

Постановка и решение задачи оптимизации раскроя пиловочника крупных размеров с выпиливанием трех брусьев одинаковой толщины и четырех пар боковых досок

А.И. Агапов

Вятский государственный университет, Московская 35, Киров, Россия

kaf_mtd@vyatsu.ru

Статья поступила 28.02.2014, принята 13.05.2014

Оптимальные размеры брусьев и досок определялись после первого прохода брусво-развального способа раскроя пиловочника. В качестве критерия оптимальности выбран выход пилопродукции, получаемый по данной схеме раскроя. Целевая функция представлена в виде суммы площадей поперечных сечений брусьев и досок. Математическая модель целевой функции устанавливает взаимосвязь размеров брусьев и досок. С увеличением размеров брусьев их объемы возрастают, а размеры и объемы боковых досок при этом уменьшаются, и наоборот. Очевидно, имеется такое соотношение размеров брусьев и досок, при котором целевая функция принимает максимальное значение. Уравнения связи представляют взаимосвязь диаметра пиловочника с размерами брусьев и досок. Для решения математической модели использовался метод множителей Лагранжа. Расчетные формулы для определения оптимальных размеров брусьев и досок были получены путем решения системы уравнений частных производных от функции Лагранжа совместно с уравнениями связи. Используя численный метод, были определены оптимальные размеры брусьев и досок, при которых целевая функция принимает максимальное значение. Расчеты показали, что оптимальная относительная толщина бруса для данной схемы раскроя пиловочника равна 0,139 от диаметра бревна в вершинном торце, а сумма толщин трех брусьев составляет 0,417 от этого диаметра.

Ключевые слова: пиловочник, способ раскроя, критерий, целевая функция, уравнения связи, математическая модель, функция Лагранжа, численный метод, оптимальные размеры, брус и доски.

Formulation and solution of the problem of optimization of cutting large-sized lumber logs with cutting out three square logs of the same thickness and four pairs of side boards

A.I. Agapov

Vyatka State University, 35 Moscow St., Kirov, Russia

kaf_mtd@vyatsu.ru

Received 28.02.2014, accepted 13.05.2014

Optimal size of the square logs and boards were determined after the first pass of lumber logs sawn with breaking up method. The output of the sawn timber produced under this cutting scheme has been chosen as the optimality criterion. The objective function has been presented as the sum of the squares of transections of square logs and boards. Mathematical model of the objective function establishes a relationship between the sizes of square logs and boards. The more the square log size, the more their volumes are and the less the side boards size is, and vice versa. Obviously, there is a ratio of the sizes of the square logs and boards in which the objective function takes the maximum value. Coupling equations present the relationship between diameter of lumber logs and sizes of square logs and boards. To solve the mathematical model the method of Lagrange multipliers has been used. Calculation formulas for determining the optimal size of square logs and boards have been obtained by solving the system of equations of the partial derivatives of the Lagrange function together with coupling equations. Using a numerical method, optimal sizes of square logs and boards, in which the objective function takes maximum value, have been determined. Calculations have shown that the optimum thickness of the square log for this scheme of cutting is 0.139 from the diameter of a log at the apex end, and the sum of the thicknesses of three square logs is 0.417 of this diameter.

Keywords: lumber logs, cutting method, criterion, objective function, coupling equation, mathematical model, Lagrange function, numerical method, optimal size, square logs and boards.

Введение. При раскрое пиловочника больших размеров (диаметром 60...100 см) брусво-развальным способом целесообразно выпиливать три одинаковых по толщине бруса [2, 3], а из боковой части бревна можно

получить еще четыре пары боковых досок (рис. 1). Важно знать оптимальные размеры брусьев и досок, получаемые при первом проходе брусво-развальным способом раскроя пиловочника. В качестве критерия

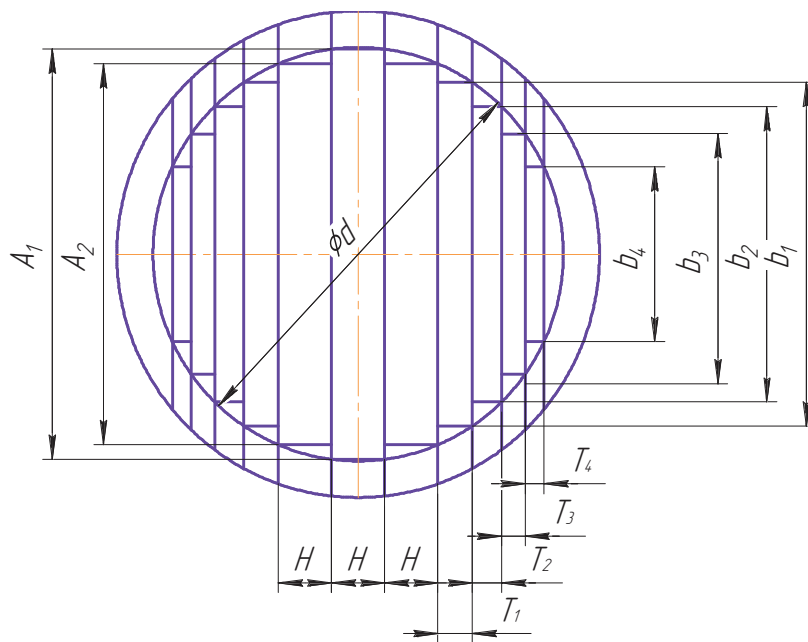


Рис. 1. Схема раскроя пиловочника с выпиливанием трех брусьев одинаковой толщины и четырех пар боковых досок

Постановка задачи. Целевую функцию можно записать в виде суммы площадей поперечных сечений трех брусьев и четырех пар боковых досок [1]:

$$Z = HA_1 + 2HA_2 + 2T_1b_1 + 2T_2b_2 + 2T_3b_3 + 2T_4b_4. \quad (1)$$

где H – толщина бруса, A_1 – ширина пласти центрального бруса, A_2 – ширина наружной пласти боковых брусьев, T_1, T_2, T_3, T_4 – толщины соответственно первой, второй, третьей и четвертой пар боковых досок, b_1, b_2, b_3, b_4 – ширины наружных пластей соответственно первой, второй, третьей и четвертой пар боковых досок.

Для составления уравнений связи воспользуемся теоремой Пифагора. Взаимосвязь диаметра бревна в вершинном торце с размерами брусьев и досок можно представить следующими уравнениями.

Для центрального бруса:

$$d^2 - b_3^2 - 9H^2 - 4T_1^2 - 4T_2^2 - 4T_3^2 - 12HT_1 - 12HT_2 - 12HT_3 - 8T_1T_2 - 8T_1T_3 - 8T_2T_3 = 0. \quad (6)$$

Для четвертой пары боковых досок:

$$d^2 - b_4^2 - 9H^2 - 4T_1^2 - 4T_2^2 - 4T_3^2 - 4T_4^2 - 12HT_1 - 12HT_2 - 12HT_3 - 12HT_4 - 8T_1T_2 - 8T_1T_3 - 8T_1T_4 - 8T_2T_3 - 8T_2T_4 - 8T_3T_4 = 0. \quad (7)$$

Полагаем, что математическая модель составлена.

$$d^2 - H^2 - A_1^2 = 0, \quad (2)$$

где d – диаметр бревна в вершинном торце.

Для боковых брусьев:

$$d^2 - 9H^2 - A_2^2 = 0. \quad (3)$$

Для первой пары боковых досок:

$$d^2 - b_1^2 - 9H^2 - 12HT_1 - 4T_1^2 = 0. \quad (4)$$

Для второй пары боковых досок:

$$d^2 - b_2^2 - 9H^2 - 4T_1^2 - 4T_2^2 - 12HT_1 - 12HT_2 - 8T_1T_2 = 0. \quad (5)$$

Для третьей пары боковых досок:

Решение задачи. Для решения данной модели воспользуемся методом множителей Лагранжа. Функцию Лагранжа записываем в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 L = & HA_1 + 2HA_2 + 2T_1b_1 + 2T_2b_2 + 2T_3b_3 + 2T_4b_4 + \lambda_1(d^2 - H^2 - A_1^2) + \\
 & + \lambda_2(d^2 - 9H^2 - A_2^2) + \lambda_3(d^2 - b_1^2 - 9H^2 - 12HT_1 - 4T_1^2) + \\
 & + \lambda_4(d^2 - b_2^2 - 9H^2 - 4T_1^2 - 4T_2^2 - 12HT_1 - 12HT_2 - 8T_1T_2) + \\
 & + \lambda_5(d^2 - b_3^2 - 9H^2 - 4T_1^2 - 4T_2^2 - 4T_3^2 - 12HT_1 - 12HT_2 - 12HT_3 - \\
 & - 8T_1T_2 - 8T_1T_3 - 8T_2T_3) + \lambda_6(d^2 - b_4^2 - 9H^2 - 4T_1^2 - 4T_2^2 - 4T_3^2 - 4T_4^2 - 12HT_1 - \\
 & - 12HT_2 - 12HT_3 - 12HT_4 - 8T_1T_2 - 8T_1T_3 - 8T_1T_4 - 8T_2T_3 - 8T_2T_4 - 8T_3T_4),
 \end{aligned} \tag{8}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6$ – множители Лагранжа.

Находим частные производные от функции Лагранжа и приравняем их к нулю:

$$\left\{ \begin{aligned}
 \frac{\partial L}{\partial A_1} &= H - 2\lambda_1 A_1 = 0, \\
 \frac{\partial L}{\partial A_2} &= 2H - 2\lambda_2 A_2 = 0, \\
 \frac{\partial L}{\partial H} &= A_1 + 2A_2 - 2\lambda_1 H - 18\lambda_2 H - 18\lambda_3 H - 12\lambda_3 T_1 - 18\lambda_4 H - 12\lambda_4 T_1 - 12\lambda_4 T_2 - \\
 & - 12\lambda_5 H - 12\lambda_5 T_1 - 12\lambda_5 T_2 - 12\lambda_5 T_3 - 18\lambda_6 H - 12\lambda_6 T_1 - 12\lambda_6 T_2 - 12\lambda_6 T_3 - \\
 & - 12\lambda_6 T_4 = 0, \\
 \frac{\partial L}{\partial b_1} &= 2T_1 - 2\lambda_3 b_1 = 0, \\
 \frac{\partial L}{\partial T_1} &= 2b_1 - 12\lambda_3 H - 8\lambda_3 T_1 - 8\lambda_4 T_1 - 12\lambda_4 H - 8\lambda_4 T_2 - 8\lambda_5 T_1 - 12\lambda_5 H - 8\lambda_5 T_2 - \\
 & - 8\lambda_5 T_3 - 8\lambda_6 T_1 - 12\lambda_6 H - 8\lambda_6 T_2 - 8\lambda_6 T_3 - 8\lambda_6 T_4 = 0, \\
 \frac{\partial L}{\partial b_2} &= 2T_2 - 2\lambda_4 b_2 = 0, \\
 \frac{\partial L}{\partial T_2} &= 2b_2 - 8\lambda_4 T_2 - 12\lambda_4 H - 8\lambda_4 T_1 - 8\lambda_5 T_2 - 12\lambda_5 H - 8\lambda_5 T_1 - 8\lambda_5 T_3 - 8\lambda_6 T_2 - \\
 & - 12\lambda_6 H - 8\lambda_6 T_1 - 8\lambda_6 T_3 - 8\lambda_6 T_4 = 0, \\
 \frac{\partial L}{\partial b_3} &= 2T_3 - 2\lambda_5 b_3 = 0, \\
 \frac{\partial L}{\partial T_3} &= 2b_3 - 8\lambda_5 T_3 - 12\lambda_5 H - 8\lambda_5 T_1 - 8\lambda_5 T_2 - 8\lambda_6 T_3 - 12\lambda_6 H - 8\lambda_6 T_1 - \\
 & - 8\lambda_6 T_2 - 8\lambda_6 T_4 = 0, \\
 \frac{\partial L}{\partial b_4} &= 2T_4 - 2\lambda_6 b_4 = 0, \\
 \frac{\partial L}{\partial T_4} &= 2b_4 - 8\lambda_6 T_4 - 12\lambda_6 H - 8\lambda_6 T_1 - 8\lambda_6 T_2 - 8\lambda_6 T_3 = 0.
 \end{aligned} \right. \tag{9}$$

Решаем полученную систему уравнений (9) совместно с уравнением связи. Рассматриваем предпоследнее уравнение системы (9):

$$T_4 = \lambda_6 b_4, \quad \lambda_6 = \frac{T_4}{b_4}. \tag{10}$$

Рассматриваем последнее уравнение системы (9), которое представляем в виде:

$$b_4 = 6\lambda_6 H + 4\lambda_6 T_1 + 4\lambda_6 T_2 + 6\lambda_6 T_3 + 4\lambda_6 T_4. \tag{11}$$

В равенство (11) подставим выражение (10), получим:

$$\begin{aligned}
 b_4^2 &= 6HT_4 + 4T_1T_4 + 4T_2T_4 + 4T_3T_4 + 4T_4^2 = \\
 &= 2T_4(3H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 2T_4).
 \end{aligned} \tag{12}$$

Рассматриваем восьмое уравнение системы (9):

$$T_3 = \lambda_5 b_3, \quad \lambda_5 = \frac{T_3}{b_3}. \tag{13}$$

Рассматриваем девятое уравнение системы (9), которое можно представить в виде:

$$b_3 = 4\lambda_5 T_3 + 6\lambda_5 H + 4\lambda_5 T_1 + 4\lambda_5 T_2 + b_4. \tag{14}$$

В равенство (14) подставляем выражение (13), получим:

$$b_3^2 = 4T_3^2 + 6HT_3 + 4T_1T_3 + 4T_2T_3 + b_3b_4. \quad (15)$$

Из последнего равенства можно определить ширину четвертой пары досок по формуле:

$$b_4 = b_3 - \frac{2T_3}{b_3}(3H + 2T_3 + 2T_1 + 2T_2). \quad (16)$$

Рассматриваем шестое уравнение системы (9):

$$T_2 = \lambda_4 b_2, \quad \lambda_4 = \frac{T_2}{b_2}. \quad (17)$$

Рассматриваем седьмое уравнение системы (9), которое представляем в следующем виде:

$$b_2 = 4\lambda_4 T_1 + 4\lambda_4 T_2 + 6\lambda_4 H + b_3. \quad (18)$$

В последнее равенство (18) подставим выражение (17), получим:

$$b_2^2 = 4T_1T_2 + 4T_2^2 + 6HT_2 + b_2b_3. \quad (19)$$

Из равенства (19) можно выразить ширину третьей пары досок:

$$b_3 = b_2 - \frac{2T_2}{b_2}(3H + 2T_1 + 2T_2). \quad (20)$$

Рассматриваем четвертое уравнение системы (9):

$$T_1 = \lambda_3 b_1, \quad \lambda_3 = \frac{T_1}{b_1}. \quad (21)$$

Рассматриваем пятое уравнение системы (9), которое представляем в виде:

$$b_1 = 6\lambda_3 H + 4\lambda_3 T_1 + b_2. \quad (22)$$

В равенство (22) подставим выражение (21), получим:

$$b_1^2 = 6HT_1 + 4T_1^2 + b_1b_2. \quad (23)$$

Из равенства (23) можно определить ширину второй пары досок:

$$b_2 = b_1 - \frac{2T_1}{b_1}(3H + 2T_1). \quad (24)$$

Рассматриваем первое уравнение системы (9):

$$H = 2\lambda_1 A_1, \quad \lambda_1 = \frac{H}{2A_1}. \quad (25)$$

Рассматриваем второе уравнение системы (9):

$$H = \lambda_2 A_2, \quad \lambda_2 = \frac{H}{A_2}. \quad (26)$$

Из уравнения связи (2) можно определить ширину пласти центрального бруса:

$$A_1 = \sqrt{d^2 - H^2}. \quad (27)$$

Из уравнения связи (3) можно определить ширину наружной пласти бокового бруса:

$$A_2 = \sqrt{d^2 - 9H^2}. \quad (28)$$

Рассматриваем третье уравнение системы (9), которое представляем в следующем виде:

$$A_1 + 2A_2 = 2\lambda_1 H + 18\lambda_2 H + 3b_1. \quad (29)$$

В последнее равенство подставим выражения для множителей Лагранжа, получим:

$$A_1 + 2A_2 = \frac{H^2}{A_1} + 18\frac{H^2}{A_2} + 3b_1. \quad (30)$$

Из равенства (30) можно определить ширину наружной пласти первой пары досок:

$$b_1 = \frac{1}{3} \left(A_1 + 2A_2 - H^2 \left(\frac{1}{A_1} + \frac{18}{A_2} \right) \right). \quad (31)$$

Определив ширину наружной пласти первой пары досок, толщину первой пары досок можно определить из уравнения связи (4) по формуле:

$$T_1 = \frac{1}{2} \left(\sqrt{d^2 - b_1^2} - 3H \right). \quad (32)$$

Зная ширину боковой доски, толщину ее можно определить из уравнения связи. Толщина второй пары боковых досок:

$$T_2 = \frac{1}{2} \left(\sqrt{d^2 - b_2^2} - (3H + 2T_1) \right). \quad (33)$$

Толщина третьей пары боковых досок:

$$T_3 = \frac{1}{2} \left(\sqrt{d^2 - b_3^2} - (3H + 2T_1 + 2T_2) \right). \quad (34)$$

Толщина четвертой пары боковых досок:

$$T_4 = \frac{1}{2} \left(\sqrt{d^2 - b_4^2} - (3H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3) \right). \quad (35)$$

Таким образом, рассмотрены все уравнения системы (9) и учтены все уравнения связи. Получены формулы, в которых размеры брусьев и досок взаимосвязаны. Анализируя эти формулы, можно сделать вывод, что определить непосредственно оптимальные размеры брусьев и досок не представляется возможным. В связи с этим для определения оптимальных размеров брусьев и досок воспользуемся численным методом [1]. Для упрощения решения данной задачи расчеты производятся в относительных единицах, полагая $m_H = \frac{H}{d}$.

Алгоритм решения задачи. Относительная ширина центрального бруса:

$$m_{A_1} = \frac{A_1}{d} = \sqrt{1 - m_H^2}. \quad (36)$$

Относительная ширина наружной пласти бокового бруса:

$$m_{A_2} = \frac{A_2}{d} = \sqrt{1 - 9m_H^2}. \quad (37)$$

Относительная ширина первой пары боковых досок:

$$m_{b_1} = \frac{b_1}{d} = \frac{1}{3} \left(m_{A_1} + 2m_{A_2} - m_H^2 \left(\frac{1}{m_{A_1}} + \frac{18}{m_{A_2}} \right) \right). \quad (38)$$

Относительная толщина первой пары боковых досок:

$$m_{T_1} = \frac{T_1}{d} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 - m_{b_1}^2} - 3m_H \right). \quad (39)$$

Относительная ширина второй пары боковых досок:

$$m_{b_2} = \frac{b_2}{d} = m_{b_1} - \frac{2m_{T_1}}{m_{b_1}} (3m_H + 2m_{T_1}). \quad (40)$$

Относительная толщина второй пары боковых досок:

$$m_{T_2} = \frac{T_2}{d} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 - m_{b_2}^2} - (3m_H + 2m_{T_1}) \right). \quad (41)$$

Относительная ширина третьей пары боковых досок:

$$m_{b_3} = \frac{b_3}{d} = m_{b_2} - \frac{2m_{T_2}}{m_{b_2}} (3m_H + 2m_{T_1} + 2m_{T_2}). \quad (42)$$

Относительная толщина третьей пары боковых досок:

$$m_{T_3} = \frac{T_3}{d} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 - m_{b_3}^2} - (3m_H + 2m_{T_1} + 2m_{T_2}) \right). \quad (43)$$

Относительная ширина четвертой пары боковых досок:

$$m_{b_4} = \frac{b_4}{d} = m_{b_3} - \frac{2m_{T_3}}{m_{b_3}} (3m_H + 2m_{T_1} + 2m_{T_2} + 2m_{T_3}). \quad (44)$$

Относительная толщина четвертой пары боковых досок

$$m_{T_4} = \frac{T_4}{d} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 - m_{b_4}^2} - (3m_H + 2m_{T_1} + 2m_{T_2} + 2m_{T_3}) \right). \quad (45)$$

Относительная площадь поперечных сечений брусьев:

$$Z_{\text{бр}} = m_H (m_{A_1} + 2m_{A_2}). \quad (46)$$

Относительная площадь поперечных сечений боковых досок:

$$Z_{\text{д}} = 2 (m_{T_1} m_{b_1} + m_{T_2} m_{b_2} + m_{T_3} m_{b_3} + m_{T_4} m_{b_4}). \quad (47)$$

Суммарная площадь поперечных сечений брусьев и досок:

$$Z = Z_{\text{бр}} + Z_{\text{д}}. \quad (48)$$

Расчеты производятся в два этапа. Вначале задаем толщиной бруса с градацией 0,01 в пределах 0,1...0,18 от диаметра бревна и определяем все размеры брусьев и досок, а также величину целевой функции, и находим ее максимальное значение. Далее задаем толщиной бруса с точностью до 0,001 и определяем вокруг ранее полученного максимального значения целевой функции все размеры брусьев и досок, а также величину целевой функции. На основании расчетов находим максимальное значение целевой функции, которое и принимаем за оптимальное решение задачи.

Результаты исследований. Результаты расчетов представлены в табл. 1.

Таблица 1

Оптимальные относительные размеры брусьев и досок и значение целевой функции

m_H	m_{A_1}	m_{A_2}	m_{b_1}	m_{T_1}	m_{b_2}	m_{T_2}	m_{b_3}	m_{T_3}	m_{b_4}	m_{T_4}	$Z_{\text{бр}}$	$Z_{\text{д}}$	Z
0,139	0,99	0,909	0,802	0,090	0,668	0,073	0,504	0,059	0,299	0,045	0,390	0,330	0,720

Данные табл. 1 показывают, что целевая функция принимает максимальное значение при . Сумма толщин всех трех брусьев составит 0,417, а толщины досок изменяются в пределах 0,09...0,045. Объем получаемых досок при такой схеме раскроя

пиловочника немного меньше, чем объем брусьев. Пифагорическая зона в этом случае составляет 0,954.

С целью анализа рационального использование такой схемы раскроя пиловочника приводим в табл. 2 расчеты оптимальных размеров брусьев и досок для различных диаметров.

Таблица 2

Оптимальные расчетные размеры брусьев и досок для различных диаметров бревен

Обозначение параметров брусьев и досок	Размеры брусьев и досок для диаметров бревен, см											
	60	64	68	72	76	80	84	88	92	96	100	

H	8,34	8,89	9,45	10	10,56	11,12	11,68	12,23	12,79	13,34	13,9
A_1	59,42	63,38	63,34	71,3	75,26	79,22	83,18	87,15	91,12	95,07	99,03
A_2	54,5	58,1	61,8	65,4	69	72,7	76,3	79,9	83,6	87,2	90,8
b_1	48,12	51,33	54,54	57,74	60,1	64,1	67,4	70,6	73,8	77	80,2
T_1	5,41	5,77	6,13	6,49	6,85	7,21	7,57	7,93	8,3	8,66	9,02
b_2	40,1	42,7	54,4	48,1	50,7	53,4	56,1	58,7	61,4	64,1	66,8
T_2	4,41	4,71	5,0	5,3	5,6	5,88	6,18	6,47	6,77	7,06	7,36
b_3	30,22	32,23	34,2	36,3	38,3	40,3	42,3	44,3	46,3	48,3	50,4
T_3	30,2	32,2	34,2	36,2	38,3	40,3	42,3	44,3	46,3	48,3	50,3
b_4	17,9	19,1	20,3	21,5	22,7	23,9	25,1	26,3	27,5	28,7	29,9
T_4	2,71	2,89	3,07	3,26	3,44	3,62	3,8	3,99	4,16	4,34	4,52

Выводы

Результаты расчетов показывают, что брусья толщиной 100...125 мм получаются при раскросе пиловочника диаметром 72...92 см. При этом толщины досок изменяются в пределах 32...75 мм. Такой вариант раскроса пиловочника может удовлетворять потребности определенной группы размеров пиломатериалов.

Таким образом, впервые аналитическим путем определены оптимальные размеры брусьев и досок для схемы раскроса пиловочника больших размеров с выпиливанием трех брусьев одинаковой толщины и четырех пар боковых досок.

Подтверждается ранее принятая гипотеза о возможности такого сочетания размеров брусьев и досок, при котором целевая функция принимает максимальное значение. Было также отмечено, что целевая функция при изменении относительной толщины бруса изменяется плавно. Это изменение целевой функции не столь значительно в диапазоне изменения $m_H = 0,13...0,15$. Следовательно, при расчете и составлении поставок толщину бруса можно выбирать в этом диапазоне, а размеры досок затем следует определять по предлагаемым формулам. Полученное оптимальное соотношение размеров

брусьев и досок, а также предлагаемые формулы рекомендуется использовать при расчете и составлении поставок.

Литература

1. Агапов А.И. Оптимизация брусово-развального способа раскроса пиловочника с выпиливанием двух брусьев. Киров, ВятГУ, 2011. 77 с.
2. Ветшева В.Ф. Показатели использования крупномерных бревен при распиловке их с брусковкой на один, два и три бруса разной толщины // Деревообрабатывающая промышленность. 1971, № 7. С. 10-13.
3. Ветшева В.Ф. Раскрой крупномерных бревен на пиломатериалы. М.: Лесная промышленность, 1976. 168 с.

References

1. Agapov A.I. Optimizing lumber-cutting method breakup bundled with two sawing logs. Kirov, Vyatka State University, 2011. 77.
2. Vetsheva V.F. The utilization of large-sized logs when cutting them with brusovkoy one, two and three beams of different thickness // Wood. 1971, № 7. Pp. 10-13.
3. Vetsheva V.F. Krunpomernyh Sawing logs for lumber. M.: Forest Industry, 1976. 168.