

7. Макаров Е. Инженерные расчеты в Mathcad 14. СПб.: Питер, 2007. 592 с.
8. Уплотнительное соединение: пат. 2129681 Рос. Федерация. № 97101302/06; заявл. 30.01.97; опубл. 27.04.99. Бюл. 32. 4 с.
9. Авиационный газотурбинный двигатель: пат. 2162975 Рос. Федерация. № 98100457/06; заявл. 06.01.98; опубл. 10.02.01. 2 с.
10. Долотов А.М., Котылев Ю.Е., Семенов С.Н., Ушаков Л.С. Затвор клапана: пат. 2186276 Рос. Федерация. № 2000114115/06 заявл. 02.06.00; опубл. 27.07.02. Бюл. № 8. 4 с.
11. Пономарев С.Д., Бидерман В.Л., Лихарев К.К., Макушин В.Д., Малинин Н.Н., Феодосьев В.И. Расчеты на прочность в машиностроении. М., 1958. 975 с.

References

1. Dolotov A.M., Ogar P.M., Chegodaev D.E. The theory basics and design of aircraft hydropneumatic valve sealings. M.: Izd-vo MAI, 2000. 296 s.
2. Dolotov A.M., Belogolov Yu.I. The stress-strain state of a thin-walled valve seat of a lower stiffness// *Sovremennye tekhnologii. Sistemy analiz. Modelirovaniye*. 2011. № 4 (32). S. 62 - 65.
3. Dolotov A.M., Gozbenko V.E., Belogolov Yu.I. Sealing connections using thin-walled elements. Irkutsk, 2011. 72 s. Dep. V VINITI-22.11. 2011, № 508-V2011.

4. Dolotov A.M. Development of the calculation methods and design of the seals with shell elements for aircrafts: dis. ... dok. tekhn. nauk. M., 1994. 280 s.
5. Dolotov A.M., Belogolov Yu.I. The determination of stiffness characteristics of the shell-plate valve seat// *Truboprovodny transport: teoriya i praktika: sb. st. M.*, 2013 № 3 (37). S. 32-37.
6. Dolotov A.M., Belogolov Yu.I. The stiffness model of a shell-plate seat// *Sovremennye tekhnologii. Sistemy analiz. Modelirovaniye*. 2013. № 2 (38). S. 107 - 110.
7. Makarov E.A. Engineering calculations in Mathcad 14. SPb.: Piter, 2007. 592 s.
8. Sealing joint: pat. 2129681 Ross. Federatsiya. № 97101302/06; yayavl. 30.01.1997, opubl. 27.04.1999. Byul. № 32. 4 s.
9. Aviation turbine engine: pat. 2162975 Ross. Federatsiya. № 98100457/06; yayavl. 06.01.1998, opubl. 10.02.2001. 2 s.
10. Dolotov A.M., Kotylev Yu.E., Semenyuk S.N., Ushakov L.S. Valve plug: pat. 2186276 Ross. Federatsiya. № 2000114115/06; yayavl. 02.06.2000, opubl. 27.07.2002. Byul. № 8. 4 s.
11. Ponomarev S.D., Biederman V.L., Likharev K.K., Maku-shin V.M., Malinin N.N., Feodos'yev V.I. Stressing calculations in engineering. M., 1958. 957 s.

УДК 621.01:621.81:621:891

Учет характеристик упрочняемого материала при применении эмпирического закона Майера

П.М. Огар^a, В.А. Тарасов^b, Д.Б. Горохов^c, А.В. Турченко^d

Братский государственный университет, ул. Макаренко 40, Братск, Россия
^aogar@brstu.ru, ^bTV-post@yandex.ru, ^cdenis_gorohov@mail.ru, ^dturchenko1986@yandex.ru
 Статья поступила 10.09.2013, принята 5.11.2013

Предложена методика определения контактных характеристик в зависимости от свойств упругопластического материала со степенным законом упрочнения Холломона (Hollomon's power law): $\epsilon_y = \sigma_y / E^$ и экспоненты упрочнения n . При этом использован эмпирический закон Майера, связывающий усилие при вдавлении сферы с диаметром отпечатка d . Изначально закон Майера не связан с механическими характеристиками испытываемого материала. В исследованиях использованы зависимости взаимосвязи экспоненты упрочнения n константой закона Майера m , полученные С.И. Булычевым. Для учета эффектов «sink-in/pile-up» использован параметр $c^2 = h_c/h$, где h_c – глубина, по которой происходит контакт сферы, h – глубина внедрения от уровня исходной поверхности. Определены границы применения предложенных выражений. Указано на отсутствие необходимости определения констант закона Майера. Приведено сравнение полученных результатов с опубликованными результатами конечно-элементного анализа по внедрению сферы в упругопластическое упрочняемое полупространство.*

Ключевые слова: внедрение сферы, упругопластический контакт, упрочнение материала, экспонента упрочнения, закон Майера.

The account of hardening material characteristics in applying of Meyer's empirical law

P.M. Ogar^a, V.A. Tarasov^b, D.B. Gorokhov^c, A.V. Turchenko^d

Bratsk State University, 40 Makarenko St, Bratsk, Russia
^aogar@brstu.ru, ^bTV-post@yandex.ru, ^cdenis_gorohov@mail.ru, ^dturchenko1986@yandex.ru
 Received 10.09.2013, accepted 5.11.2013

The technique for determining the contact characteristics depending on the elastic-plastic material properties with Hollomon's hardening power law $\epsilon_y = \sigma_y / E^$ and the hardening exponent n has been proposed. Besides, Meyer's empirical law, which connects the*

force arising at indenting a sphere having indentation diameter d has been used. Initially, the Meyer law has not been associated with mechanical characteristics of the material being tested. The relationships between the hardening exponent n and the Meyer law's constant m developed by S.I. Bulychev have been used in the study. To take into account the «sink-in/pile-up» effects, the parameter $c^2 = h_c/h$ has been used, where h_c is the depth at which the sphere contact occurs, h is the indentation depth relative to the original surface level. The application limits of the proposed expressions have been defined. The lack of necessity to determine the Meyer law's constants has been shown. The comparison of the obtained and published results of the finite element analysis of sphere indentation into the elastic-plastic hardenable half-space has been produced.

Keywords: sphere indentation, elastic-plastic contact, hardening of material, hardening exponent, Meyer's law.

Введение. Для решения задач трибомеханики широко используется дискретная модель шероховатой поверхности, в которой микронеровности (далее – неровности) представлены сферическими сегментами, а распределение вершин неровностей соответствует опорной кривой. Одной из важных проблем при рассмотрении контакта отдельной неровности является необходимость учета упрочнения материала. Подход авторов к решению этой проблемы, получивший экспериментальное подтверждение, изложен в [1 – 3] и др. Суть метода заключается в использовании для описания упругопластического контакта: диаграммы кинетического индентирования, пластической твердости как характеристики сопротивления материала контактной пластической деформации, метода подобия деформационных характеристик. Пластическая твердость представляется в виде:

$$HD = K_h(\epsilon_y, n) \cdot \sigma_y,$$

где σ_y – предел текучести, $K_h(\epsilon_y, n)$ – параметр, определенный методом «двукратного вдавливания» с использованием опубликованных результатов конечно-элементного анализа [4].

В ряде работ [5, 6], в том числе в недавней работе [7], для учета упрочнения материала использовался эмпирический закон Майера, который устанавливает связь между усилием при вдавливании сферы и диаметром отпечатка. В работе [7] подчеркивается влияние индивидуальных физико-механических свойств реальных материалов на особенности формирования контактных упругопластических деформаций. Однако влияние таких индивидуальных характеристик упругопластического упрочняемого материала, как σ_y , E^* и n , исследовано не было, что является недостатком такого подхода.

Целью настоящей работы является использование вышеуказанных характеристик упрочняемого тела при применении закона Майера.

Решение задачи. В зарубежной литературе при описании упругопластического упрочняемого тела получил широкое распространение степенной закон Холломоны (Hollomon's power law), согласно которому связь между напряжениями и деформациями при однородном растяжении-сжатии описывается уравнениями:

$$\sigma = \begin{cases} \epsilon E, & \epsilon \leq \epsilon_y; \\ K \epsilon^n, & \epsilon > \epsilon_y; \end{cases} \quad (1)$$

где n – экспонента упрочнения.

Константа K находится из условия равенства σ при ϵ_y :

$$K = \epsilon_y^{1-n} E = \left(\frac{\sigma_y}{E} \right)^{1-n} E = \sigma_y^{1-n} E^n.$$

Тогда второе уравнение (1) можно представить в виде:

$$\frac{\sigma}{\sigma_y} = \left(\frac{E \epsilon}{\sigma_y} \right)^n = \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_y} \right)^n, \quad \epsilon > \epsilon_y, \quad (2)$$

где $\epsilon_y = \sigma_y / E$.

Экспоненту упрочнения можно определить, используя выражение (2):

$$n = \frac{\ln(\sigma_b / \sigma_y)}{\ln(\epsilon_p / \epsilon_y)}, \quad (3)$$

где σ_b – предел прочности, ϵ_p – предельная равномерная деформация, соответствующая σ_b .

Е. Майер первым описал поведение материала в упругопластической области, связывая нагрузку P с диаметром отпечатка d :

$$P = Ad^m, \quad (4)$$

который часто представляют в виде:

$$\frac{4P}{\pi d^2} = A^* \left(\frac{d}{D} \right)^{m-2} = A^* \left(\frac{a}{R} \right)^{m-2}, \quad (5)$$

где m , A , A^* – константы, причем A^* имеет размерность напряжения; $D = 2R$ – диаметр сферы, $d = 2a$.

Выражение в левой части представляет собой давление на площадке контакта, которое называют твердостью по Майеру:

$$\frac{4P}{\pi d^2} = \frac{P}{\pi a^2} = p_m = HM, \quad (6)$$

где a – радиус площадки контакта.

В работе [6] константу A^* связывают с максимальной твердостью по Майеру HM_{\max} , которая соответствует внедрению сферы до экватора, т. е. когда $d = D$. В этом случае $A^* = HM_{\max}$. Далее авторы связывают HM_{\max} с твердостью по Бринеллю HB .

Здесь следует отметить важный момент: в отличие от твердости по Майеру HM , которая при $0 \leq d/D \leq 1$

является монотонно возрастающей, твердость по Бринеллю HB в указанном диапазоне имеет максимальное значение при $d/D < 1$, т. е. выше определенная максимальная твердость по Майеру при $d = D$ соответствует максимальной твердости по Бринеллю HB_{\max} при другом соотношении d/D .

Рассмотрим этот момент подробней. По определению твердости по Бринеллю:

$$HB = \frac{P}{F} = \frac{2P}{\pi D^2 \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{d}{D} \right)^2} \right)}, \quad (8)$$

где F – площадь поверхности отпечатка.

Подставляя усилие из закона Майера, имеем:

$$HB = \frac{A^* \left(\frac{d}{D} \right)^2}{2 \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{d}{D} \right)^2} \right)} = \frac{0,5 A^* a_r^m}{1 - \sqrt{1 - a_r^2}}, \quad (9)$$

где $a_r = \frac{d}{D} = \frac{a}{R}$.

Обозначим:

$$\frac{2HB}{A^*} = H = H(a_r, m). \quad (10)$$

Тогда:

$$H(a_r, m) = \frac{A^* a_r^m}{1 - \sqrt{1 - a_r^2}}. \quad (11)$$

Для определения HB_{\max} производную $\frac{dH}{da_r}$ приравниваем к нулю:

$$\frac{dH(a_r, m)}{da_r} = 0. \quad (12)$$

Решением уравнения (12) является:

$$a_r^*(m) = \frac{\sqrt{m(m-2)}}{m-1}. \quad (13)$$

Значения a_r^* , при которых $HB_{\max} = HB \Big|_{a_r=a_r^*}$, представлены на рис. 1.

Подставляя полученные a_r в (11), имеем:

$$H(a_r^*(m), m) = m^{\frac{m}{2}} (m-1)^{1-m} (m-2)^{\frac{m-2}{2}} = k_m.$$

Тогда, с учетом (10):

$$\frac{2HB_{\max}}{A^*} = k_m, \quad A^* = 2HB_{\max} / k_m. \quad (14)$$

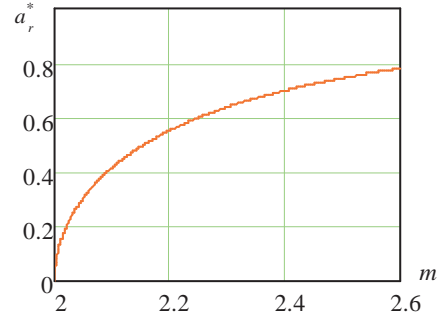


Рис. 1. Зависимость относительного радиуса площадки контакта a_r^* от m

Подставляя константу A^* в выражение (5) с учетом (6), имеем:

$$p_m = HM = \frac{2}{k_m} HB_{\max} \left(\frac{a}{R} \right)^{m-2}. \quad (15)$$

Из работы [8] следует, что

$$\sigma_B = k \cdot HB, \quad (16)$$

где $k = 0,333$ для углеродистых и перлитных низколегированных сталей, для других материалов значения k приведены в [8, табл. 1.2].

По данным С.И. Булычева [9, 10], предельная равномерная деформация ϵ_p , соответствующая σ_B , равна:

$$\epsilon_p = \frac{n}{1-n} = 0,961(m-2). \quad (17)$$

Отсюда:

$$m = 2 + \frac{1,041n}{1-n}. \quad (18)$$

Из выражения (16) с учетом (2) и (17) имеем:

$$HB = \frac{\sigma_y}{k} \left(\frac{n}{1-n} \right)^n \cdot \epsilon_y^{-n}. \quad (19)$$

Для усилия $P = \pi a^2 p_m$ с учетом (7), (8) и (19) получим:

$$P = 2\pi \frac{\sigma_y a^2}{k \cdot k_m} \left(\frac{n}{1-n} \right)^n \epsilon_y^{-n} \left(\frac{a}{R} \right)^{m-2}. \quad (20)$$

С учетом (18):

$$\frac{P}{E^* R^2} = \frac{2\pi}{k \cdot k_n} \left(\frac{n}{1-n} \right)^n \epsilon_y^{1-n} \left(\frac{a}{R} \right)^{\frac{2(1-0,48n)}{1-n}}, \quad (21)$$

где E^* – приведенный модуль упругости;

$$k_n = \left(\frac{2-0,959n}{1-n} \right)^{\frac{1-0,48n}{1-n}} \left(\frac{1+0,041n}{1-n} \right)^{\frac{1-0,041n}{n-1}} \left(\frac{1,041n}{1-n} \right)^{\frac{0,502n}{1-n}}.$$

Так как $a = \sqrt{2Rh_c} = \sqrt{2Rc^2h}$, где h_c – глубина, по которой происходит контакт сферы с полупространством, h – глубина внедрения от исходной поверхности, имеем:

$$\frac{P}{E^* R^2} = \frac{2\pi}{k \cdot k_n} \left(\frac{n}{1-n} \right)^n \epsilon_y^{1-n} \left(\frac{2c^2 h}{R} \right)^{\frac{1-0,48n}{(1-n)}}. \quad (22)$$

Параметр $c^2 = h_c/h$ можно определить согласно данным работы [11], в которой в результате конечно-элементного моделирования получено:

$$c^2 = c^2(\epsilon_y, n) = M^{\frac{2}{N}} (2h/R)^{\frac{2}{N}-1}, \quad (23)$$

где:

$$M = M(\epsilon_y, n) = \frac{(1,45 + 28,55n + 1745\epsilon_y)(1 - 0,5n + 20\epsilon_y)}{(1 + 21,4n + 1020\epsilon_y)(1 + 0,4n + 60\epsilon_y)},$$

$$N = N(\epsilon_y, n) = \frac{(1,9 + 12,5n + 570\epsilon_y)(1 + 0,1n)}{1 + 6,8n + 340\epsilon_y}.$$

Используя данные [8, табл. 1.2] и выражение (18), зависимость $k = k(n)$ можно аппроксимировать выражением:

$$k(n) = 0,280 + 0,888 n^{1,719}. \quad (24)$$

Это позволит рассчитывать усилия по выражениям (21) и (22) для различных материалов с известными физико-механическими свойствами. Важно определить пределы использования полученных выражений. Нижним пределом является $a_{ry} = a_y/R$, соответствующее ϵ_y . Согласно [10], при вдавливании сферы деформация описывается зависимостью:

$$\epsilon = \alpha \left(\frac{d}{D} \right)^\beta = \alpha \left(\frac{a}{R} \right)^\beta, \quad (25)$$

где:

$$\alpha = 0,15 + 1,85(m-2)^{1,4},$$

$$\beta = 1,18 \left[1 + (m-2)^{1,6} \right]$$

или, с учетом выражения (18):

$$\alpha = 0,15 + 1,85 \left(\frac{1,041n}{1-n} \right)^{1,4},$$

$$\beta = 1,18 \left[1 + \left(\frac{1,041n}{1-n} \right)^{1,6} \right].$$

Тогда:

$$\frac{a_y}{R} = \left(\frac{\epsilon_y}{\alpha} \right)^{\frac{1}{\beta}}, \quad (26)$$

а соответствующее усилие из выражения (21):

$$P_y(\epsilon_y, n) = P_y(\epsilon_y, n, a_{ry}). \quad (27)$$

Верхний предел определяется из условия:

$$h_c = c^2 h^* = 1$$

или, с учетом выражения (23), из уравнения:

$$\frac{h^*}{R} = \frac{2^{\frac{N(\epsilon_y, n)-1}{2}}}{M(\epsilon_y, n)}. \quad (28)$$

Соответствующее усилие определяется из выражения (22):

$$P^*(\epsilon_y, n) = P(\epsilon_y, n, h^*/R). \quad (29)$$

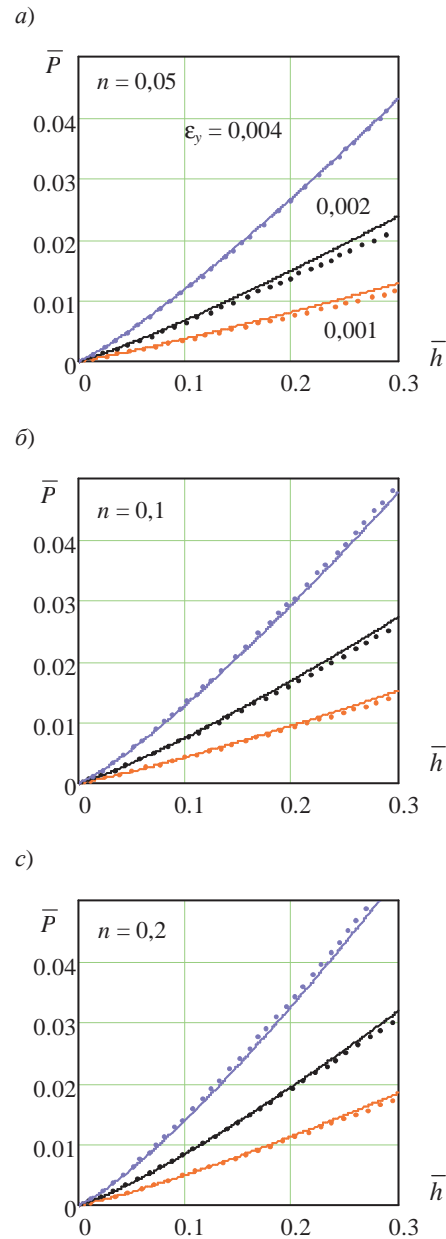


Рис. 2. Зависимости $\bar{P} - \bar{h}$: для значений $\epsilon_y = 0,001; 0,002; 0,004$; а) $n = 0,05$, б) $n = 0,1$, в) $n = 0,2$; сплошные линии – по выражению (22); пунктирные линии – по выражению (30)

Для оценки полученных результатов сравним их с результатами конечно-элементного анализа, полученными в работе [12]:

$$\frac{P}{E^* R^2} = e^{-B(\epsilon_y, n)} \left(\frac{h}{R} \right)^{A(\epsilon_y, n)}, \quad (30)$$

где:

$$A = \frac{0,93 + 290,65\epsilon_y - 23408,85\epsilon_y^2 + 546404,43\epsilon_y^3 + 3,11n + 0,77n^2}{1 + 194,49\epsilon_y - 17101,85\epsilon_y^2 + 407006,05\epsilon_y^3 + 2,1684n}$$

$$B = \frac{5,30 + 81,12\epsilon_y - 21284,04\epsilon_y^2 + 381357,70\epsilon_y^3 - 8,34n + 1,81n^2}{1 + 437,16\epsilon_y - 9993,45\epsilon_y^2 + 0,34,05n - 3,43n^2}$$

На рис. 2 представлены зависимости $\bar{P} = \frac{P}{E^* R^2}$ от $\bar{h} = \frac{h}{R}$ для разных значений ϵ_y и n , рассчитанных по выражениям (22) и (30). Как видно на рис. 2, имеется достаточно хорошее совпадение, что позволяет применять выражение (22) для инженерных расчетов

Выводы

1. Используя эмпирический закон Майера, который изначально не связан с физико-механическими свойствами материалов, получены выражения (21) и (22) для определения площади контакта и величины внедрения сферы в упругопластическое упрочняемое полупространство.

2. При этом учитываются характеристики упругопластического тела $\epsilon_y = \sigma_y / E^*$, экспонента упрочнения n , и отсутствует необходимость определения констант закона Майера m и A^* .

3. Определены границы применения предложенных выражений.

4. Приведенное сравнение полученных результатов с опубликованными результатами конечно-элементного анализа внедрения сферы в упругопластическое полупространство позволяет рекомендовать предложенные зависимости для инженерных расчетов.

5. Дальнейшее совершенствование предлагаемого метода возможно путем уточнения зависимостей (18) и (24).

Литература

1. Огар П.М., Тарасов В.А., Турченко А.В. Развитие инженерных расчетов характеристик контакта жесткой сферы с упругопластическим полупространством // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2012. № 1 (23). С. 80-87.
2. Огар П.М., Тарасов В.А., Турченко А.В. Описание взаимодействия жесткой сферы с упругопластическим полупространством // Труды Братского государственного университета. Сер. Естественные и инженерные науки. 2012. Т. 1. С. 163-169.
3. Огар П.М., Тарасов В.А., Турченко А.В. Трибомеханика упругопластического контакта // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2013. № 2. С. 116-122.
4. Lee H., Lee J.H., Pharr G.M. A numerical approach to spherical indentation techniques for material property evaluation // J. Mech. Phys. Solids 2005. № 53. P. 2037-2069.
5. Демкин Н.Б. Контактное взаимодействие шероховатых поверхностей. М.: Наука, 1970. 226 с.

6. Мышкин Н.К., Петроковец М.И. Трение, смазка, износ. Физические основы и технические приложения трибологии. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 368 с.

7. Болотов А.Н., Мешков В.В., Сутягин О.В., Васильев М.В. Влияние упрочнения на характеристики упругопластического контакта микронеровностей поверхностей // Изв. Самар. науч. центра РАН. 2013. Т.15, № 4 (2). С. 313-315.

8. Марковец М.П. Определение механических свойств металлов по твердости. М.: Машиностроение, 1979. 191 с.

9. Бульчев С.И. Переход от диаграмм вдавливания к диаграммам растяжения с учетом упрочненного поверхностного слоя // Деформация и разрушение материалов. 2010. № 2. С. 43-48.

10. Бульчев С.И. Твердость и гистерезис на пределе текучести // Деформация и разрушение материалов. 2011. № 1. С. 41-45.

11. Hernot X., Bartier O., Bekouche Y., Mauvoisin G., Abdi R. Influence of penetration depth and mechanical properties on contact radius determination for spherical indentation // International Journal of Solids and Structures. 2006. № 43. P. 4136-4153.

12. Collin J.-M., Mauvoisin G., Pilvin P. Materials characterization by instrumented indentation using two different approaches // Materials and Desing. 2010. Vol. 31. P. 636-640.

References

1. Ogar P.M., Tarasov V.A., Turchenko A.V. Elaboration on engineering calculation for contact characteristics of a rigid sphere and elastic-plastic half-space // Sovremennye tekhnologii. Sistemny analiz. Modelirovaniye. 2012. № 1(23).S.80-87.
2. Ogar P.M., Tarasov V.A., Turchenko A.V. Description of the contact of a rigid sphere and elastoplastic half-space // Trudy Bratskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Estestvennyye i inzhenernyye nauki – razvitiyu regionov Sibiri. 2012. T. 1. S. 163-169.
3. Ogar P.M., Tarasov V.A., Turchenko A.V. Tribomechanics of elastoplastic contact // Sovremennye tekhnologii. Sistemny analiz. Modelirovaniye. 2013. № 2. S. 116-122.
4. Lee H., Lee J.H., Pharr G.M. A numerical approach to spherical indentation techniques for material property evaluation // J. Mech. Phys. Solids 2005. № 53. P. 2037-2069.
5. Demkin N.B. Contacting of rough surfaces. M.: Nauka, 1970. 226 s.
6. Myshkin N.K., Petrokovets M.I. Friction, lubrication, wear. Physical basis and engineering applications of tribology. M.: FIZMATLIT, 2007. 368 s.
7. Bolotov A.N., Meshkov V.V., Sutyagin O.V., Vasil'yev M.V. The influence of hardening on the characteristics of the surface microasperities elastoplastic contact // Izvestiya Samar. nauch. tsentra RAN. 2013. T. 15. № 4 (2). S. 313-315.
8. Markovets M.P. Determining metal mechanical properties by their hardness. M.: Mashinostroeniye, 1979. 191 s.
9. Bulychev S.I. Transition from indentation diagrams to stress-strain diagrams taking into consideration hardened surface layer // Deformatsiya i razrushenie materialov. 2010. № 2. S. 43-48.
10. Bulychev S.I. Hardness and hysteresis at the yield strength // Deformatsiya i razrushenie materialov. 2011. № 1. S. 41-45.
11. Hernot X., Bartier O., Bekouche Y., Mauvoisin G., El Abdi R. Influence of penetration depth and mechanical properties on contact radius determination for spherical indentation // International Journal of Solids and Structures. 2006. № 43. P. 4136-4153.
12. Collin J.-M., Mauvoisin G., Pilvin P. Materials characterization by instrumented indentation using two different approaches // Materials and Desing. 2010. V. 31. P. 636-640.