

УДК 534.01; 622.24.053

## Детерминированный хаос дисковой заглаживающей машины при кубической характеристике сил сухого трения

С.В. Белокобыльский<sup>a</sup>, В.А. Коронатов<sup>b</sup>, С.Н. Герасимов<sup>c</sup>

Братский государственный университет, Макаренко 40, Братск, Россия

<sup>a</sup>rektor@brstu.ru, <sup>b</sup>kortavik@mail.ru, <sup>c</sup>adm\_gerasimov@rambler.ru

Статья поступила 13.02.2014, принята 16.05.2014

*Путем численного интегрирования дифференциальных уравнений описывался переходной режим автоколебаний динамической модели дисковой заглаживающей машины. Изучался релаксационный режим, когда на периоде фрикционных крутильных автоколебаний скольжение диска чередуется длительными остановками (заклиниванием) за счет влияния сил сухого трения, имеющих кубическую характеристику. При этом на этапе проскальзывания допускались возможности мгновенной смены направления вращения диск (перескоки). Данная неавтономная динамическая система приводится к автономной путем ввода дополнительной переменной. Строятся фазовые траектории в трехмерном пространстве и в проекции на плоскость. Результаты численного счета показали, что в зависимости от параметров системы при сделанных допущениях дисковая заглаживающая машина может входить либо в устойчивый периодический режим автоколебаний, либо в режим детерминированного хаоса. В первом случае в фазовом пространстве областью притяжения фазовых траекторий является регулярный аттрактор, а во втором – странный аттрактор. Получена новая динамическая модель, приводящая к возникновению детерминированного хаоса.*

**Ключевые слова:** автоколебания, фрикционные, крутильные, релаксационный, переходной режим, сухое трение, кубическая характеристика, одномассовая модель, регулярный, странный, аттрактор, детерминированный хаос, фазовые траектории, фазовое пространство, дисковая заглаживающая машина.

## Determined chaos of a disk-shaped smoothing machine under cubic features of dry friction forces

S.V. Belokobylsky<sup>a</sup>, V.A. Koronotov<sup>b</sup>, S.N. Gerasimov<sup>c</sup>

Bratsk State University, 40 Makarenko St., Bratsk, Russia

<sup>a</sup>rektor@brstu.ru, <sup>b</sup>kortavik@mail.ru, <sup>c</sup>adm\_gerasimov@rambler.ru

Received 13.02.2013, accepted 16.05.2014

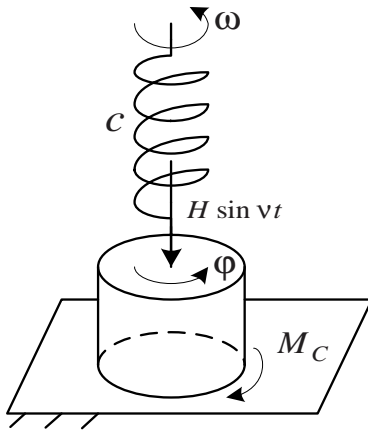
*Transition mode of a self-excited dynamic model of a disk-shaped smoothing machine has been described by means of numerical integration of differential equations. Relaxation mode, when disk sliding takes turn with longtime stops (wedging action) because of the influence of dry friction forces under cubic features and on the period of self-excited frictional torsional oscillations, has been studied. Possibilities of immediate change of disk direction, while sliding, have been taken into consideration. A new dynamic model, causing determined chaos, has been received. The results of numerical calculations have shown that, depending on the system parameters, under the assumptions made, disk-shaped smoothing machine can go either stable periodic regime of self-oscillations or mode of determined chaos. In the first case, in the phase space, the area of attraction of the phase trajectories is a regular attractor, while the second is a strange attractor.*

**Ключевые слова:** self-excited oscillations, frictional, torsional, relaxation, transition mode, dry friction, cubic feature, single-mass model, regular, strange, attractor, determined chaos, phrasal path of motion, phrasal space, disk-shaped smoothing machine.

**Введение.** В последнее время повышенное внимание привлекают динамические системы, при работе которых возникает детерминированный хаос. У таких систем малое изменение начальных условий приводит к значительному изменению решений дифференциальных уравнений движения на достаточно большом промежутке времени. Такое часто происходит при описании реальных систем, поскольку начальные условия задаются с некоторой погрешностью. Поведение динамической системы становится непредсказуемым, т.е.

проявляется детерминированный хаос. Обнаружение таких новых систем вызывает определенный интерес.

**Описание модели.** Работа дисковой заглаживающей машины [1,3,4] моделируется одномассовой системой при наличии прижимного вибрационного воздействия  $H\sin(vt)$  на рабочий орган (диск) и сил вязкого, а также сухого трения со стороны обрабатываемой поверхности бетонной смеси (рис. 1).



**Рис. 1.** Динамическая модель дисковой заглаживающей машины

Вращение рабочего органа с постоянной угловой скоростью  $\omega$  сообщается посредством упругой связи жесткости  $c$  от двигателя неограниченной мощности. Предполагается, что коэффициент сил трения скольжения  $k$  имеет кубическую характеристику зависимости от угловой скорости вращения (рис. 2):

$$k = \begin{cases} k_1 \left\{ 1 - \frac{1}{2\omega_0} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \left| \frac{d\varphi}{dt} \right| \left[ 3 - \frac{1}{\omega_0^2} \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] \right\} \times \\ \times \operatorname{sgn} \frac{d\varphi}{dt}, \text{ npu } \frac{d\varphi}{dt} \neq 0; \\ -k_1 \leq k \leq k_1 \text{ npu } \frac{d\varphi}{dt} \equiv 0. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $\varepsilon = \frac{k_1}{k_0} > 1$ . Момент сопротивления  $M_c$  складывается из моментов сил сухого и вязкого трения, определяемых по следующим формулам:

$$M_{\text{сyx}} = k \frac{2}{3} mgR \left( 1 + \frac{H}{mg} \sin(vt) \right), \quad M_{\text{вязк}} = \mu \frac{\pi R^4}{2} \frac{d\varphi}{dt}, \quad (2)$$

где  $m, R, g, v, H, \mu$  – соответственно масса и радиус заглаживающего диска, ускорение свободного падения, частота и амплитуда вибрационного воздействия, коэффициент вязкого трения.

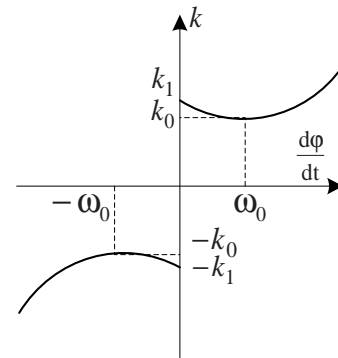
### Постановка и решение задачи

Переходя от размерных переменных ( $t, \varphi$  – времени и угла поворота диска) к безразмерным:

$$\tau = \sqrt{\frac{c}{I}} t, \quad \xi = \frac{c}{M_1} (\varphi - \omega t)$$

( $M_1$  – предельное значение момента сухого трения при заклинивании диска;  $I$  – момент инерции диска), а также к безразмерным параметрам:

$$\Omega = \frac{\sqrt{Ic}}{M_1} \omega; \quad b = \mu \frac{\pi R^4}{2} \frac{1}{\sqrt{Ic}}, \quad h = \frac{H}{mg}, \quad p = v \sqrt{\frac{I}{c}},$$



**Рис. 2.** Кубическая характеристика сил сухого трения

запишем дифференциальное уравнение скольжения диска сразу в безразмерном виде:

$$\ddot{\xi} = -\xi - 2b(\dot{\xi} + \Omega) + (1 + h \sin(p\tau)) \times \\ \times \left\{ 1 - \frac{1}{2\Omega_0} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \left| \dot{\xi} + \Omega \right| \left[ 3 - \left( \frac{\dot{\xi} + \Omega}{\Omega_0} \right)^2 \right] \right\} \operatorname{sgn}(\dot{\xi} + \Omega), \quad (3)$$

нпу  $\dot{\xi} \neq -\Omega$ .

Здесь дифференцирование по безразмерному времени обозначено точкой.

Моменты мгновенного изменения направления вращения диска (мгновенные перескоки) находятся из условия:

$$\dot{\xi} = -\Omega, \quad |\dot{\xi}| > |1 + h \sin(p\tau)|, \quad (4)$$

а моменты окончания скольжения – из условия:

$$\dot{\xi} = -\Omega, \quad |\dot{\xi}| \leq |1 + h \sin(p\tau)|. \quad (5)$$

При заклинивании диска ( $\dot{\xi} \equiv -\Omega$ ) должно выполняться:

$$|\dot{\xi}| < |1 + h \sin(p\tau)|; \quad (6)$$

моменты срыва (начало скольжения) определяются из условия:

$$|\dot{\xi}| \geq |1 + h \sin(p\tau)|. \quad (7)$$

Сформулированная задача является нелинейной и не решается аналитически. Заметим, что для принятой модели при отсутствии вибрационной силы и сил вязкого трения, а также при учете скачкообразной характеристики сил сухого трения ранее были получены точные аналитические решения [2]. Исследование переходного релаксационного режима фрикционных автоколебаний диска проводилось численно. Результаты численных экспериментов показали, что, в зависимости от параметров, система либо входит в устойчивый периодический режим (обычно это происходит быстро), либо устанавливается детерминированный хаос, т. е. фазовые траектории притягиваются в ограниченное

фазовое пространство – область притяжения странного аттрактора.

Фазовое пространство системы трехмерно, так как состояние системы определяется через координаты:  $\xi, \xi', \tau$ . Данная неавтономная система приводится к автономной, если ввести дополнительную переменную  $\eta = \sin(\Omega\tau)$ , в этом случае фазовое пространство будет определяться через координаты:  $\xi, \xi', \eta$ . Система зависит от параметров:  $\epsilon, \Omega, \Omega_0, b, h, p$ . Ниже для сравнения приведены два примера периодических режимов (рис. 3-6) и четыре примера детерминированного хаоса

релаксационных автоколебаний (рис.7-14) принятой динамической модели.

Наибольший интерес представляют режимы детерминированного хаоса, так как последние мало изучены, и обнаружить их не так просто. Каждая новая система, приводящая к возникновению детерминированного хаоса, обычно заносится в своеобразный каталог [5]. Для данной механической системы, подбирая параметры, можно строить различные виды хаоса, в том числе и похожие друг на друга (фрактальные).

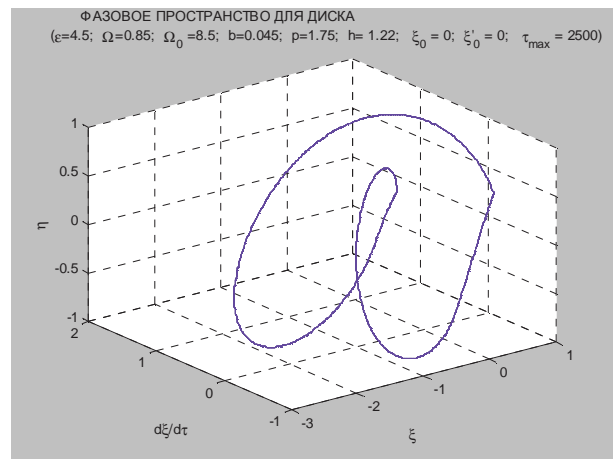
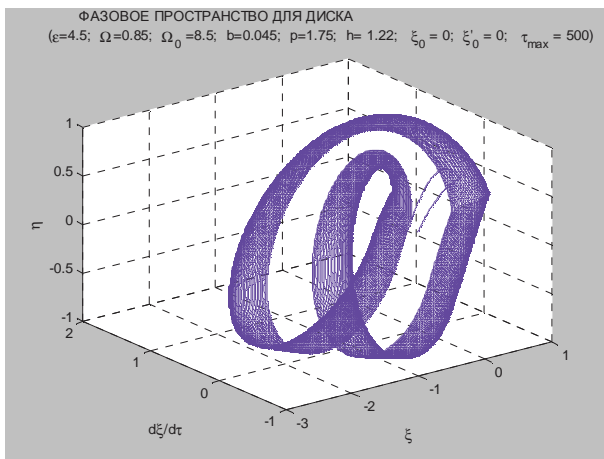


Рис. 3. Пример 1 периодических автоколебаний (начало и окончание переходного режима)

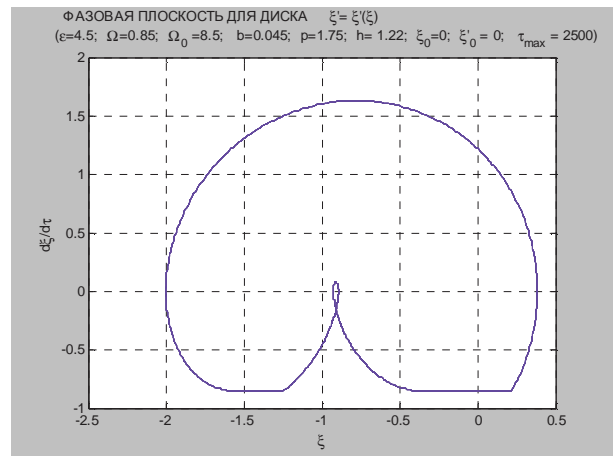
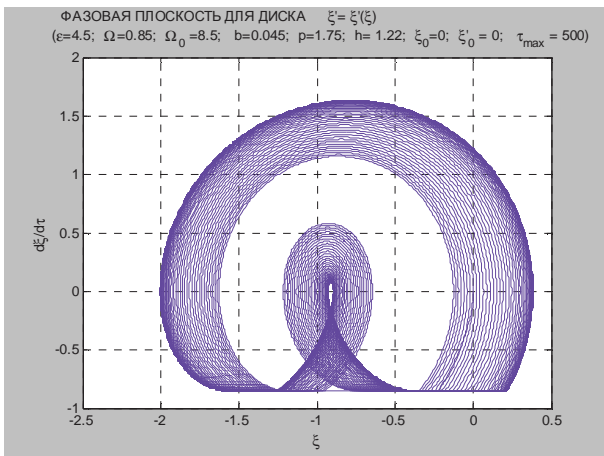


Рис. 4. Пример 1 периодических автоколебаний (начало и окончание переходного режима)

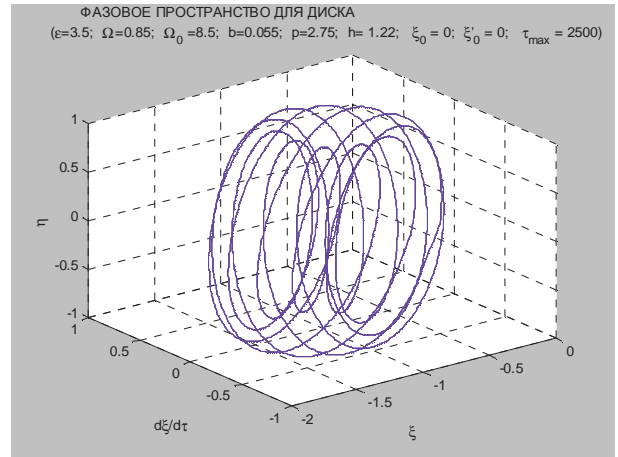
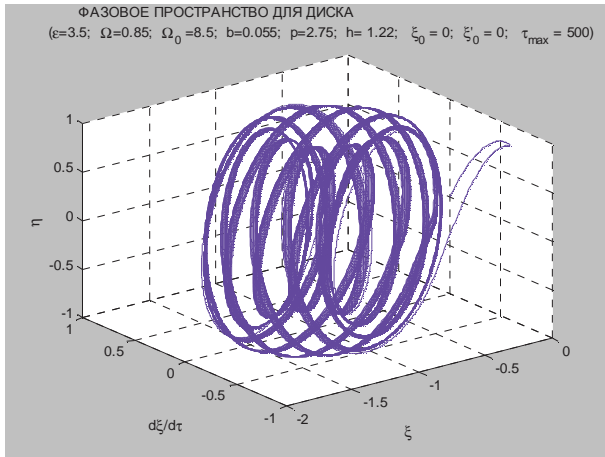


Рис. 5. Пример 2 периодических автоколебаний (начало и окончание переходного режима)

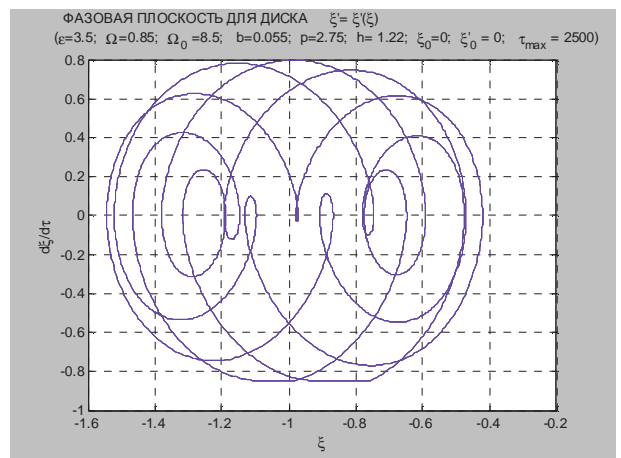
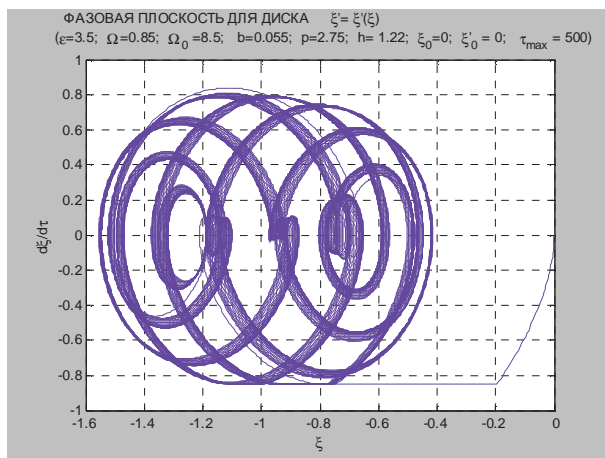


Рис. 6. Пример 2 периодических автоколебаний (начало и окончание переходного режима)

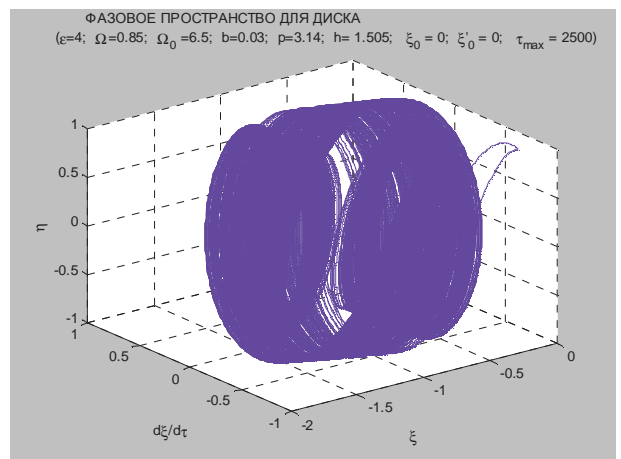
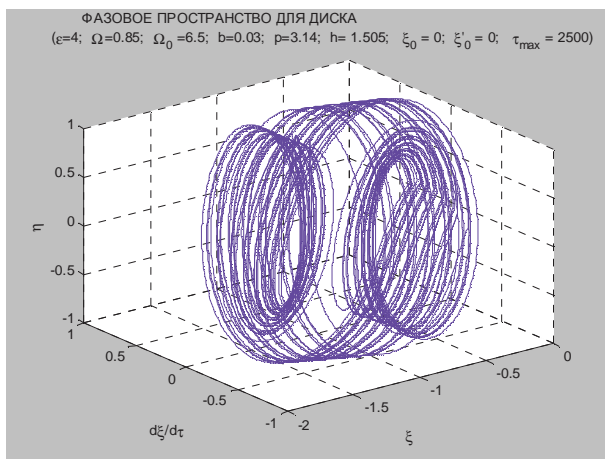


Рис. 7. Пример 1 детерминированного хаоса (заключительные и все витки фазовой траектории)

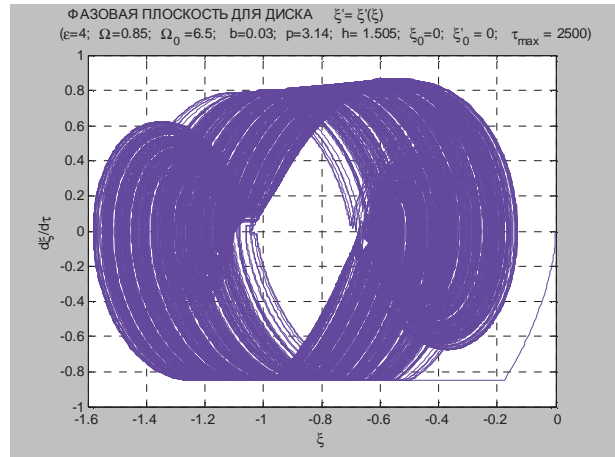
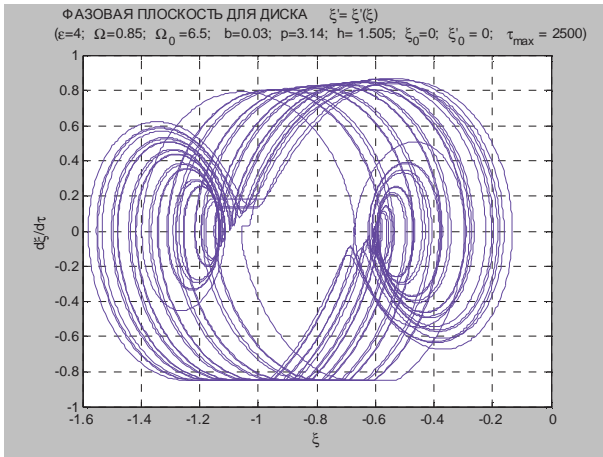


Рис. 8. Пример 1 детерминированного хаоса (заклчительные и все витки фазовой траектории)

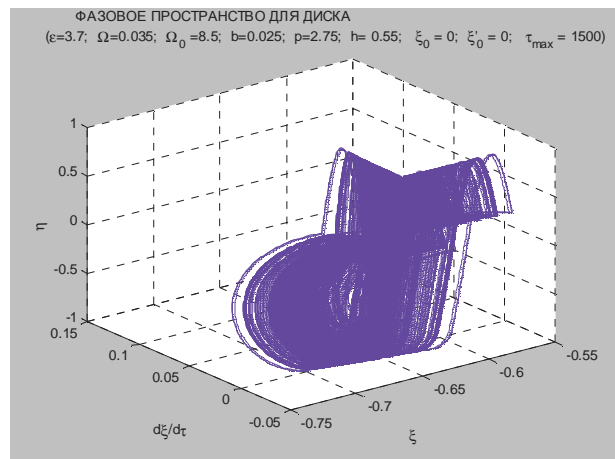
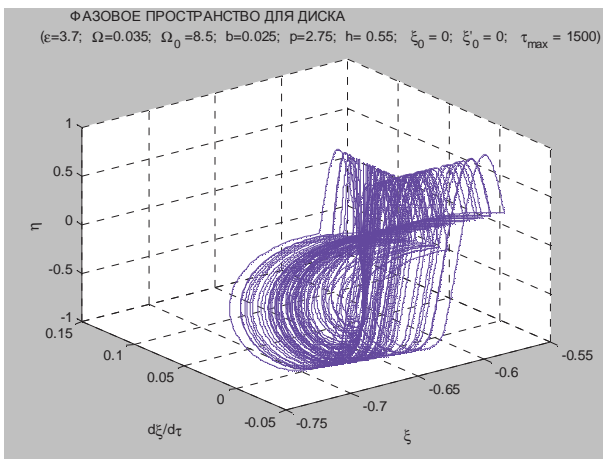


Рис. 9. Пример 2 детерминированного хаоса (заклчительные и все витки фазовой траектории)

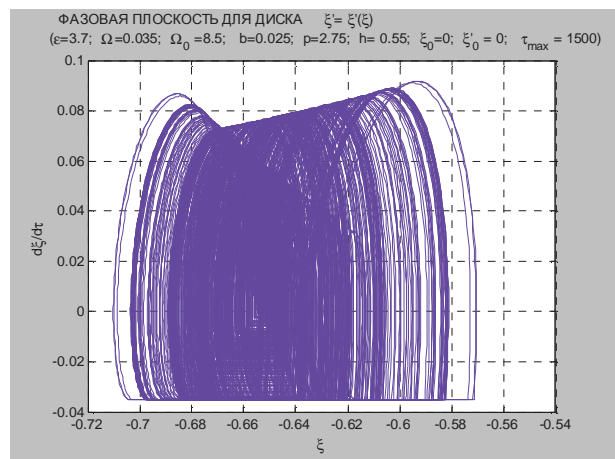
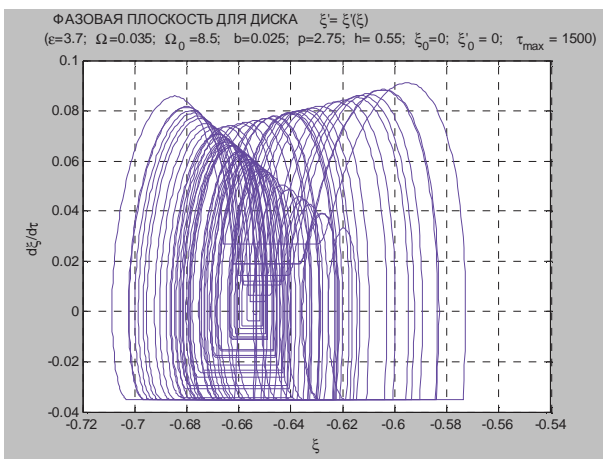


Рис. 10. Пример 2 детерминированного хаоса (заклчительные и все витки фазовой траектории)

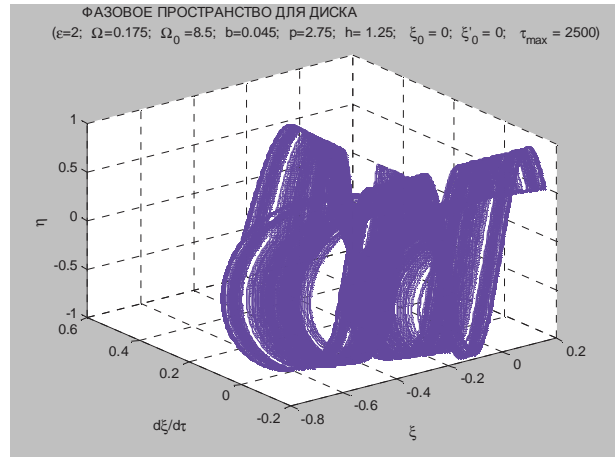
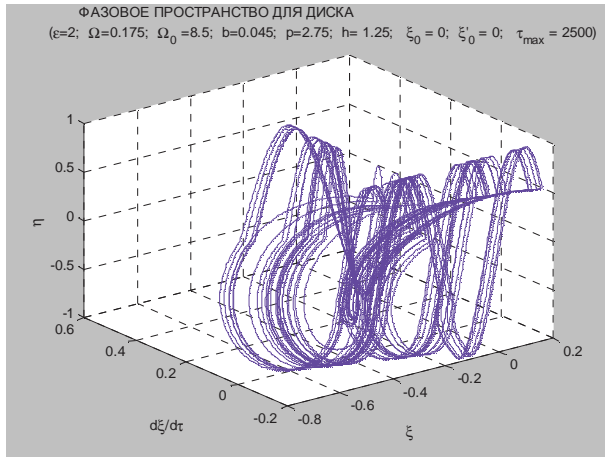


Рис. 11. Пример 3 детерминированного хаоса (заклчительные и все витки фазовой траектории)

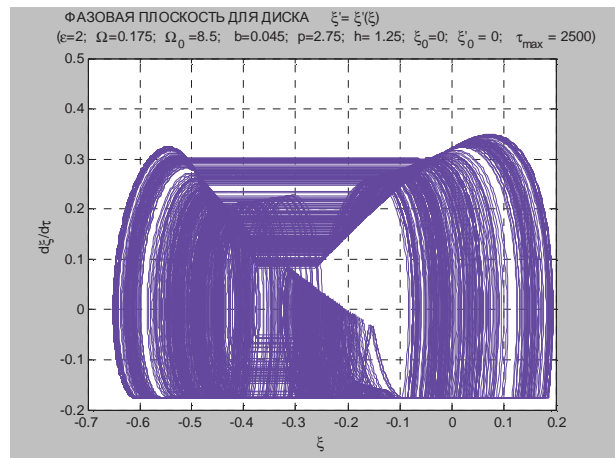
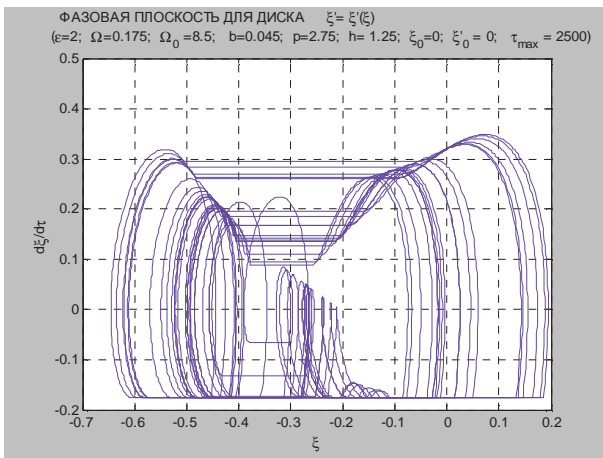


Рис. 12. Пример 3 детерминированного хаоса (заклчительные и все витки фазовой траектории)

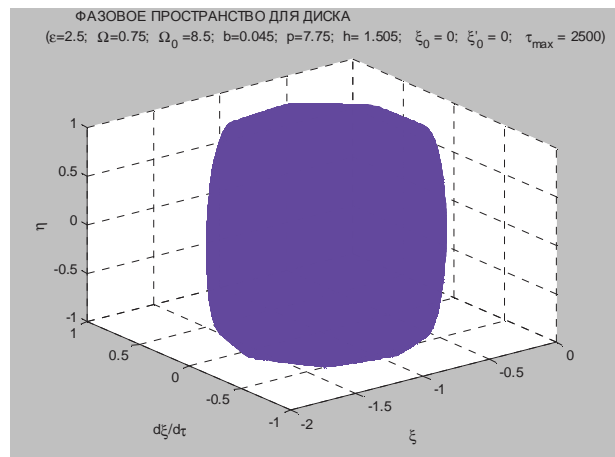
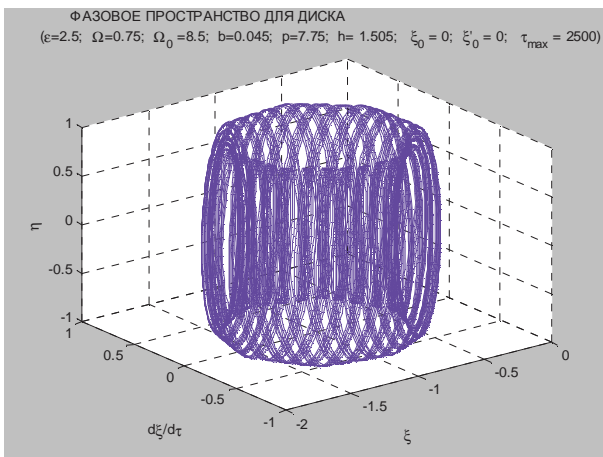


Рис. 13. Пример 4 детерминированного хаоса (заклчительные и все витки фазовой траектории)

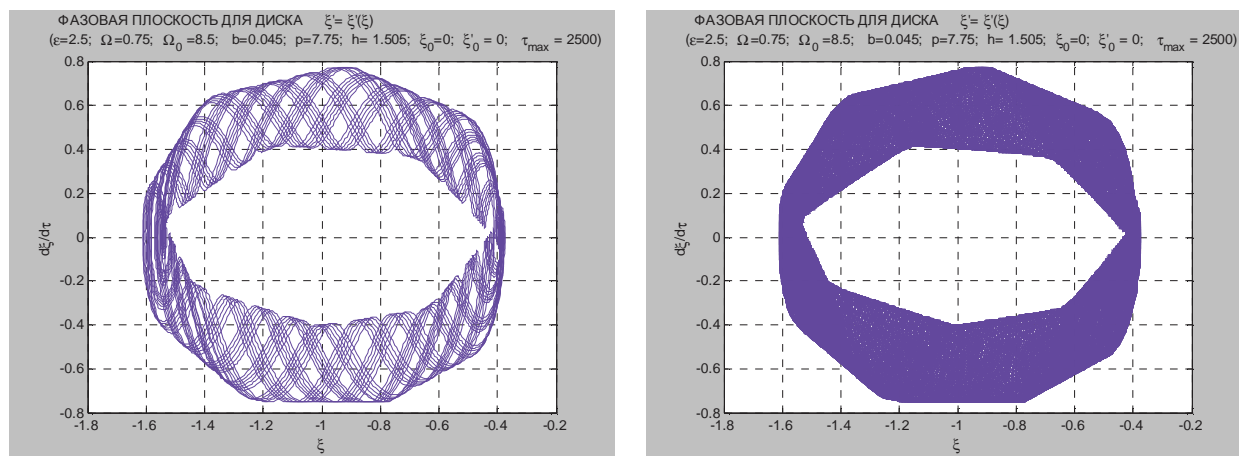


Рис. 14. Пример 4 детерминированного хаоса (заклочительные и все витки фазовой траектории)

На графиках (рис. 3-14) для каждого приведенного примера набора параметров динамической системы сначала показано поведение фазовых траекторий в трехмерном пространстве  $(\xi, \dot{\xi}, \eta)$ , а затем в проекции на плоскость  $(\xi, \dot{\xi})$ . На каждом рис. 3-7 примеров периодических автоколебаний показано по два графика: на первом – переходной режим, а на втором – установившийся периодический режим в виде регулярного аттрактора. На каждом рис. 7-14 примеров детерминированного хаоса показано тоже по два графика: на первом – результаты счета в виде заклочительных витков фазовой траектории, а на втором – все витки фазовой траектории. Первый график рисунка позволяет более отчетливо видеть динамику изменения фазовой траектории. На втором графике рисунка все витки фазовой траектории очень плотно прилегают друг к другу, создавая иллюзию сплошного заполнения ограниченной части фазового пространства – области притяжения странного аттрактора.

### Выводы

В отличие от обычных систем, для систем с релаксационными режимами обнаружение хаоса можно фиксировать не только по поведению фазовых траекторий, но и по нестабильности длительностей зон скольжения и заклинивания. При вхождении в периодический режим автоколебаний временные интервалы зон скольжения и заклинивания повторяются.

Приведенные примеры наглядно показывают, что найдена новая механическая система, в которой в режиме релаксационных автоколебаний может наблюдаться детерминированный хаос.

### Литература

1. Белокобыльский С.В., Коронатов В.А., Герасимов С.Н. Динамика взаимодействия дисковой заглаживающей машины с бетонными смесями. Братск: Изд-во БрГУ, 2014. 67 с.
2. Белокобыльский С.В., Коронатов В.А. Фрикционные автоколебания одномассовой системы с учетом возможности мгновенной смены знака скорости на противоположный // Системы. Методы. Технологии. 2013, № 1. С. 16-21.
3. Герасимов С.Н., Коронатов В.А., Вельш Н.В. Дисковый рабочий орган бетоноотделочной машины с фрикционными автоколебаниями // Труды Братского государственного университета. Серия: Естественные и инженерные науки. 2013. Т. 1. С. 104-106.
4. Мамаев Л.А., Коронатов В.А., Белокобыльский С.В., Герасимов С.Н. Рабочий орган заглаживающей машины: пат. № 2182536 Рос. Федерация. № 2000116313/03; заявл. 20.06.2000; опубл. 20.05.2002 г.; Бюл. № 14.
5. Спротт Дж. К. Элегантный хаос. Алгебраические простые хаотические потоки. М. Ижевск: Ижевский институт компьютерных исследований, 2012. 328 с.

### References

1. Belokobylsky S.V., Koronotov V.A., Gerasimov S.N. Dynamics of interaction of a disk-shaped smoothing machine with concrete mixes. Bratsk: Izd-vo BrGU, 2014. 67 p.
2. Belokobylsky S.V., Koronotov V.A. Self-excited frictional oscillations of a single-mass system with immediate change of a speed sign on a contrary one // Sistemy. Metody. Tehnologii. 2013, № 1. P. 16-21.
3. Gerasimov S.N., Koronotov V.A., Velsh N.V. Disk-shaped working element of a concrete finishing machine with self-excited frictional oscillations // Trudy Bratskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Estestvennye i inzhenernye nauki. 2013. Vol. 1. P. 104-106.
4. Mamaev L.A., Koronotov V.A., Belokobylsky S.V., Gerasimov S.N. Movable object of smoothing machine: pat. № 2182536 Rus. Federation. № 2000116313/03; decl. 20.06.2000; publ. 20.05.2002; Bul. № 14.
5. Sprott Dzh. K. Elegant chaos. Simple disordered algebraic flows. M. Izhevsk: Izhevskij institut komp'juternyh issledovanij, 2012. 328 s.