# МОДЕЛИРОВАНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

УДК 681.5

## Методика получения коэффициентов элементарных звеньев в виде целочисленных значений

Ю.Н. Алпатов[a], А.А. Дриженко[b], С.С. Унистюк[c]

Братский государственный университет, Макаренко 40, Братск, Россия
[a]iipm@brstu.ru, [b]drizhenko@ mail.ru, [c]1229664@gmail.com
Статья поступила 15.06.2014, принята 20.08.2014

*Техническая реализация элементарных звеньев, полученных при разложении дробно-рациональной функции в виде цепной дроби, часто вызывает необходимость получения коэффициентов передач и постоянных времени в виде целочисленных значений, так как использование вещественных коэффициентов в некоторых случаях невозможно. В статье предложена методика, с помощью которой можно представить любые коэффициенты элементарных звеньев в виде целочисленных значений. Методика основана на использовании теории цепных дробей. Любое число* $\frac{a}{b}$ *можно представить в виде конечной цепной дроби. Установлено, что в качестве делителей необходимо брать только простые числа. На основе методики получен общий алгоритм разложения дробного числа* $\frac{a}{b}$. *Из общего алгоритма получены три алгоритма, которые соответствуют трем случаям числа* $\frac{a}{b}$: $a$ *– четное число,* $b$ *– нечетное число;* $a$ *– нечетное число,* $b$ *– нечетное число;* $a$ *– нечетное число,* $b$ *– четное число. Случай, где* $a$ *– четное число и* $b$ *– четное число, необходимо привести к одному из трех разобранных случаев, для чего надо сократить дробь* $\frac{a}{b}$. *С помощью разработанной методики возможно представить любые коэффициенты элементарных звеньев в виде целочисленных значений. Это позволяет реализовать элементарные звенья, когда требуются целые значения параметров.*

**Ключевые слова:** разложение дробно-рациональной функции, разложение числа, простое число, четное число, нечетное число, целочисленные значения, вещественные коэффициенты, элементарные звенья.

## Technique for receiving coefficients of elementary units in the form of whole-number values

Yu.N. Alpatov, A.A. Drizhenko, S.S. Unistyuk

Bratsk State University, 40 Makarenko St., Bratsk, Russia
[a]iipm@brstu.ru, [b]drizhenko@ mail.ru, [c]1229664@gmail.com
Received 15.06.2014, accepted 20.08.2014

*Engineering implementation of elementary units, received under expansion of a fractional-rational function in the form of chain fraction, often makes it necessary to receive coefficients of transmissions and time constants in the form of whole-number values because it is not always possible to use real coefficients. Technique which helps to present any coefficients of elementary units in the form of whole-number values has been offered in the article. The technique is based on the use of the theory of chain fractions. It is possible to present any number* $\frac{a}{b}$ *in the form of final chain fraction. It has been established that only prime numbers are necessary to be taken as divider. General algorithm of expansion of a fractional number* $\frac{a}{b}$ *has been received on the basis of this technique. Three algorithms have been received from the general algorithm which correspond to three cases of number* $\frac{a}{b}$: $a$ *is an even number,* $b$ *is an odd number;* $a$ *is an odd number,* $b$ *is an odd number;* $a$ *is an odd number,* $b$ *is an even number.*

*The case in which* $a$ *is an even number and* $b$ *is an even number should be led to one of three cases mentioned above by reducing*

*the fraction $\frac{a}{b}$. With the aid of the developed technique it is possible to present any coefficients of elementary units in the form of whole-number values. It allows to implement elementary units when whole values of parameters are needed.*

**Keywords:** expansion of a fractional-rational function, number expansion, prime number, even number, odd number, whole-number values, real coefficients, elementary units.

**Введение.** Техническая реализация элементарных звеньев, полученных при разложении дробно-рациональной функции в виде цепной дроби [1], часто вызывает необходимость получения коэффициентов передач и постоянных времени в виде целочисленных значений, так как использование вещественных коэффициентов в некоторых случаях невозможно.

Любое число $\frac{a}{b} \in Q$ можно представить в виде конечной цепной дроби:

$$\frac{a}{b} = \cfrac{d_0}{a_0 + \cfrac{d_1}{a_1 + \cfrac{d_2}{a_2 + \ddots + \cfrac{d_n}{a_n + d}}}}, \qquad (1)$$

где $a_1 = \frac{1}{c_i}$; $i = 1:n$; $c_i \in N$; $c_i > 1$; $d_i \in N$;

$d \in N$; $d > 1$;

$N$ – множество натуральных чисел.

Пусть задано число $\frac{a}{b} \in Q$.

Представим $\frac{a}{b}$ в виде (1):

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{1 + (b-1)} = \frac{\frac{a}{a_1}}{\frac{1}{a_1} + \frac{b-1}{a_1}},$$

где $a_1 > 1$; $a_1 \in N$:

При этом $a_1$ – делитель числа $a$ и числа $b-1$.

Если $a$ и $b-1$ взаимно просты, то $a_1$ – делитель числа $a$:

$$\frac{a}{b} = \frac{d_0}{\frac{1}{a_1} + \frac{b-1}{a_1}},$$

где $d_0 \in N$, $a_1$ – делитель числа $a$.

Представим дробь $\frac{b-1}{a_1}$ в виде (1):

$$\frac{b-1}{a_1} = \frac{b-1}{1 + (a_1 - 1)} = \frac{\frac{b-1}{b_1}}{\frac{1}{b_1} + \frac{a_1 - 1}{b_1}},$$

где $b \in N$; $b_1 > 1$.

При этом $b_1$ – делитель числа $b-1$ и числа $a_1 - 1$.

Если $a_1 - 1$ и $b-1$ взаимно просты, то $b_1$ – делитель числа $b-1$:

$$\frac{a}{b} = \cfrac{d_0}{\cfrac{1}{a_1} + \cfrac{d_1}{\cfrac{1}{b_1} + \cfrac{a_1 - 1}{b_1}}}.$$

Представим $\frac{a_1 - 1}{b_1}$ в виде (1):

$$\frac{a_1 - 1}{b_1} = \frac{a_1 - 1}{1 + (b_1 - 1)} = \frac{\frac{a_1 - 1}{a_1'}}{\frac{1}{a_1'} + \frac{b_1 - 1}{a_1'}},$$

где $a_1' \in N$; $a_1' > 1$.

При этом $a_1'$ – делитель числа $a_1 - 1$ и числа $b_1 - 1$.

Пусть $a_1'$ – делитель числа $a_1 - 1$.

Рассмотрим случай, когда $a_1'$ – делитель числа $b_1 - 1$.

Число $a_1'$ – делитель числа $b_1 - 1$ тогда, когда $a_1$ и $b_1$ – простые числа.

Если $a_1$ – простое число, то $a_1 - 1$ четное число, следовательно, $a_1' = 2$, и если $b_1$ – простое число, то $b_1 - 1$ четное число:

$$\frac{b_1 - 1}{a_1'} = \frac{b_1 - 1}{2} \in N.$$

Поэтому в качестве делителей необходимо брать простые числа.

Согласно основной теореме арифметики [4] любое число можно представить как $a = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_K$, где $a_i$ – простые множители числа $a$, $a_1 \le a_2 \le a_3 \le \dots \le a_K$, $K \ge 1$.

Таким образом, получим алгоритм разложения $\frac{a}{b} \in Q$ в дробь (1).

Рассмотрим свойства полученного алгоритма.

Разложим число $\frac{a}{b} \in Q$ в дробь вида (1), используя описанный выше алгоритм:

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_K}{1 + (b-1)} = \frac{a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_K}{\frac{1}{a_1} + \frac{b-1}{a_1}},$$

где $a_i$ – простые множители числа $a$.

Если $a$ – четное число, $b$ – нечетное число, то $a_1 = 2$, $b-1$ – четное число. Следовательно,

$$\frac{a}{b}=\frac{a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_K}{\frac{1}{a_1}+d},$$

где $d=\frac{b-1}{2}\in N$.

По условию $d>1$, поэтому $\frac{b-1}{2}>1$ выполняется всегда, кроме случая, когда $b=3$.

В случае, если $b=3$, необходимо числитель и знаменатель дроби $\frac{a}{b}$ умножить на число $m\in N$, $m$ – нечетное число и $m>3$. Таким образом, если $a$ – четное число, $b$ – нечетное число, получаем дробь вида:

$$\frac{a}{b}=\frac{a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_K}{\frac{1}{a_1}+d}, \quad d\in N \text{ и } d>1.$$

Если $a$ – нечетное число, выполняем второй шаг алгоритма.

$$\frac{b-1}{a_1}=\frac{b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \dots \cdot b_K}{1+(a_1-1)}=\frac{b_2 \cdot b_3 \cdot \dots \cdot b_K}{\frac{1}{b_1}+\frac{a_1-1}{b_1}},$$

где $b_i$ – простые множители числа $b-1$. Так как $a$ – нечетное число, то $a_1$ – нечетное число, следовательно, $a_1-1$ четное число. Если $b$ – нечетное число, то $b-1$ – четное число, следовательно, $b_1=2$.

Поэтому:

$$\frac{a}{b}=\frac{a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_K}{\frac{1}{a_1}+\frac{b_2 \cdot b_3 \cdot \dots \cdot b_K}{\frac{1}{b_1}+d}},$$

где $d=\frac{a_1-1}{2}\in N$.

По условию $d>1$, следовательно, $\frac{a_1-1}{2}>1$ выполняется всегда, кроме случая, когда $a_1=3$.

В случае, когда $a_1=3$, необходимо в качестве делителя числителя и знаменателя дроби выбрать наименьший множитель $a_i\neq 3$; если такого множителя нет, то в качестве делителя берется само число; если $a=3$, то необходимо числитель и знаменатель дроби умножить на число $m$, где $m\in N$, $m$ – нечетное число. Таким образом, если $a$ – нечетное число, $b$– нечетное число, получаем дробь:

$$\frac{a}{b}=\frac{a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_K}{\frac{1}{a_1}+\frac{b_2 \cdot b_3 \cdot \dots \cdot b_K}{\frac{1}{b_1}+d}},$$

где $d\in N$ и $d>1$.

Если $b$– четное число, выполним третий шаг алгоритма:

$$\frac{a_1-1}{b_1}=\frac{a_1' \cdot a_2' \cdot a_3' \cdot \dots \cdot a_K'}{1+(b_1-1)}=\frac{a_2' \cdot a_3' \cdot \dots \cdot a_K'}{\frac{1}{a_1'}+\frac{b_1-1}{a_1'}},$$

где $a_i'$ – простые множители числа $a_1-1$; так как $b$– четное число, то $b-1$ – нечетное число, следовательно, $b_1$ – нечетное число, т. е. $b_1-1$ – четное число, и так как $a_1-1$ – четное число, то $a_1'=2$.

Поэтому:

$$\frac{a}{b}=\frac{a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_K}{\frac{1}{a_1}+\frac{b_2 \cdot b_3 \cdot \dots \cdot b_K}{\frac{1}{b_1}+\frac{a_2' \cdot a_3' \cdot \dots \cdot a_{K1}'}{\frac{1}{a_1'}+d}}},$$

где $d=\frac{b_1-1}{2}\in N$.

По условию $d>1$, следовательно, $\frac{b_1-1}{2}>1$ выполняется всегда, кроме случая, когда $b_1=3$.

В случае, когда $b_1=3$, необходимо в качестве делителя числителя и знаменателя выбрать наименьший множитель $b_i\neq 3$; если такого множителя нет, то в качестве делителя берется само число $b-1$; если $b=4$, то необходимо числитель и знаменатель дроби $\frac{a}{b}$ умножить на число $m$, где $m\in N$, $m$ – нечетное число и $m>3$.

Таким образом, если $a$ – нечетное число, $b$ – четное число, получаем дробь вида:

$$\frac{a}{b}=\frac{a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_K}{\frac{1}{a_1}+\frac{b_2 \cdot b_3 \cdot \dots \cdot b_K}{\frac{1}{b_1}+\frac{a_2' \cdot a_3' \cdot \dots \cdot a_{K2}'}{\frac{1}{a_1'}+d}}},$$

где $d\in N$ и $d>1$.

Случай, где $a$ – четное число и $b$– четное число, необходимо привести к одному из трех разобранных случаев, для чего надо сократить дробь $\frac{a}{b}$.

**Выводы**

Таким образом, с помощью разработанной методики возможно представить любые коэффициенты элементарных звеньев в виде целочисленных значений. Это позволяет реализовать элементарные звенья, когда требуется целые значения параметров.

*Литература*

1. Алпатов Ю.Н. Синтез систем управления методом структурных графов. Иркутск, Изд-во Иркут. ун-та, 1988. 184 с.
2. Арнольд В.И. Цепные дроби. Изд-во МЦНМО. 2009. 40 с.
3. Парфинов И.И. Цепные дроби – ожерелье мехатроники. М.: КомКнига, 2007. 120 с.
4. Хинчин Д.Я. Цепные дроби. М.: Наука, 1978. 112 с.
5. Хованский А.Н. Приложение цепных дробей и их

обобщений к вопросам приближенного анализа. М.: Мир, 1973. 368 с.

*Reference*

1. Alpatov Yu.N. Sintez sistem upravleniya metodom strukturnykh grafov. Irkutsk, Izd-vo Irkut. un-ta, 1988. 184 p.
2. Arnol'd V.I. Tsepnye drobi. M.: Izd-vo MTsNMO, 2009. 40 p.
3. Parfinov I.I. Tsepnye drobi – ozherel'e mekhatroniki. M.: KomKniga, 2007. 120 p.
4. Khinchin D.Ya. Tsepnye drobi. M.: Nauka, 1978. 112 p.
5. Khovanskii A.N. Prilozhenie tsepnykh drobei i ikh obobshchenii k voprosam priblizhennogo analiza. M.: Mir, 1973. 368 p..