сворачиваемых функций, замкнутая относительно ℓ_1-нормы, что делает R_T^N сверточной алгеброй ASR_T^N – гомоморфным образом функциональной сверточной алгебры *ASM*. С ростом *N* гомоморфизм переходит в изоморфизм.

Сверточные операторы играют особую роль в теории линейных динамических систем, связывая вход-выход. Поэтому представляется практически важным тот факт, что точечное моделирование сверточных операторов связано с использованием обычных системных функций динамических систем: передаточными функциями как преобразованиями Лапласа ядер сверточных операторов, имеющими смысл импульсных переходных характеристик соответствующих динамических систем.

Возникают важные связи сверточных алгебр с алгебраическими структурами во множествах функций комплексного переменного, что играет существенную роль при изучении свойств линейных динамических систем по их точечным моделям.

Доказано, что

$$g * x = \int_0^t g(t-\eta)x(\eta)d\eta \xrightarrow{T_N} Y_T = $$
$$= W_g^*(Z) \cdot X_T\,,$$

причем, *P*-матрица $W_g^*(Z)$ непосредственно определяется инверсным преобразованием Лапласа $G^*(\lambda)$ ядра $g(t)$:

$$g(t) \risingdotseq$$
$$G(p) \xrightarrow{p \to \frac{1}{\lambda}} G^*(\lambda) \xrightarrow{\lambda \to TJ} G^*(TJ) =$$
$$= G^*\left(\lambda_0 \frac{E+Z}{E-Z}\right) = W_g^*(Z),$$

где *TJ* – точечное представление вольтеровского оператора интегрирования, являющееся *P*-матрицей.

Таким образом, связь вход-выход для линейной (стационарной) динамической системы моделируется в точечных представлениях векторно-матричным равенством

$$Y_T = W_g^*(Z) \cdot X_T\,.$$

Литература

1. Осипов В. М. Основы метода изображающих векторов. Томск : Изд-во ТГУ, 1983.
2. Осипов В. М., Осипов В. В. Моделирование линейных динамических систем методом точечных представлений. М.: МАКС Пресс, 2005. 296 с.
3. Неймарк М. А. Нормированные кольца. М. : Наука,1968.

УДК 519.71; 62.50

В.А. Осипова, В.В. Осипов*

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕХОДНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПО ОТСЧЕТАМ ВЧХ

Строятся математические модели переходных характеристик линейных устойчивых динамических систем на конечном промежутке времени по отсчетам вещественных частотных характеристик в узлах оптимальной частотной сетки. Полученные модели, оптимальные в смысле минимума чувствительности к погрешностям в исходных данных, обладают высокой точностью приближения

* - автор, с которым следует вести переписку.

Ключевые слова: модели переходных характеристик, отсчеты ВЧХ в узлах оптимальной частотной сетки.

Математическое моделирование динамических характеристик на конечном промежутке времени $[0,T]$ является одной из основных задач современной теории управления. Временные характеристики линейных стационарных и устойчивых систем, а именно импульсная переходная характеристика (ИПХ) и переходная характеристика (ПХ), являются важнейшими динамическими функциями систем управления во временной области, а вещественная частотная характеристика (ВЧХ) – в частотной области. Исходными данными для моделирования в настоящей работе выступают вещественные частотные характеристики $P(\omega)$ устойчивых динамических систем.

Известно, что ИПХ системы управления $k(t)$, заданная во всем временном промежутке $[0,\infty)$, однозначно определяется по ВЧХ $P(\omega)$ как обращение преобразования Фурье. Однако в инженерной практике данная задача обращения представляет интерес на конечном отрезке времени $[0,T]$, позволяющем судить о качестве управления. Время T называют длительностью (временем) переходного процесса. Тогда для финитной ИПХ $k_T(t)$, имеющей спектральную характеристику $P_T(\omega)$ и совпадающую с $k(t)$ на отрезке $[0,T]$, соответствующая задача обращения становится задачей (приближенного) решения интегрального уравнения I рода с конечными пределами и приближенно заданной правой частью, в роли которой выступает функция $P(\omega)$, несколько отличающаяся при всяком конечном T от неизвестной спектральной характеристики $P_T(\omega)$.

Такая задача сводится к суммированию ряда Фурье с приближенно заданными коэффициентами, в роли которых выступают отсчеты ВЧХ $P(\omega)$ в узлах некоторой частотной сетки, следовательно, задача является некорректно поставленной [3]. Основное характерное и негативное свойство всяких некорректно поставленных задач состоит в высокой чувствительности получаемого (приближенного) решения к погрешностям в исходных данных, что в общем случае может привести (и приводит) к сколь угодно большим погрешностям в решениях (моделях).

Авторами предлагается и реализуется иной подход в решении поставленной задачи, позволяющий построить такую модель $M\tilde{K}_T(t)$ ИПХ $k(t)$ для промежутка $[0,T]$, параметры которой оказываются малочувствительными к погрешностям в исходных данных. Это связанно со свойствами некоторой частотной сетки, в узлах которой определяются отсчеты ВЧХ $P(\omega)$ как коэффициенты Фурье. Предполагается, что существует сетка, оптимальная в смысле минимума чувствительности погрешностей этих коэффициентов к параметру T – основной величине, определяющей погрешности.

В результате происходит своеобразная регуляризация решения поставленной некорректной задачи и строится модель $M\tilde{k}_T(t)$, стабильная к погрешностям и достаточно точная. Еще более точной оказывается модель ПХ $\tilde{h}_T(t)$, легко получаемая по $M\tilde{k}_T(t)$.

Рассмотрим некоторую линейную устойчивую динамическую систему с передаточной функцией $W(p)$, являющейся изображением по Лапласу импульсной переходной характеристики $k(t)$ при $t\in[0,\infty)$.

Устойчивость системы означает выполнение условия

$$\int_0^\infty |k(t)|\,dt < \infty$$

и, следовательно, существование взаимно однозначной пары преобразований Фурье, в частности, косинус-преобразований:

$$\left.\begin{aligned} P(\omega) &= \int_0^\infty k(t)\mathrm{Cos}\,\omega t dt\;; && \text{а)} \\ k(t) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty P(\omega)\,\mathrm{Cos}\,\omega t d\omega\,. && \text{б)} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Прямое преобразование $P(\omega)$, являющееся четной функцией ω, есть ВЧХ системы

$$P(\omega) = \mathrm{Re}\,W(i\omega) = \mathrm{Re}\int_0^\infty k(t)e^{-i\omega t}dt\,. \quad (2)$$

Устойчивость линейных стационарных динамических систем является экспоненциальной. Асимптотическое поведение ИПХ таких систем, т. е.

$$\lim_{t\to\infty}|k(t)| \to 0\,,$$

мажорируется экспоненциальным законом с наименьшим по абсолютной величине характеристическим показателем Ляпунова, который называется степенью устойчивости системы [1, 2].

В такой ситуации, очевидно, существует промежуток времени $[0,T]$, за который процесс $k(t)$ практически завершается. Его можно оценить из условия

$$|\,k(t)| \le \delta_T \qquad \forall t \ge T, \quad (3)$$

где δ_T – достаточно малая величина (0,01÷0,05 от $\max_t |k(t)|$).

Смысл условия (3) состоит в том, что кривая $|\,k(t)|$, начиная с момента $t=T$, «войдет» в достаточно малую δ_T-зону и в дальнейшем из нее уже не выйдет. Оценка величины T связана с оценкой степени устойчивости и может быть эффективно произведена непосредственно по передаточной функции системы [2].

Таким образом, характер ИПХ $k(t)$ устойчивой стационарной динамической системы как функции времени определяется, главным образом, на конечном промежутке $[0,T]$, справа от которого значения функции $k(t)$ несущественны и ими можно пренебречь. Целесообразно поэтому ввести в рассмотрение финитную функцию

$$k_T(t) = \begin{cases} k(t), & \mathrm{t} \in [0,T] \\ 0, & \mathrm{t} \notin [0,T], \end{cases} \quad (4)$$

совпадающую на интервале $[0,T]$ с ИПХ $k(t)$ устойчивой системы. Ее косинус-преобразование Фурье:

$$P_T(\omega) = P(T;\omega) = \int_0^T k_T(t)\,\mathrm{Cos}\,\omega t dt \quad (5)$$

(спектральная характеристика функции (4)) зависит от T как от параметра (т. е. является однопараметрическим семейством спектральных характеристик) и с ростом T все меньше отличается от ВЧХ (1а) спектральной характеристики $P(\omega)$ ИПХ $k(t)$ во всем диапазоне частот. Сделав в (5) соответствующую замену, придем к интегральному уравнению I рода

$$\int_0^T k_T(t)\,\mathrm{Cos}\,\omega t dt = P(\omega) \quad (6)$$

с приближенно заданной правой частью, роль которой выполняет ВЧХ $P(\omega)$ устойчивой динамической системы. Это известная функция, легко определяемая непосредственно по передаточной функции системы, согласно (2).

Решение интегрального уравнения (6) при указанных условиях есть типичная некорректно поставленная задача [3]. Его приближенное решение $k_T(t)$ может быть найдено методом регуляризации.

Этот достаточно эффективный и универсальный метод, играющий огромную роль в прикладной и вычислительной математике, имеет один недостаток, состоящий в серьезных аналитических трудностях при оценке параметра регуляризации, нелинейно связанный с погрешностью в исходных данных.

Для нашей частной задачи (6) может быть получено более простое приближенное решение, обладающее, однако, основным свойством регуляризованного решения – свойством устойчивости, точнее, малочувствительности к изменению погрешностей в исходных данных.

В основе подхода лежат следующие соображения. Очевидно, можем написать:

$$P(\omega)=\int_0^\infty k(t)\,\mathrm{Cos}\,\omega t dt=$$
$$=\int_0^T k(t)\,\mathrm{Cos}\,\omega t dt+\int_T^\infty k(t)\,\mathrm{Cos}\,\omega t dt=$$
$$=P_T(\omega)+\Delta P_T(\omega)$$

и, следовательно,

$$\Delta P_T(\omega)=\Delta P(T;\omega)=$$
$$=P(\omega)-P_T(\omega)= \qquad (7)$$
$$=\int_T^\infty k(t)\,\mathrm{Cos}\,\omega t dt$$

есть погрешность правой части интегрального уравнения (6). Это – непрерывная и дифференцируемая по обоим аргументам функция. Или, как уже отмечалось, – однопараметрическое семейство функций частоты ω, причем, для заданной k (t) параметр T полностью и непрерывно определяет характер каждой функции из этого семейства; величину области ее значений, т. е. значений погрешности (7). Чувствительность $\Delta P_T(\omega)$ к параметру T определяется функцией чувствительности, под которой понимается частная производная функции (7) по параметру T. Дифференцируя интеграл в (7) по нижнему пределу, получим:

$$\frac{\partial \Delta P_T(\omega)}{\partial T}=\frac{\partial \Delta P_T(T;\omega)}{\partial T}= \qquad (8)$$
$$=-k(T)\cdot \mathrm{Cos}\,\omega T.$$

Таким образом, функция чувствительности при каждом фиксированном T есть косинусоидальная функция частоты ω с амплитудой, определяемой величиной δ_T-зоны, согласно (3), и убывающей до нуля при $T\to\infty$.

Очевидно, в узлах частотной сетки

$$\omega_k=\frac{(2k-1)\pi}{2T} \qquad (k=1,2,...) \qquad (9)$$

функция чувствительности (8) обращается в ноль. Это значит, что отклонения отсчетов $\left\{P\left((2k-1)\frac{\pi}{2T}\right)\right\}$, как значений ВЧХ $P(\omega)$ в узлах сетки (9) от соответствующих отсчетов $\left\{P_T\left((2k-1)\frac{\pi}{2T}\right)\right\}$, будут величинами $\left\{\Delta P_T\left((2k-1)\frac{\pi}{2T}\right)\right\}$, наименее чувствительными к изменению параметра T, что в нашем случае имеет важное значение, учитывая некоторую неопределенность при выборе величины T.

Таким образом, совокупность дискретных величин

$$P\left((2k-1)\frac{\pi}{2T}\right) \quad (k=1,2,...) \qquad (10)$$

как отсчетов ВЧХ $P(\omega)$ на сетке (9) обладает наибольшей стабильностью к изменению параметра T по сравнению с подобными отсчетами в узлах любой другой сетки. По этой причине сетку (9) будем называть оптимальной частотной сеткой.

Именно величины (10) целесообразно использовать в качестве надежных исходных данных для построения математической модели $M\tilde{k}_T(t)$ ИПХ k(t) на конечном промежутке $[0,T]$. Такая модель окажется наилучшей в смысле устойчивости к погрешностям в исходных данных, обусловленных выбором значения δ_T-зоны и, следовательно, параметра T.

Итак, ставится следующая задача: по дискретным данным (10) ВЧХ $P(\omega)$ устойчивой динамической системы найти приближенное решение уравнения (6) как математической модели $M\tilde{k}_T(t)$ ИПХ $k(t)$ на конечном промежутке $[0,T]$; оценить адекватность модели как аппарата приближения. Построить математическую модель $\tilde{h}_T(t)$ ПХ $h(t)$ в том же промежутке, а также модель спектральной характеристики $\tilde{P}_T(\omega)$ как косинус-преобразование Фурье модели $\tilde{k}_T(t)$ на $[0,T]$. Последняя легко находится непосредственно по известной модели $M\tilde{k}_T(t)$.

Представление (5) для спектральной характеристики $P_T(\omega)$ на сетке (9) порождает совокупность равенств

$$P_T\left(\left(2k-1\right)\frac{\pi}{2T}\right)=$$

$$=\int_0^T k_T(t)\operatorname{Cos}(2k-1)\frac{\pi}{2T}tdt\ \ (k=1,2,...),$$

которые с точностью до постоянных множителей есть представление коэффициентов Фурье некоторой четной периодической функции $k_T(t)$, совпадающей на интервале $[0,T]$ с финитной функцией (4) и имеющей особый вид симметрии ряда по косинусам

$$\left\{\operatorname{Cos}(2k-1)\frac{\pi}{2T}t\right\}. \qquad (11)$$

Действительно, система косинусов (11) с нечетными номерами, обладая свойством ортогональности на $[0,T]$:

$$\int_0^T \operatorname{Cos}(2k-1)\frac{\pi}{2T}t\cdot\operatorname{Cos}(2m-1)\frac{\pi}{2T}tdt=$$

$$=\begin{cases}0\ ,\ k\neq m\\ \dfrac{T}{2}\ ,\ k=m\end{cases} \qquad (12)$$

будет полной системой лишь на подмножестве четных периодических функций с интегрируемым на $[0,T]$ квадратом, обладающим следующим свойством симметрии:

$$\tilde{k}_T(t+2T)=-\tilde{k}_T(t),$$

поскольку именно таким свойством обладают косинусы (11) с нечетными номерами. Кроме того, они имеют период $4T$, поэтому ряд Фурье по этой системе

$$\tilde{k}_T(t)=\sum_{k=1}^{\infty}a_{2k-1}\operatorname{Cos}(2k-1)\frac{\pi}{2T}t \qquad (13)$$

будет представлять четную периодическую функцию с периодом $4T$, совпадающую с финитной функцией (4) в первой четверти своего периода.

Периодическая функция $\tilde{k}_T(t)$ строится из сдвинутых финитных функций $k_T(t)$, как из сложных импульсов, путем последовательного пристыковывания их одинаковыми сторонами с попарным изменением знака. Так, во второй четверти своего периода сдвинутая финитная функция-импульс пристыковывается к импульсу первой четверти той же стороной с одновременным изменением знака (в точке стыка возникнет разрыв первого рода величины $2k_T(t)$). В третьей четверти стыковка происходит одноименными сторонами, без изменения знака (в точке стыка разрыва непрерывности нет). В четвертой четверти – знак меняется и т. д.

Ряд (13) представляет сглаженную периодическую функцию $\tilde{k}_T(t)$, не имеющую никаких разрывов непрерывности. Ее коэффициенты Фурье в силу (12) будут равны:

$$a_{2k-1}=\frac{2}{T}\int_0^T k_T(t)\operatorname{Cos}(2k-1)\frac{\pi}{2T}tdt=$$
$$=\frac{2}{T}P_T\left(\left(2k-1\right)\frac{\pi}{2T}\right)\ (k=1,2,...) \qquad (14)$$

и, следовательно, можем написать

$$\tilde{k}_T(t)=$$
$$=\frac{2}{T}\sum_{k=1}^{\infty}P_T\left(\left(2k-1\right)\frac{\pi}{2T}\right)\operatorname{Cos}(2k-1)\frac{\pi}{2T}t \qquad (15)$$

Из (7) следует

$$P_T\left(\left(2k-1\right)\frac{\pi}{2T}\right)=$$
$$=P\left(\left(2k-1\right)\frac{\pi}{2T}\right)- \qquad (16)$$
$$-\Delta P_T\left(\left(2k-1\right)\frac{\pi}{2T}\right)\ \ (k=1,2,...),$$

поэтому ряд (15) разобьется на 2 ряда:

$$\tilde{k}_T(t)=\frac{2}{T}\sum_{k=1}^{\infty}P\left(\left(2k-1\right)\frac{\pi}{2T}\right)\operatorname{Cos}(2k-1)\frac{\pi}{2T}t-$$
$$-\frac{2}{T}\sum_{k=1}^{\infty}\Delta P_T\left(\left(2k-1\right)\frac{\pi}{2T}\right)\operatorname{Cos}(2k-1)\frac{\pi}{2T}t.$$

Первый из этих рядов –

$$M\tilde{k}_T(t)=$$
$$=\frac{2}{T}\sum_{k=1}^{\infty}P\left(\left(2k-1\right)\frac{\pi}{2T}\right)\operatorname{Cos}(2k-1)\frac{\pi}{2T}t \qquad (17)$$

– и есть искомая модель ИПХ $k(t)$ на отрезке $[0,T]$, как приближенное решение уравнения (6) по отсчетам (10) ВЧХ в узлах оптимальной частной сетки (9).

Второй ряд

$$\Delta\tilde{k}_T(t)= \\ =\frac{2}{T}\sum_{k=1}^{\infty}\Delta P_T\left(\left(2k-1\right)\frac{\pi}{2T}\right)\mathrm{Cos}(2k-1)\frac{\pi}{2T}t \quad (18)$$

представляет периодическую функцию, имеющую очевидный смысл мгновенной ошибки, которую будем иметь при переходе от «точной» периодической функции (16) к ее модели (17) путем замены «точных» коэффициентов Фурье (14) их приближенными значениями

$$\frac{2}{T}\left\{P\left(\left(2k-1\right)\frac{\pi}{2T}\right)\right\}\approx\left\{a_{2k-1}\right\},$$

полученными как отсчеты известной нам ВЧХ $P(\omega)$ заданной системы в узлах сетки (9).

Найдем оценку для модуля мгновенной ошибки, то есть мажоранту для модуля отклонения на отрезке [0,T] полученной модели (17) от ИПХ $k(t)$:

$$\left|k(t)-M\tilde{k}_T(t)\right|= \\ =\left|\tilde{k}_T(t)-M\tilde{k}_T(t)\right|= \\ =\left|\Delta\tilde{k}_T(t)\right| \quad t\in[0,T].$$

Это позволит оценить в равномерной метрике погрешность приближений на нашей модели и тем самым оценить ее качество.

Представление для коэффициентов $\left\{\Delta P_T\left(\left(2k-1\right)\frac{\pi}{2T}\right)\right\}$, вытекающее из (7):

$$\Delta P_T\left(\left(2k-1\right)\frac{\pi}{2T}\right)= \\ =\int_T^{\infty}k(\eta)\,\mathrm{Cos}(2k-1)\frac{\pi}{2T}\eta\,d\eta \quad (k=1,2,...)$$

подставим в ряд (18). Учитывая тождество для произведения косинусов, получим

$$\Delta k_T(t)= \\ =\frac{2}{T}\int_T^{\infty}k(\eta)\left[\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{Cos}(2k-1)\frac{\pi}{2T}t\cdot\mathrm{Cos}(2k-1)\frac{\pi}{2T}\eta\right]d\eta= \\ =\frac{1}{T}\int_{k=T}^{\infty}\mathrm{Cos}(2k-1)\frac{\pi}{2T}(\eta-t)d\eta+ \\ +\frac{1}{T}\int_T^{\infty}k(\eta)\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{Cos}(2k-1)\frac{\pi}{2T}(\eta+t)d\eta. \quad (19)$$

Для сумм под интегралами как периодических обобщенных функций известны следующие представления [4]:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{T}\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{Cos}(2k-1)\frac{\pi}{2T}(\eta-t)=\delta(\eta-t)+\\&+\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu}\left[\delta(\eta-t-2\nu T)+\delta(\eta-t+2\nu T)\right] \text{ a)}\\&\frac{1}{T}\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{Cos}(2k-1)\frac{\pi}{2T}(\eta+t)=\delta(\eta+t)+\\&+\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu}\left[\delta(\eta+t-2\nu T)+\delta(\eta+t+2\nu T)\right] \text{ b)}\end{aligned}\right\} \quad (20)$$

Справа имеем периодические последовательности δ-функции (δ-импульсов) единичных интенсивностей чередованием знаков и расположенных в следующих точках оси-$\eta: t;\{t+2\nu T\}$ и $\{t-2\nu T\}$ $(\nu=1,2,...)$ – для представления (20a) и $-t;\{-t+2\nu T\}$; $\{-t-2\nu T\}$ $(\nu=1,2,...)$ – для (20b).

Интегрирование в (19) происходит по всем $\eta>T$. В этот промежуток интегрирования, учитывая, что переменная t меняется в пределах от 0 до T, войдут только δ-импульсы, расположенные в точках $\{t+2\nu T\}$ $(\nu=1,2,...)$ из представления (20) и точках $\{-t-2\nu T\}$ $(\nu=1,2,...)$ из представления (20б). Таким образом, будем иметь:

$$\Delta k_T(t)= \\ =\int_T^{\infty}k(\eta)\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu}\left[\delta(\eta-t-2\nu T)+\delta(\eta+t-2\nu T)\right]d\eta,$$

откуда следует оценка

$$\left|\Delta\tilde{k}_T(t)\right| \le$$
$$\le \int_0^T |k(\eta)| \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} [\delta(\eta - t - 2\nu T) + \delta(\eta + t - 2\nu T)] d\eta. \quad (21)$$

В промежутке (T, ∞) $|k(\eta)|$ мажорируется экспонентой:

$$|k(\eta)| \le \delta_T e^{-\alpha(\eta - T)} \quad \forall \eta \ge T,$$

где

$$\delta_T = \underset{t\in[0,T]}{Max}|k(t)| \cdot \delta_T^* = M \cdot \delta_T^* = M \cdot e^{-\alpha T}$$

есть величина выбранной δ_T-зоны $(\delta_T^* = e^{-\alpha T} = 0{,}001 \div 0{,}05)$, а $\alpha-$ степень устойчивости динамической системы.

Оценка (21) усиливается и в силу основного свойства δ-функций получает вид:

$$\left|\Delta\tilde{k}_T(t)\right| \le \delta_T e^{\alpha T} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[e^{-\alpha(t+2\nu T)} + e^{-\alpha(-t+2\nu T)} \right] =$$
$$= 2\delta_T e^{\alpha T} \cdot \operatorname{ch} \alpha t \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\alpha 2\nu T}$$

или, суммируя геометрическую прогрессию:

$$\left|\Delta\tilde{k}_T(t)\right| \le \frac{2\delta_T e^{-\alpha T}}{1 - e^{-2\alpha T}} \cdot \operatorname{ch} \alpha t \quad (0 \le t \le T).$$

Таким образом, мажоранта погрешности модели (17) как функция переменной t при всяком фиксированном T (и δ_T) меняется по закону гиперболического косинуса от меньших значений при t=0 до больших при t=T.

Так, если выбрать δ_T = 0,01M (1-процентная δ_T-зона по отношению к M= $\underset{t\in[0,T]}{\text{Max}}|k(t)|$), то $\alpha T = 4{,}6; e^{-\alpha T} = 0{,}01$, и при t=0 получим оценку:

$$\left|\Delta\tilde{k}_T(t)\right|_{t=0} \le \frac{2\delta_T \cdot 0{,}01}{1 - 0{,}0001} \le$$
$$\le 2M \cdot 10^{-4} \ (0 \le t \le T).$$

При t=T будем иметь:

$$\left|\Delta\tilde{k}_T(t)\right|_{t=0} \le \delta_T \frac{1 + e^{-2\alpha T}}{1 - e^{-2\alpha T}} \approx M \cdot 10^{-2} =$$
$$= \delta_T \ (0 \le t \le T).$$

Последняя оценка подтверждается и непосредственно. Дело в том, что модель (17) при t=T дает первое значение, а k будет не более δ_T: $|k(T)| \le \delta_T$.

Итак, доказано, что модель (17), построенная по отсчетам заданной ВЧХ P(ω) в узлах оптимальной по чувствительности к параметру T частотной сетки (9), действительно обладает высоким уровнем устойчивости к погрешностям в исходных данных, обусловленных конечным значением параметра T, подтверждая свое высокое качество.

Непосредственным интегрированием найдем математическую модель ПХ системы в промежутке [0,T]:

$$\tilde{h}_T(t) = \int_0^t M\tilde{k}_T(t) dt =$$
$$= \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P\left((2k-1)\frac{\pi}{2T}\right)}{(2k-1)} \operatorname{Sin}(2k-1)\frac{\pi}{2T} t. \quad (22)$$

Эта модель, естественно, оказывается еще более точной, чем модель $M\tilde{k}_T(t)$. Проявляется сглаживающий эффект интегрирования.

Вычисления по предлагаемым моделям, связанные, в частности, с построением кривых переходных характеристик, предполагают использование конечных сумм вместо рядов. Порядок этих сумм должен быть увязан с размерами области существенных частот для ВЧХ P(ω), которая определяется частотой среза $\omega_{ср}$, как начальное значение частоты вхождения P(ω) в установленную δ_ω-зону, т. е. из условия

$$P(\omega) \le \delta_\omega = \underset{\omega}{Max}|P(\omega)| \cdot \delta_\omega^* \quad \omega \ge \omega_{ср}$$

обычно выбирают $(\delta_\omega^* = 0{,}001 \div 0{,}05)$.

Для устойчивых динамических систем такая δ_ω-зона всегда существует, как и δ_T-зона для ИПХ k(t). Число членов N в суммах (17) и (22) определяется очевидной формулой

$$\frac{(2N-1)\pi}{2T} = \omega_{ср} \Rightarrow 2N - 1 = \frac{2\omega_{ср} T}{\pi}.$$

Построение кривых переходных характеристик по моделям в форме конечных сумм осуществляется по отсчетам в узлах временной сетки из промежутка $[0,T]$.

В качестве таких узлов целесообразно брать нули первых из отбрасываемых членов в суммах.

Так, по расчетам ординат ИПХ по модели $M\tilde{k}_T(t)$ в виде суммы N-го порядка следует производить в узлах сетки

$$t_{2\nu-1} = \frac{(2\nu-1)T}{2N+1} \qquad (\nu = \overline{1,N}),$$

являющимися нулями $\mathrm{Cos}(2N+1)\frac{\pi}{2T}t$ – первого из отброшенных членов в сумме. А расчеты ПХ по модели (22) – в узлах сетки

$$t_\nu = \frac{2\nu T}{2N+1} \quad (\nu = \overline{1,N}),$$

т. к. это нули функции $\mathrm{Sin}(2N+1)\frac{\pi}{2T}t$ – первого из отброшенных членов в сумме N-го порядка ряда (22).

Построенная по отсчетам ВЧХ на этой оптимальной сетке модель $M\tilde{k}_T(t)$ действительно обладает высоким уровнем устойчивости к погрешностям, что подтверждается многочисленными расчетами. Модели имеют простую аналитическую структуру и эффективны не только в смысле адекватности, но и в смысле компьютерной реализации, и могут быть использованы для решения разнообразных задач прикладной теории линейных динамических систем. В частности, для расчета переходных процессов в аналогичных сетках.

Литература

1. Воронов А. А. Основы теории автоматического управления. В 3 ч. М.: Энергия, 1965. Ч. I.
2. Осипов В.В. Один подход к определению степени устойчивости линейных стационарных САР// Информатика и системы управления: Межвузовский аспирантский и докторантский сборник научных трудов /Отв. ред. А.И.Рубан, Б.П. Соустин; КГТУ. Красноярск, 1996.С.162 – 167.
3. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
4. Ильин В. А., Поздняк Э. Г. О вычислении значений функции по приближенно заданным коэффициентам Фурье: прил. к кн. «Основы математического анализа». М.: Наука, 1973. Ч. 2.
5. Осипов В. М., Осипов В. В. Моделирование линейных динамических систем методом точечных представлений. М.: МАКС Пресс, 2005. 296 с.

УДК 621.865.8

В.В. Лузгин*, В.В. Панасов

ФОРМИРОВАНИЕ АЛГОРИТМОВ ДИАГНОСТИКИ ЭЛЕКТРОТЕПЛОВЫХ ПРОМЫШЛЕННЫХ ОБЪЕКТОВ

Предлагаются алгоритмы диагностики электротепловых промышленных объектов, разработанные в результате исследований динамики двухпозиционного регулирования их температуры при включении и отключении электронагревателя. Предложенные алгоритмы дают возможность определить структурные параметры электротепловых промышленных объектов, что позволяет диагностировать их состояние с использованием компьютерных технологий и регламента конкретных контрольных испытаний по локализации неисправностей электротепловых промышленных объектов.

* - автор, с которым следует вести переписку.