leq 0$ или $d\lambda_1 \leq 0, d\lambda_2 > 0$, выражение (12) принимает известную форму для моделей с одной поверхностью нагружения:

$$D_{ijkl}^{ep} = D_{ijkl}^e - D_{ijmn}^e \frac{\partial g_\alpha}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \sigma_{rs}} D_{rskl}^e. \quad (13)$$

Матрица (12) несимметрична вследствие принятого неассоциированного закона течения для материала.

В работах [13; 22 – 24] для симметризации матрицы (12) вводится поверхность текучести эквивалентного материала F таким образом, что величина пластических деформаций, определяемая множителем $d\lambda$, остается равной величине пластических деформаций бетона, а направление совпадает с направлением поверхности пластического потенциала исходного материала. Такая функция может быть представлена как сумма функции пластического потенциала и некоторой корректирующей функции:

$$F(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}^p) = g(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}^p) + \Phi(\epsilon_{ij}^p), \quad (14)$$

где $g(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}^p)$ — функция пластического потенциала;
 $\Phi(\epsilon_{ij}^p)$ — корректирующая функция.

Поскольку в нашем случае имеются две поверхности нагружения, вполне допустимо введение двух фиктивных поверхностей, аналогичных (14):

$$F_\alpha(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}^p) = g_\alpha(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}^p) + \Phi_\alpha(\epsilon_{ij}^p) = 0, \alpha = 1, 2. \quad (15)$$

Поскольку корректирующие функции не зависят от компонент тензора напряжений, то в силу обобщенного закона течения можно записать:

$$d\epsilon_{ij}^p = \sum_{\alpha=1}^2 d\lambda'_\alpha \frac{\partial F_\alpha}{\partial \sigma_{ij}} = \sum_{\alpha=1}^2 d\lambda'_\alpha \frac{\partial g_\alpha}{\partial \sigma_{ij}}, \alpha = 1, 2. \quad (16)$$

Рассматривая систему дифференциальных уравнений, аналогичную (7), но для поверхностей (15) с учетом (16), и учитывая гипотезу о независимых механизмах упрочнения, получим значения пластических множителей для поверхностей нагружения эквивалентного материала:

$$d\lambda'_\alpha = -(B'_{\alpha\alpha})^{-1} \frac{\partial g_\alpha}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij}, \alpha = 1, 2. \quad (17)$$

Поскольку величины пластических деформаций эквивалентного и реального материалов равны, то:

$$B'_{\alpha\alpha} = -h_\alpha \sqrt{\frac{\partial g_\alpha}{\partial \sigma_{kl}} \frac{\partial g_\alpha}{\partial \sigma_{kl}}} \times \left(\frac{\partial g_\alpha}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} \right) / \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial \sigma_{rs}} d\sigma_{rs} \right). \quad (18)$$

Опуская промежуточные рассуждения, которые можно найти в [4], запишем окончательное выражение для симметричной матрицы:

Поверхности нагружения, пластического потенциала и параметры упрочнения. Поверхностью нагружения в пространстве главных напряжений является геометрическое место точек, для которых справедливо условие начала текучести. Таким образом, поверхность нагружения разделяет зоны упругой и неупругой работы материала.

Практика показывает, что до некоторого уровня главных напряжений рост напряжений приводит к увеличению зоны упругого деформирования бетона, в пределах которой повторно-переменные нагружения приводят к быстрому затуханию неупругих деформаций. Происходит так называемое упрочнение материала. При дальнейшем нагружении проявляется эффект разупрочнения (т. е. рост деформаций без возрастания напряжений при малоцикловых нагружениях), который выражается ниспадающей частью кривой деформирования и приводит к разрушению материала.

Напряжения, при которых происходит разрушение материала, принадлежат поверхности прочного

$$D_{ijkl}^{ep} = D_{ijkl}^e - \frac{1}{\det \mathbf{R}'} \sum_{\alpha=1}^2 D_{ijmn}^e \frac{\partial g_\alpha}{\partial \sigma_{mn}} \left(\frac{\partial g_\alpha}{\partial \sigma_{rs}} R'_{\beta\beta} - \frac{\partial g_\beta}{\partial \sigma_{rs}} R'_{\alpha\beta} \right) D_{rstkl}^e, \quad (19)$$

$$\det \mathbf{R}' = R'_{11} R'_{22} - R'_{12} R'_{21}, \alpha \neq \beta, \alpha, \beta = 1, 2.$$

В (19) обозначено:

$$\mathbf{R}' = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial \sigma_{rs}} D_{rstu}^e \frac{\partial g_1}{\partial \sigma_{tu}} - H_{11} & \frac{\partial g_1}{\partial \sigma_{rs}} D_{rstu}^e \frac{\partial g_2}{\partial \sigma_{tu}} \\ \frac{\partial g_2}{\partial \sigma_{rs}} D_{rstu}^e \frac{\partial g_1}{\partial \sigma_{tu}} & \frac{\partial g_2}{\partial \sigma_{rs}} D_{rstu}^e \frac{\partial g_2}{\partial \sigma_{tu}} - H_{22} \end{pmatrix}; \quad (20)$$

$$\left. \begin{aligned} H_{11} &= \frac{\partial g_1}{\partial \sigma_{rs}} D_{rstu}^e \frac{\partial g_1}{\partial \sigma_{tu}} - \\ &- \frac{1}{d\lambda_1} \left[\frac{\partial g_1}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij}^e - \frac{\partial g_1}{\partial \sigma_{rs}} D_{rstu}^e \frac{\partial g_2}{\partial \sigma_{tu}} d\lambda_2 \right] \\ H_{22} &= \frac{\partial g_2}{\partial \sigma_{rs}} D_{rstu}^e \frac{\partial g_2}{\partial \sigma_{tu}} - \\ &- \frac{1}{d\lambda_2} \left[\frac{\partial g_2}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij}^e - \frac{\partial g_2}{\partial \sigma_{rs}} D_{rstu}^e \frac{\partial g_1}{\partial \sigma_{tu}} d\lambda_1 \right] \end{aligned} \right\}. \quad (21)$$

Величины пластических множителей $d\lambda'_\alpha$ в (21) определяются согласно (11) при $B_{12} = B_{21} = 0$.

Следует заметить, что выражения (19) определены только для конкретного вектора и, следовательно, могут быть решены последовательными приближениями, что несколько снижает эффективность рассмотренных выражений.

Матрица в форме (19) является симметричной, в чем легко убедиться, раскрыв скобки и перегруппировав слагаемые. Очевидно, что в случае неполного активного нагружения выражение (19) принимает канонический вид. сопротивление бетона. Положение этой поверхности в пространстве главных напряжений неизменно. Напряжения, при которых развиваются неупругие деформации, принадлежат поверхности нагружения, иногда называемой мгновенной в силу того, что из-за эффекта упрочнения она меняет свое положение и размеры.

В теории пластического течения упрочняющихся сред, к которым относится и бетон, существуют три основных подхода к моделированию свойств материала — на основе принципов изотропного упрочнения, когда предполагается, что поверхность нагружения лишь изменяет свои размеры, сохраняя в пространстве главных напряжений соосность гидростатической оси; кинематического (трансляционного) упрочнения, когда поверхность нагружения перемещается, сохраняя свои размеры (что позволяет естественным образом учесть эффект Баушингера) и комбинированного упрочнения на основе первых двух подходов.

Очевидно, что последний вариант моделирования свойств материала является естественным, однако сложности его математической реализации оставляют

изотропной и кинематической моделям право на существование.

Далее будем рассматривать модель нелинейного деформирования бетона с изотропным упрочнением. При этом согласно принципу однозначности и постулату Друккера все мгновенные поверхности нагружения на всех этапах нагружения сохраняют подобие друг другу. Если дополнительно принять, что поверхности нагружения должны быть подобны предельной поверхности (поверхности прочности), то тем самым решится еще одна задача — предельного перехода к условию прочности. Кроме того, повышается достоверность модели, поскольку предельная поверхность хорошо определяется экспериментально.

Согласно принятым гипотезам область упругого деформирования материала ограничивается в пространстве главных напряжений двумя поверхностями, отражающими раздельно свойства дилатации материала (нелинейного увеличения объема при сжатии) и так называемой необратимой сжимаемости — нелинейного уменьшения объема при всестороннем сжатии. Известно, что дилатация (разрыхление) материала легко моделируется, если уравнение соответствующей поверхности имеет отрицательную производную по первому инварианту тензора напряжений.

В качестве одного из возможных вариантов рассмотрим построение первой (дилатационной) мгновенной поверхности нагружения на базе поверхностей прочности, разработанных В.М. Кругловым [4].

Общая форма для такой поверхности представляется в виде функции трех инвариантов:

$$f_1(I_1(T_\sigma), J_2(D_\sigma), J_3(D_\sigma), m_c) = 0, \quad (22)$$

где $I_1(T_\sigma)$ — первый инвариант тензора напряжений; $J_2(D_\sigma)$, $J_3(D_\sigma)$ — второй и третий инварианты девиатора напряжений; m_c — параметр, связанный с

При $m_c = 1$ выражение (25) описывает условие прочности бетона при $\mu_\sigma = +1$. Все коэффициенты в (25) подобраны по экспериментальным данным. При этом следует отметить, что используются только две основные характеристики материала: предел прочности на одноосное сжатие R_b и предел прочности на одноосное растяжение R_{bt} . В девиаторном сечении обе поверхности представляют собой криволинейный треугольник (рис. 3) с большим $\bar{\tau}_{0c}$ и малым $\bar{\tau}_{0p}$ радиусами. Отношение радиусов $K = \bar{\tau}_{0p}/\bar{\tau}_{0c}$, входящее в уравнения (23) и (24), выражается:

$$K = m\sqrt{2} \left(m\sqrt{2} - \alpha \right)^{-1}, \quad (26)$$

где $\alpha = 2(2+c)\bar{\tau}_{0c} [4(\bar{\sigma}_0 - c) - \bar{\tau}_{0c}]$, m , c — переменные, описанные в (25).

Поверхности (23) и (24) при $m_c = 1$ достаточно точно описывают условия прочности бетона при

характеристиками упрочнения материала и выполняющий функцию масштабного множителя.

При $m_c = 1$ функция (22) определяет предельную поверхность (т. е. является критерием прочности). Положению начальной поверхности соответствует величина $m_c = m_0$, которая назначается исходя из лучшего описания эксперимента.

С учетом сказанного запишем два возможных выражения для мгновенных поверхностей нагружения:

$$\bar{\tau}_0^2 + a_1 \bar{J}_3(D_\sigma) + c_1 = 0, \quad (23)$$

$$\bar{\tau}_0 + a_2 \bar{J}_3(D_\sigma) + c_2 = 0, \quad (24)$$

где:

$$a_1 = \frac{\sqrt{2}(1-K)}{\bar{\tau}_{0c}(1-K+K^2)}; \quad a_2 = \frac{\sqrt{2}(1-K)}{\bar{\tau}_{0c}^2(1+K^3)};$$

$$c_1 = -\frac{\bar{\tau}_{0c}^2 K^2}{1-K+K^2}; \quad c_2 = -\frac{\bar{\tau}_{0c} K(1+K^2)}{1+K^3};$$

$\bar{\tau}_0 = \tau_0 R_b^{-1}$ — относительное октаэдрическое касательное напряжение; $\bar{J}_3 = J_3 R_b^{-3}$ — относительный третий инвариант девиатора напряжений.

Выражение для $\bar{\tau}_{0c}$ определяет кривую, лежащую в меридиональном сечении поверхностей (23) или (24) при $\mu_\sigma = +1$ (μ_σ — параметр Лоде–Надаи):

$$\bar{\tau}_{0c} = \frac{1}{6} \left\{ A + \sqrt{A^2 - 48\sqrt{2}m_c(\bar{\sigma}_0 - c)} \right\}, \quad (25)$$

где:

$$A = m_c(\sqrt{2}-4) - 2c(3\bar{\sigma}_0 + 6 + m_c);$$

$$c = m_c \chi \left\{ 4a - \left[4 + \sqrt{2}a(\chi + b)^{-1} \right] (1+b) \right\} \left\{ 2[m_c \chi(1+b) + 6ma] \right\}^{-1};$$

$$\chi = R_{bt} R_b^{-1}; \quad a = m(\chi - 1); \quad b = m(\chi + 1); \quad m = 1 + 1,25\chi.$$

$\bar{\sigma}_0 = \sigma_0 R_b^{-1}$ — относительное среднее нормальное напряжение.

трехосном напряженном состоянии. Кроме того, эти поверхности удовлетворяют условию выпуклости (следствие постулата Друккера) в пределах реального диапазона напряжений [4].

В дальнейшем функции (23) и (24) будем рассматривать только как функции нагружения, которые в предельном положении (при $m_c = 1$) совпадают с условием прочности.

Вторая поверхность нагружения, замыкающая область нагружения со стороны всестороннего сжатия, не играет существенной роли в определении прочного сопротивления материала, однако ее вклад в отражение процесса нелинейного деформирования бетона имеет важное значение. В силу того, что эта поверхность не может иметь положения, соответствующего пределу прочного сопротивления материала, определить ее параметры экспериментально достаточно трудно.

В связи с этим имеет смысл рассматривать наиболее простые выражения, которые качественно удовлетворяют необходимым требованиям.

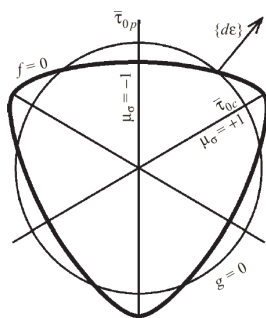


Рис. 3. Девиаторные сечения поверхностей f и g

1. Поверхность не может быть вогнутой (следствие постулата Друкера);

2. Угол наклона касательной к поверхности в сечении $\sigma_0 \sim \tau_0$ не должен быть отрицательным.

Рассмотрим замыкающую поверхность нагружения в виде прямого неротационного конуса (рис. 4), девиаторное сечение которого совпадает с сечением первой, «дилатационной», поверхности нагружения.

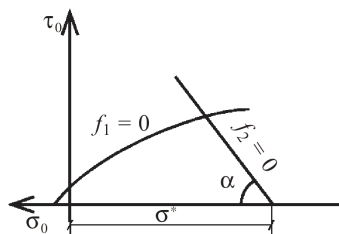


Рис. 4. Меридиональное сечение

Примем меридиональное сечение второй поверхности при $\mu_\sigma = \pm 1$ в форме:

$$f_2(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) = d_0 \bar{\tau}_{0c}^* + \bar{\sigma}_0 - \sigma^* = 0, \quad (27)$$

где $d_0 = \text{tg } \alpha = -0,2$ — коэффициент, принятый для лучшей аппроксимации опытных данных; σ^* — параметр, связанный с механизмом упрочнения поверхности; $\bar{\tau}_{0c}^*$ — величина, определяемая из

где:

$$p = -1;$$

$$q = 2 \left[1,25 - 0,2\bar{\sigma}_0 + \sqrt{(1,25 + 0,2\bar{\sigma}_0)^2 + 0,8(\bar{\tau}_0 - 0,2\bar{\sigma}_0)} \right]^{-1}.$$

Таким образом, в настоящей модели используются четыре поверхности. При нагружениях (в том числе и непропорциональных) в меридиональных плоскостях $\mu_\sigma = \pm 1$ можно принять упрощенную модель с ассоциированным законом течения, и уравнения поверхностей пластического потенциала не использовать. В этом случае число необходимых поверхностей сокращается до двух.

Более того, З. Бажантом [8] была отмечена возможность использования ассоциированного закона течения на всем диапазоне изменения μ_σ , имея в виду сознательно допускаемую неточность. В этом случае

выражения (25) — условия пересечения поверхностей в точке нагружения.

Для получения других меридиональных сечений и, следовательно, построения девиаторного сечения в целом достаточно продифференцировать соответствующие функции первой поверхности по масштабным множителям m_c при заданных значениях $\bar{\tau}_{0c}^*$ и σ^* .

Отметим, что величина σ^* определяется из выражения (27) и при дальнейшем дифференцировании уравнения поверхности полагается константой.

В рассматриваемой модели поверхностям нагружения должны соответствовать свои поверхности пластического потенциала (хотя, в принципе, возможны и иные подходы).

Очевидно, что девиаторные сечения поверхностей пластического потенциала должны совпадать и быть близки к окружности (рис. 3). Выбор уравнений таких поверхностей в настоящее время затруднен отсутствием соответствующих экспериментальных данных, поэтому целесообразно принимать наиболее простые выражения, качественно отображающие картину деформирования материала.

Примем первую поверхность пластического потенциала $g_1 = 0$, соответствующую дилатационной поверхности нагружения, в виде гиперboloидной поверхности вращения, пересекающей гидростатическую ось в точке $\bar{\sigma}_0 = +1$:

$$t(2\bar{\tau}_0 - t)(1 - \bar{\sigma}_0) + \bar{\tau}_0 = 0, \quad (28)$$

где $t = \bar{\tau}_0 + \sqrt{\bar{\tau}_0^2 + \bar{\tau}_0(1 - \bar{\sigma}_0)^{-1}}$.

Вторую поверхность пластического потенциала (замыкающую область нагружения со стороны всестороннего сжатия) $g_2 = 0$ примем в виде простого конуса вращения:

$$q\bar{\tau}_0 + p\bar{\sigma}_0 - \sigma^* = 0, \quad (29)$$

определяющие функции лучше принимать в виде выражений для пластических потенциалов, что обеспечит получение качественно верной картины деформирования бетона. Однако величина погрешности требует дополнительного изучения.

Весьма важным элементом определяющих соотношений, построенных на базе теории пластического течения, являются *параметры упрочнения*. Эти величины отражают уровень накопленных пластических деформаций в материале.

Параметры упрочнения для рассмотренных поверхностей получим на основании экспериментов Х. Купфера, М. Котсовоса, Б. Пауля и Х. Опитца и других [25 – 27].

Параметр упрочнения для дилатационной поверхности (28) запишем в виде:

$$h_1 = 0,001 \frac{(1+0,5\bar{\tau}_0^4)[1-m_p+0,01m_p(2+3\bar{\tau}_0)]^{1,5}}{4+1,2\mu_\sigma+2,8\mu_\sigma^2+2\mu_\sigma^3}, \quad (30)$$

где величина масштабного коэффициента m_p определяется из решения квадратного уравнения

$$3\bar{\tau}_{0c}^2 - \bar{\tau}_{0c} \left[(\sqrt{2}-4)m_p - 2c(3\bar{\sigma}_0 + m_p + 6) \right] + 4\sqrt{2}m_p(\bar{\sigma}_0 - c) = 0, \quad (31)$$

где $\bar{\tau}_{0c} = \bar{\tau}_0$.

Отсюда величина m_p (всегда положительная) будет записана как:

$$m_p = \sqrt{\frac{e^2}{4d^2} - \frac{f}{d}} - \frac{e}{2d}, \quad (32)$$

где:

$$d = B(\bar{\tau}_{0c} - 2\sqrt{2}) + (1+a)\chi \left[4\sqrt{2}\bar{\sigma}_0 - \bar{\tau}_{0c}(\sqrt{2}-4) \right];$$

$$e = 3\bar{\tau}_{0c}^2(1+a)\chi - 3\bar{\tau}_{0c} \left[2b(\sqrt{2}-4) - B(\bar{\sigma}_0+2) \right] + 24\sqrt{2}\bar{\sigma}_0 b;$$

$$f = 18\bar{\tau}_{0c}^2 b; B = \chi \left\{ 4b - (1+a) \left[4 + b\sqrt{2}(\chi+a)^{-1} \right] \right\}.$$

Параметр упрочнения для поверхности (29) удобно представить в виде суммы двух составляющих, одна из которых описывает величину пластических деформаций только от действия σ_0 , а вторая — от одновременного действия касательных и нормальных напряжений:

$$1000h_2^{-1} = h_{2a}^{-1} + h_{2b}^{-1}, \quad (33)$$

где:

$$h_{2a} = 0,001 \frac{1+0,1\bar{\sigma}_0^{0,4}\bar{\tau}_0^4}{10,3+8,1\mu_\sigma-4\mu_\sigma^2-6\mu_\sigma^3} |\bar{\sigma}_0| \bar{\tau}_0^2; h_{2b} = 0,001 \frac{1}{\sqrt{3}f|\bar{\sigma}_0|^b};$$

$$b = 0,001(737+34,7R_b-1,5R_b^2+0,024R_b^3);$$

$$f = R_b \cdot 10^{-5} \cdot (-44+340R_b-11,2R_b^2+0,094R_b^3).$$

На рис. 5 приведены опытные данные и результаты расчетов по рассмотренным формулам, сопоставление которых свидетельствует об их удовлетворительном совпадении.

Представленные выражения ни в коей мере не претендуют на абсолютную полноту и законченность, однако подтверждают правомерность избранного подхода к моделированию нелинейного сопротивления бетона и могут быть использованы для дальнейшего исследования свойств материала.

В [4] приводятся также аналогичные соотношения нелинейной модели деформирования бетона для плоского напряженного состояния.

Место представленных соотношений в общей модели деформирования трехмерных (массивных) железобетонных элементов с трещинами. Основным конструкционным строительным материалом является железобетон, поэтому представленные соотношения представляют интерес в основном как составная часть общей теории железобетона.

Основные положения теории железобетонных элементов с трещинами, для которой разрабатывались приведенные зависимости, можно найти в работах [1, 4]. В рамках указанной теории рассматривается некоторый малый железобетонный элемент, являющийся частью конструкции, который работает в двух состояниях — до разрушения бетона и после разрушения, т. е. после образования трещин в бетоне.

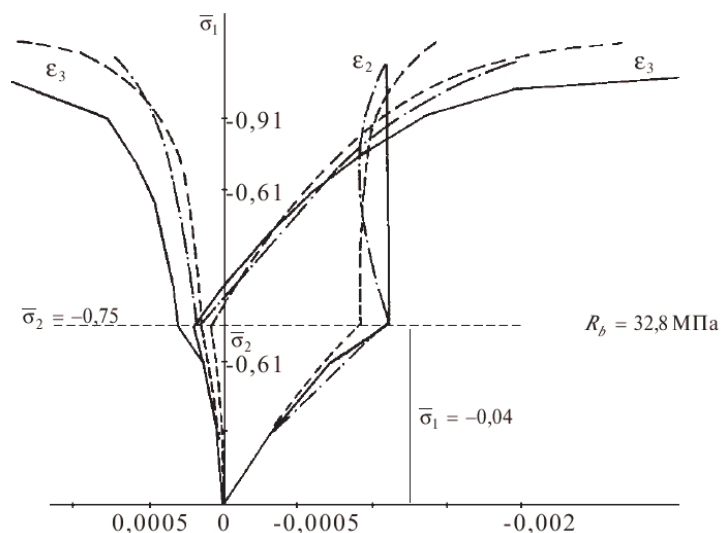


Рис. 5. Сравнение теоретических и экспериментальных (по данным [27]) зависимостей $\sigma_0 \square \epsilon_0$ для случаев непропорционального двухосного неравномерного сжатия. Обозначения σ и ϵ соответствуют принятым в [27]: — — — — настоящий расчет, - - - - - расчет [28], — — — эксперимент [27]

На каждом этапе расчета зависимость между бесконечно малыми приращениями напряжений и бесконечно малыми приращениями деформаций сохраняет общую форму (2), что позволяет использовать их в едином алгоритме пошагового расчета.

До разрушения бетона определяющие соотношения строятся на базе положений теории армированных материалов (композитов), считая при этом армирующие стержни «размазанными» по объему элемента, а сцепление арматуры с бетоном — идеальным. Жесткостные характеристики бетона вычисляются по представленным в настоящей работе соотношениям, арматура считается упругим материалом, участвующим в общем сопротивлении композита в основном своей осевой жесткостью. Отметим, что композитный подход к моделированию железобетона имеет определенные преимущества по сравнению с дискретным — сокращается количество конечных элементов, имеется возможность задавать произвольное расположение арматуры и т. д.

Критерием образования трещин является нарушение равенств (23) или (24) (при $m_c = 1$). После нарушения критериев (23) или (24) фиксируется образование трещин в элементе по трем возможным схемам — в зависимости от

соотношения главных напряжений в момент нарушения критериев прочности в элементе фиксируются одна, две или три взаимно ортогональные трещины. Эти трещины также считаются «размазанными» по объему элемента. Бетон перпендикулярно плоскости трещин выключается из работы (соответствующие жесткостные характеристики в матрице упругости композита принимаются практически равными нулю).

Подробное описание алгоритмов построения общей модели деформирования железобетона приведено в [4]. Здесь лишь укажем, что реализация общей модели с учетом представленных зависимостей выполнена в рамках метода конечных элементов, протестирована и показала свою приемлемость.

Заключение

1. Сформулированы основные положения теории пластического течения для бетона с двойным упрочнением.
2. Определены выражения для поверхностей нагружения и пластического потенциала, параметров упрочнения.
3. Показано место полученных выражений в общей модели деформирования трехмерных железобетонных элементов.

Литература

1. Карпенко Н.И. Общие модели механики железобетона. М.: Стройиздат, 1996. 416 с.
2. Васильков Г.В. Об одном варианте определяющих уравнений пластического деформирования дилатирующих сред // Строительная механика и расчет сооружений. 1987. № 1. С. 44-48.
3. Гениев Г.А., Киссюк В.И., Тюпин Г.А. Теория пластичности бетона и железобетона. М.: Стройиздат, 1974. 216 с.

4. Карпенко Н.И., Круглов В.М., Соловьев Л.Ю. Нелинейное деформирование бетона и железобетона. Новосибирск: СГУПС, 2001. 276 с.
5. Лейтес Е.С. Вариант теории пластического течения бетона // Строительная механика и расчет сооружений. 1978. № 3. С. 34-37.
6. Chen A.C.T., Chen W.F. Constitutive Equations and Punch-Indentation of Concrete // J. Of the Engineering Mechanics Division. 1975, Vol. 101, December. № 6. P. 887-906.
7. Jang B.L., Dafalias J.F., Herrmann I.R. A Bounding Surface Plasticity Model for Concrete // J. Eng. Mech. 1985. Vol. 111. № 3. P. 359-380.

8. Lin F.B., Bazant Z.P., Chern J.C., Marchertas A.H. Concrete Model with Normality and Sequential Identification // *Computers and Structures*. 1987. Vol. 26, № 6. P. 1011-1025.
9. Ильюшин А.А. Пластичность. М.: АН СССР, 1948. 376 с.
10. Москвитин В.В. Циклические нагружения элементов конструкций. М.: Наука, 1981. 344 с.
11. Dafalias J.F. Bounding surface plasticity. I. Mathematical Foundation and hypoplasticity // *J. Eng. Mech.* 1986. Vol. 112. № 9. P. 966-987.
12. Hirai H. Modeling of Elastoplastic Behaviour of Concrete Based on a Nonassociative Flow Rule // *Memoris of the Faculty of Engineering, Kumamoto University*. 1987. Vol. 32. № 2. P. 131-141.
13. Wolffersdorf P.-A. Algorithmus zur Entwicklung allgemeiner elasto-plastischer Stoffgleichungen und dessen Anwendung auf bodenmechanische doppel-werfestigungs-Modelle // *Wiss. Z. Hochsch. Archit. Wiemar*. 31 (1985) 6 B. C. 288-291.
14. Wolffersdorf P.-A. Beitrag zum Entwicklungsstand elasto-plastischer Stoffgesetze in der Bodenmechanik // *Wiss. Z. Hochsch. Archit. Wiemar*. 31 (1985) 6B. C. 254-256.
15. Ottosen N.A. failure criterion for concrete // *J. Eng. Mech. Div.* 1977. Vol. 103, № 4. P. 527-535.
16. Ивлев Д.Д., Быковцев Г.И. Теория упрочняющегося пластического тела. М.: Наука, 1971. 232 с.
17. Работнов Ю.Н. Механика деформированного твердого тела. М.: Наука, 1987. 712 с.
18. Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: ГИТТЛ, 1956. 467 с.
19. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975. 400 с.
20. Круглов В.М., Соловьев Л.Ю. К построению модели деформирования бетона с двойным изотропным упрочнением // *Труды Новосибирского института инженеров железнодорожного транспорта. Совершенствование искусственных сооружений на железных дорогах*. 1989. С. 45-52.
21. Соловьев Л.Ю. К построению определяющих соотношений для бетона на основе теории пластичности с неассоциированным законом течения // *Труды Новосибирского института инженеров железнодорожного транспорта. Совершенствование искусственных сооружений на железных дорогах*. 1991. С. 38-41.
22. Desai C.S., Hashmi Q.S.E. Analysis, evaluation and implementation of nonassociative model for geologic material // *Int. J. Plast.* 1984. Vol. 5. № 4. P. 397-420.
23. Dvorkin E.N., Cuitino A.M., Gioia G.A. concrete material model based on nonassociated plasticity and fracture // *Eng. Comput.* 1989. Vol. 6. P. 281-294.
24. Frantziskonis G., Desai C.S. Constitutive model for nonassociative behavior // *J. Eng. Mech.* 1986. Vol.112. № 9. P. 932-946.
25. Kotsovos M.D., Newman I.B. A Mathematical Description of the Deformational Behavior of Concrete under Complex Loading // *Magazine of Concrete Res.* 1979. Vol. 31, № 107. P. 77-90.
26. Kupfer H. Das Verhalten des Betons unter mehrachsiger kurzzeitbelastung unter besonderer Berücksichtigung der zweiachsiger Beanspruchung // *Dafstb.* 1973. Heft 229.
27. May I.M., Al-Shaarbaif I.A.S. Three dimensional finite element analysis of reinforced concrete beams in torsion // *Comp. Aided Anal. Des. Concr. Struct. Proc. 2nd Int. Conf. Zell-am-Zee, Austria*, 4—6 Apr.1990. Swansea 1990. Vol. 1. P. 45-60.
28. Ottosen N.S. Nonlinear Finite Element Analysis of Concrete Slabs // *RISU-K-411. Denmark*. 1980.
29. Алявдин П.В. Предельный анализ конструкций при повторных нагружениях. Минск: УП «Технопринт», 2005. 282 с.
2. Vasil'kov G.V. About one variant of the defining equations of plastic deformation dilatated environments // *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzhenii*. 1987. № 1. P. 44-48.
3. Geniev G.A., Kissyuk V.I., Tyupin G.A. Plasticity theory of plain concrete and reinforced concrete. M.: Stroizdat, 1974. 216 p.
4. Karpenko N.I., Kruglov V.M., Solov'ev L.Yu. Nonlinear deformation of plain concrete and reinforced concrete. Novosibirsk: SGUPS, 2001. 276 p.
5. Leites E.S. A variant of flow plasticity theory of concrete // *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzhenii*. 1978. № 3. P. 34-37.
6. Chen A.C.T., Chen W.F. Constitutive Equations and Punch-Indentation of Concrete // *J. Of the Engineering Mechanics Division*. 1975, Vol. 101, December. № 6. P. 887-906.
7. Jang B.L., Dafalias J.F., Herrmann I.R. A Bounding Surface Plasticity Model for Concrete // *J. Eng. Mech.* 1985. Vol. 111. № 3. P. 359-380.
8. Lin F.B., Bazant Z.P., Chern J.C., Marchertas A.H. Concrete Model with Normality and Sequential Identification // *Computers and Structures*. 1987. Vol. 26, № 6. P. 1011-1025.
9. Ильюшин А.А. Теория пластичности. М.: АН СССР, 1948. 376 с.
10. Москвитин В.В. Циклическое нагружение элементов конструкций. М.: Наука, 1981. 344 п.
11. Dafalias J.F. Bounding surface plasticity. I. Mathematical Foundation and hypoplasticity // *J. Eng. Mech.* 1986. Vol. 112. № 9. P. 966-987.
12. Hirai H. Modeling of Elastoplastic Behaviour of Concrete Based on a Nonassociative Flow Rule // *Memoris of the Faculty of Engineering, Kumamoto University*. 1987. Vol. 32. № 2. P.131-141.
13. Wolffersdorf P.-A. Algorithmus zur Entwicklung allgemeiner elasto-plastischer Stoffgleichungen und dessen Anwendung auf bodenmechanische doppel-werfestigungs-Modelle // *Wiss. Z. Hochsch. Archit. Wiemar*. 31 (1985) 6 B. P. 288-291.
14. Wolffersdorf P.-A. Beitrag zum Entwicklungsstand elasto-plastischer Stoffgesetze in der Bodenmechanik // *Wiss. Z. Hochsch. Archit. Wiemar*. 31 (1985) 6B. P. 254-256.
15. Ottosen N.A. failure criterion for concrete // *J. Eng. Mech. Div.* 1977. Vol. 103, № 4. P. 527-535.
16. Ивлев Д.Д., Быковцев Г.И. Теория упрочняющегося пластического тела. М.: Наука, 1971. 232 п.
17. Работнов Ю.Н. Механика деформированного твердого тела. М.: Наука, 1987. 712 п.
18. Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: ГИТТЛ, 1956. 467 п.
19. Малинин Н.Н. Прикладная механика пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975. 400 п.
20. Круглов В.М., Соловьев Л.Ю. К построению модели деформации бетона с двойным изотропным упрочнением // *Труды Новосибирского института инженеров железнодорожного транспорта. Совершенствование искусственных сооружений на железных дорогах*. 1989. P. 45-52.
21. Соловьев Л.Ю. К построению определяющих соотношений для бетона на основе теории пластичности с неассоциированным законом течения // *Труды Новосибирского института инженеров железнодорожного транспорта. Совершенствование искусственных сооружений на железных дорогах*. 1991. С. 38-41.
22. Desai C.S., Hashmi Q.S.E. Analysis, evaluation and implementation of nonassociative model for geologic material // *Int. J. Plast.* 1984. Vol. 5. № 4. P. 397-420.
23. Dvorkin E.N., Cuitino A.M., Gioia G.A. concrete material model based on nonassociated plasticity and fracture // *Eng. Comput.* 1989. Vol. 6. P. 281-294.
24. Frantziskonis G., Desai C.S. Constitutive model for nonassociative behavior // *J. Eng. Mech.* 1986. Vol.112. № 9. P. 932-946.
25. Kotsovos M.D., Newman I.B. A Mathematical Description of the Deformational Behavior of Concrete under Complex Loading // *Magazine of Concrete Res.* 1979. Vol. 31, № 107. P. 77-90.
26. Kupfer H. Das Verhalten des Betons unter mehrachsiger kurzzeitbelastung unter besonderer Berücksichtigung der zweiachsiger Beanspruchung // *Dafstb.* 1973. Heft 229.

Reference

1. Karpenko N.I. General models of reinforced concrete mechanics. M.: Stroizdat, 1996. 416 p.

27. May I.M., Al-Shaarbaf I.A.S. Three dimensional finite element analysis of reinforced concrete beams in torsion // *Comp. Aided Anal. Des. Concr. Struct. Proc. 2nd Int. Conf. Zell-am-Zee, Austria, 4—6 Apr.1990. Swansea 1990. Vol. 1. P. 45-60.*
28. Ottosen N.S. *Nonlinear Finite Element Analysis of Concrete Slabs // RISU-K-411. Denmark. 1980.*
29. Alyavdin P.V. *The limiting analysis of designs at repeated loadings. Minsk: UP «Tekhnoprint», 2005. 282 p.*