5. Зубов А. В., Зубов Н. В. Теория устойчивости и применение к задачам численного анализа. СПб.: Изд-во НИИ Химии СПбГУ, 2010. 102 с.
6.

УДК 519.71;62.50

В.В. Осипов

ИДЕЙНЫЕ ОСНОВЫ МЕТОДА ТОЧЕЧНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

Предлагается приближенно-аналитический аппарат математического моделирования линейных динамических систем, названный методом точечных представлений, использующий точечное представление функций и операторов.

Ключевые слова: метод точечных представлений, точечное моделирование.

Метод точечных представлений как метод математического моделирования динамических систем, описываемых линейными дифференциальными уравнениями различного типа, обладает большими аналитическими возможностями, весьма конструктивен и эффективен. Эти качества метода связаны прежде всего с особыми алгебраическими свойствами аналитического аппарата, которые используются для описания точечных представлений как конечномерных моделей функции и операторов.

В основе метода лежит простая идея.

Любой непрерывной на [0,1] функции $f(\tau)$ и, следовательно, элементу гильбертова пространства $L^2(0,1)$ ставится в соответствие N-мерный вектор

$$f_T = \mathrm{Colon}[f(\tau_1^{(N)}),\dots f(\tau_\nu^{(N)}),\dots f(\tau_N^{(N)})], \quad (1)$$

составленный из отсчетов этой функции в узлах ортогональной N-сетки:

$$\left\{\tau_\nu^{(N)} / Cos N\pi\tau_\nu^{(N)} = 0\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \tau_\nu^{(N)} = = \frac{2\nu-1}{2N} \quad (\nu = \overline{1,N}). \quad (2)$$

Вектор f_T назван точечным изображающим вектором функции $f(\tau)$, ассоциированным с N-сеткой (2), которая является чебышевской сеткой.

Установлено, что такая сетка – наилучшая среди всевозможных ортогональных сеток по целому ряду показателей качества интерполяционного приближения функции и, следовательно, интерполяционные конструкции различного типа, восстанавливающие функцию $f(\tau)$ по ее точечному изображающему N-вектору (1) – наиболее точные приближающие модели этой функции.

Рассмотрим теперь пространство $M(0,1)$ всех кусочно-непрерывных функций, определенных на [0,1]. Сделаем его нормированным, вводя *Sup*-норму:

$$\|f\| = \underset{\tau\in[0,1]}{Sup}|f(\tau)| \qquad f(\tau)\in M(0,1). \quad (3)$$

Тогда $C(0,1)$ – пространство всех непрерывных на [0,1] функций – становится подпространство в M(0,1), причем

$$\|\varphi\| = \underset{\tau\in[0,1]}{Sup}|\varphi(\tau)| = \underset{\tau\in[0,1]}{Max}|\varphi(\tau)|$$

$$\varphi(\tau)\in C(0,1)\subset M(0,1).$$

Относительно введенной нормы пространства $M(0,1)$ и $C(0,1)$ окажутся полными, т. е. банаховыми пространствами. Заметим, что пространство $M(0,1)$ одновременно является и гильбертовым пространством $L^2(0,1)$. Поскольку произведение двух кусочно-непрерывных и ограниченных на [0,1] функций снова есть кусочно-непрерывная функция, ограниченная на том же отрезке, то множество M(0,1) замкнуто относительно операции умножения и в силу свойств нормы (3):

$$\|f\varphi\| \le \|f\| \cdot \|\varphi\| \qquad f(\tau), \varphi(\tau) \in M(0,1);$$
$$\|1\| = 1,$$

окажется не только банаховым пространством, но и образует коммутативную банахову алгебру с единицей. Обозначим ее символом $AM(0,1)$.

Очевидно, $AC(0,1)$ банахова алгебра с единицей всех непрерывных на [0,1] функций будет подалгеброй алгебры. Условимся определять значение функции в точке конечного разрыва как среднее арифметическое значений слева и справа. Тогда всякая функция из $M(0,1)$ будет определена на любой ортогональной N-сетке и, в частности, на чебышевской дробно-рациональной сетке:

$$\tau_\nu^{(N)} = \frac{(2\nu - 1)\pi}{2N} \qquad (\nu = \overline{1, N}). \qquad (4)$$

Следовательно, будет определен и ее точечный изображающий N-вектор:

$$f_T = Colon[\, f(\tau_1^{(N)}), \ldots f(\tau_\nu^{(N)}), \ldots f(\tau_N^{(N)})] \to$$
$$\to f(\tau) \in M(0,1).$$

Совокупность всех точечных изображений, определенных на N-сетке (4), образует линейное N-мерное пространство R_T^N, полное относительно любой нормы.

Снабдим его нормой

$$\|f_T\| = \sup_\nu \left| f(\tau_\nu^{(N)}) \right| < \|f\| = \sup_{\tau \in [0,1]} \left| f(\tau) \right|. \quad (5)$$

Этот N-вектор реализуется в форме интегрального преобразования

$$T_N f(\tau) = \int_0^1 f(\tau)\delta_T(\tau)d\tau = f_T \qquad f(\tau) \in M(0,1)$$

с точечным δ-векторным ядром, определенным на N-сетке (7)

$$\delta_T(\tau) =$$
$$= Colon\left[\delta(\tau - \tau_1^{(N)}), \ldots \delta(\tau - \tau_\nu^{(N)}), \ldots \delta(\tau - \tau_N^{(N)})\right]$$

Гомоморфизм $T_N : M(0,1) \to R_T^N$ означает, что точечный изображающий N-вектор f_T является образом не одной функции $f(\tau)$ из $M(0,1)$, а целого класса функций, таких, что разности между любыми двумя представителями из этого класса есть функции вида

$$r_N(\tau) = \alpha_N(\tau) Cos N\pi\tau \quad \alpha_N(\tau) \in M(0,1) \quad (6)$$

с нулями в узлах N-сетки (4), поэтому их точечные преобразования имеют нулевой образ в R_T^N. Множество функций (6) образует ядро $KerT_N$ гомоморфизма T_N:

$$\{KerT_N / T_N r_N(\tau) = 0\}. \qquad (7)$$

Всякая функция $f(\tau)$ из $M(0,1)$, доопределенная до четной периодической тем или иным способом, имеет приближенную модель $M_N(f;\tau)$ в форме квадратурной N-суммы Фурье, построенной по отсчетам $f(\tau_\nu^{(N)})$ $(\nu = \overline{1, N})$ в узлах N-сетки (4), поэтому точечные изображающие N-вектора функции $f(\tau) \in M(0,1)$ и ее модели оказываются одинаковыми, т. е. преобразованием T_N они отображаются в один и тот же элемент $f_T \in R_T^N$. Их разность принадлежит ядру (7) гомоморфизма T_N:

$$f(\tau) - M_N(f;\tau) = r_N(\tau) \in KerT_N,$$

и, следовательно,

$$f(\tau) = M_N(f;\tau) + r_N(\tau),$$

т. е. всякая функция из $M(0,1)$ представляется в виде суммы своей интерполяционной модели и некоторого элемента из

$KerT_N$. Последний играет роль ошибки приближения интерполяционной моделью.

При $N \to \infty$ ошибка отождествляется с нулем в метрике $L^2(0,1)$ (в среднеквадратичном), так как

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^1 [f(\tau)-M_N(f;\tau)]^2 d\tau =$$

$$=\lim_{N\to\infty}\int_0^1 [r_N(\tau)]^2 d\tau = 0,$$

и, следовательно, сходимости

$$\lim_{N\to\infty} M_N(f;\tau) = f(\tau) \text{ и } \lim_{N\to\infty} r_N(\tau) = 0 \quad (8)$$

имеют место почти всюду на [0,1] (теорема Карлесона). Множество $S_N(0,1)$ интерполяционных моделей функций из $M_N(0,1)$ образует пространство, являющимся N-мерным подпространством в $M(0,1)$.Отображение

$P_N : M(0,1) \to S_N(0,1)$ есть описанный уже гомоморфизм с ядром (7).

Множества $S_N(0,1)$ и R_T^N эквивалентны, т. к. между их элементами существует взаимно однозначное соответствие. Как пространства они изометрически изоморфны. Таким образом, взаимодействие введенных пространств можно проиллюстрировать следующей диаграммой.

$$\begin{tikzcd} & M(0,1) \arrow[dl, "T_N"'] \arrow[dr, "P_N"] & \\ S_N(0,1) \arrow[rr, shift right] & & R_T^N \arrow[ll, shift right] \end{tikzcd}$$

Стрелками T_N и P_N указаны гомоморфизмы. Двойными стрелками отмечен изометрический изоморфизм пространств $S_N(0,1)$ и R_T^N.

С ростом N, в силу сходимости (8), гомоморфизмы приближаются к изометрическим изоморфизмам. Этим не исчерпываются алгебраические свойства точечных векторных изображений функций из $M(0,1)$ и взаимодействие соответствующих пространств как множеств.

Уже указывалось, что пространство $M(0,1)$ является одновременно коммутативной банаховой алгеброй $AM(0,1)$ относительно операции обычного умножения.

Пространство R_T^N точечных векторных изображений, как гомоморфный образ пространства $M(0,1)$, также обладает таким свойством.

Определим в R_T^N коммутативную операцию покоординатного умножения векторов.

Пусть $f(\tau)$ и $\varphi(\tau)$ две функции из $M(0,1)$ а f_T и φ_T – их точечные векторные изображения из R_T^N, т. е.

$$\left.\begin{array}{l} f(\tau) \xrightarrow{T_N} f_T = Colon\left[f(\tau_1^{(N)}),\dots f(\tau_\nu^{(N)}),\dots f(\tau_N^{(N)})\right]; \; a) \\ \varphi(\tau) \xrightarrow{T_N} \varphi_T = Colon\left[\varphi(\tau_1^{(N)}),\dots\varphi(\tau_\nu^{(N)}),\dots\varphi(\tau_N^{(N)})\right]; \; b) \end{array}\right\}$$

Тогда N-вектор

$$\Phi_T =$$

$$= Colon\left[f(\tau_1^{(N)})\cdot\varphi(\tau_1^{(N)}),\dots f(\tau_\nu^{(N)})\cdot\varphi(\tau_\nu^{(N)}),\dots f(\tau_N^{(N)})\cdot\varphi(\tau_N^{(N)})\right],$$

координаты которого равны произведению соответствующих координат векторов f_T и φ_T, что символически может быть записано в виде $f_T \otimes \varphi_T$, окажется точечным изображающимся вектором произведения $f_T \otimes \varphi(\tau)$ функций из $M(0,1)$:

$$f(\tau)\varphi(\tau) \xrightarrow{T_N} f_T \otimes \varphi_T = \Phi_T \in R_T^N,$$

причем, согласно (5)

$$\|\Phi_T\| =$$

$$= \|f_T \otimes \varphi_T\| \le \|f_T\|\cdot\|\varphi_T\| \le \|f\|\cdot\|\varphi\|.$$

В R_T^N определен единичный элемент

$$1_T = Colon\ [1,\dots 1,\dots 1] \to 1 \in M(0,1)$$

с единичной нормой $\|1_T\| = 1$ и определяющим свойством

$$f_T \otimes 1_T = 1_T \otimes f_T = f_T \qquad f_T \in R_T^N.$$

Таким образом, множество R_T^N точечных векторных изображений с введенной операцией покоординатного умножения образует относительно *Sup*-нормы (5) при любом N коммутативную банахову алгебру с единицей. Обозначим ее AR_T^N.

Поскольку для любых $f(\tau)$ и $\varphi(\tau)$ из $M(0,1)$ справедливо равенство

$$T_N\left[f(\tau)\varphi(\tau)\right]=T_N\left[f(\tau)\right]\cdot T_N\left[\varphi(\tau)\right]=f_T\otimes\varphi_T,$$

то точечное преобразование T_N при любом N реализует непрерывный гомоморфизм не только пространства $M(0,1)$ на пространство R_T^N, но и банаховой алгебры AM на алгебру AR_T^N:

$$AM \xrightarrow{T_N} AR_T^N .$$

Однако отображение $P_N : M(0,1)\to S_N(0,1)$ уже не обладает таким свойством, поскольку $S_N(0,1)$ – пространство N-мерных интерполяционных моделей функций из $M(0,1)$, имеющих вид квадратурных сумм Фурье по системе косинусов, не является алгеброй относительно обычного умножения как бинарной операции.

Кроме того,

$$P_N\left[f(\tau)\varphi(\tau)\right]\neq P_N\left[f(\tau)\right]\cdot P_N\left[\varphi(\tau)\right]$$

и взаимодействие множеств $M(0,1)$ и $S_N(0,1)$, по-видимому, не выходит за пределы их гомоморфизма как вида отображения линейных пространств. Если же рассматривать сплайны нулевой степени в качестве приближающих моделей функций из $M(0,1)$, то ситуация меняется коренным образом.

Дело в том, что множество сплайновых моделей

$$Sp_N^0(f_T;\tau)=\sum_{\nu=1}^{N} f(\tau_\nu^{(N)})\pi_N(\tau-\tau_\nu^{(N)})\quad f(\tau)\in M(0,1)$$

с интерполяционными элементами

$$\pi_N(\tau-\tau_\nu^{(N)})=$$
$$=\begin{cases}1, & \tau\in\left(\tau_\nu^{(N)}-\dfrac{1}{2N},\tau_\nu^{(N)}+\dfrac{1}{2N}\right)\\ 0, & \tau\notin\left(\tau_\nu^{(N)}-\dfrac{1}{2N},\tau_\nu^{(N)}+\dfrac{1}{2N}\right)\end{cases}\quad\left(\nu=\overline{1,N}\right),\tag{9}$$

имеющих вид прямоугольных импульсов единичной высоты, образуют не только *Sup*-нормированное пространство ступенчатых интерполяционных форм, являющимся N -мерным подпространством в $M(0,1)$, но и коммутативную банахову алгебру ASp_N^0 с единицей относительно операции обычного умножения, которая оказывается подалгеброй алгебры AM. Действительно, в силу следующего уникального свойства элементов (9)

$$\pi_N(\tau-\tau_\nu^{(N)})\cdot\pi_N(\tau-\tau_m^{(N)})=$$
$$=\begin{cases}\pi_N(\tau-\tau_\nu^{(N)}) & \nu=m\\ 0 & \nu\neq m\end{cases}\quad\left(\nu,m=\overline{1,N}\right)$$

получаем:

$$Sp_N^0(f_T;\tau)\cdot Sp_N^0(\varphi_T;\tau)=$$
$$=\sum_{\nu=1}^{N} f(\tau_\nu^{(N)})\varphi(\tau_\nu^{(N)})\pi_N\left(\tau-\tau_\nu^{(N)}\right)=$$
$$=Sp_N^0(f_T\otimes\varphi_T;\tau),$$

т. е. произведение двух ступенчатых форм как сплайновых моделей размерности N-функций $f(\tau)$ и $\varphi(\tau)$ из $M(0,1)$ есть сплайновая модель той же размерности произведения этих функций. Иначе говоря, пространство $Sp_N^0(0,1)$ как множество ступенчатых интерполяционных форм замкнуто относительно бинарной операции умножения.

Кроме того,

$$Sp_N^0(1_T;\tau)=1\in M(0,1).$$

Таким образом, гомоморфное отображение π_N пространства $M(0,1)$ на свое подпространство $Sp_N^0(0,1)$ сплайновых моделей переходит в гомоморфизм алгебры AM на алгебру ASp_N^0, причем, последняя при любом N изометрически изоморфна алгебре AR_T^N:

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{AM} \arrow[dl, "\pi_N"'] \arrow[dr, "T_N"] & \\ \mathrm{ASp}_N^0 \arrow[rr, leftrightarrow] & & \mathrm{A\,R}_T^N \end{tikzcd}$$

При $N \to \infty$ последовательность $\{Sp_N^0(f_T, \tau)\}$ ступенчатых интерполяционных форм сходится почти всюду (п. в.) к любой функции $f(\tau) \in M(0{,}1)$, а если последняя непрерывна, то сходимость будет равномерной.

При этом функции из $M(0{,}1)$, составляющие ядро $KerT_N$ гомоморфизма T_N, сходятся почти всюду к нулю, а сами гомоморфизмы π_N и T_N становятся изометрическими изоморфизмами алгебр.

Рассмотрим теперь линейный ограниченный оператор A_τ, действующий из $M(0{,}1)$ в $M(0{,}1)$ или в некоторое подпространство $M_y(0{,}1) \overline{\subset} M(0{,}1)$, в частности, в $C(0{,}1)$ – пространство непрерывных функций на [0,1]. Возможно действие и в конечномерные пространства. Линейность оператора A_τ как отображения

$$A_\tau x(\tau) = \\ = y(\tau);\; x(\tau) \in M(0{,}1); \qquad (10) \\ y(\tau) \in M_y(0{,}1) \overline{\subset} M(0{,}1),$$

означает выполнение условия

$$A_\tau[\alpha x_1(\tau) + \beta x_2(\tau)] = \\ = \alpha \cdot A_\tau x_1(\tau) + \beta \cdot A_\tau x_2(\tau); \\ x_1(\tau), x_2(\tau) \in M(0{,}1); \alpha, \beta \in R,$$

а ограниченность – выполнение неравенства для *Sup*-норм:

$$\|y\| = \|A_\tau x\| \le C \cdot \|x\|,$$

причем, наименьшее возможное значение положительной постоянной C есть норма $\|A_\tau\|$ оператора A_τ:

$$\|A_\tau\| = \operatorname*{Sup}_{x \ne 0} \frac{\|A_\tau x\|}{\|x\|}.$$

Ограниченность линейного оператора эквивалентна его непрерывности в том смысле, что образы $A_\tau x_1(\tau)$ и $A_\tau x_2(\tau)$ двух близких элементов $x_1(\tau)$ и $x_2(\tau)$ из $M(0{,}1)$ также оказываются близкими по метрике этого пространства, т. е. для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что из неравенства будет следовать неравенство $\|A_\tau x_1 - A_\tau x_2\| < \varepsilon$.

Ранее введенные гомоморфные отображения T_N и π_N:

$$\left.\begin{array}{ll} T_N x(\tau) = X_T; \quad x(\tau) \in M(0{,}1); X_T \in R_T^N; & \text{а)} \\ \pi_N x(\tau) = Sp_N^0(X_T; \tau);\; Sp_N^0(X_T;\tau) \in Sp_N^0(0{,}1); & \text{б)} \end{array}\right\}$$

есть линейные ограниченные операторы. Их область определения – пространство $M(0{,}1)$.

Оператор T_N переводит функции из $M(0{,}1)$ в точечные изображающие векторы из R_T^N, ассоциированные с чебышевской N-сеткой (4), а оператор π_N переводит их в свои интерполяционные сплайновые модели, построенные на той же N-сетке и образующие N-мерное подпространство $Sp_N^0(0{,}1)$ ступенчатых форм в пространстве $M(0{,}1)$.

Заметим, что в силу очевидного равенства

$$\pi_N[\pi_N x(\tau)] = \\ = \pi_N^2 x(\tau) = \\ = \pi_N Sp_N^0(X_T; \tau) = \\ = Sp_N^0(X_T;\tau) \Rightarrow \pi_N^2 = \pi_N,$$

оператор π_N оказывается проектирующим оператором.

Отмеченные ранее неравенства для *Sup*-норм:

$$\|\pi_N x(\tau)\| = \\ = \|Sp_N^0(X_T;\tau)\| = \\ = \|X_T\| = \|T_N x(\tau)\| \le \|x(\tau)\|;\ x(\tau)\in M(0{,}1)$$

означают ограниченность операторов T_N и π_N и единичность их норм: $\|T_N\| = \|\pi_N\| = 1$ при любом N.

Воздействуем оператором точечного преобразования T_N на операторное равенство (10):

$$T_N[A_\tau x(\tau)] = T_N y(\tau) = Y_T^N.$$

В результате получим векторно-матричное равенство

$$A_T^{(N)} \cdot X_T^{(N)} = Y_{T(N)},$$

вообще говоря, приближенное, являющееся гомоморфным образом равенства (10) в R_T^N - N-мерном пространстве точечных изображений, причем, линейному оператору A_τ из $M(0,1)$ будет соответствовать, возможно, не одно представление некоторого множества точечных матричных представлений $A_T^{(N)}(N\times N)$.

Задача состоит в том, чтобы найти общий метод явного определения (выбора) матричного точечного представления из возможных представлений для всякого линейного и ограниченного оператора A_τ, действующего из $M(0,1)$ в некоторое подпространство $M_y(0,1)$ этого пространства.

В связи с этим отметим следующее важное обстоятельство. N-мерное пространство $Sp_N^0(0{,}1)$ приближающих сплайновых моделей функций из $M(0,1)$ имеет базис в виде системы прямоугольных N импульсов

$$\pi_N(\tau-\tau_\nu^{(N)}) = \\ = \begin{cases} 1, & \tau \in \left(\tau_\nu^{(N)} - \dfrac{1}{2N}, \tau_\nu^{(N)} + \dfrac{1}{2N}\right) \\ 0, & \tau \notin \left(\tau_\nu^{(N)} - \dfrac{1}{2N}, \tau_\nu^{(N)} + \dfrac{1}{2N}\right) \end{cases} \left(\nu = \overline{1,N}\right) \tag{11}$$

единичной высоты, длительностью $\dfrac{1}{N}$ и осями симметрии в узлах чебышевской N-сетки (4).

Всякий элемент из $Sp_N^0(0{,}1)$ представляется в виде линейной комбинации базисных элементов, причем, коэффициентами их служат компоненты точечного изображающего N-вектора моделируемой функции из $M(0,1)$:

$$Sp_N^0(X_T,\tau) = \\ = \sum_{\nu=1}^{N} x\left(\tau_\nu^{(N)}\right)\cdot \pi_N\left(\tau-\tau_\nu^{(N)}\right) \quad x(\tau)\in M(0{,}1). \tag{12}$$

Из базисных элементов (11), как из компонент, образуем базисный N-вектор:

$$\Pi_N(\tau) = \\ = Colon\left[\pi_N\left(\tau-\tau_1^{(N)}\right),\ldots \pi_N\left(\tau-\tau_\nu^{(N)}\right),\ldots \pi_N\left(\tau-\tau_N^{(N)}\right)\right],$$

тогда сплайновая модель (12) всякой функции $x(\tau)\in M(0{,}1)$ (т. е. элемент пространства $Sp_N^0(0{,}1)$) запишется в виде скалярного произведения точечного изображающего N-вектора X_T функции $x(\tau)$ на базисный вектор $\Pi_N(\tau)$:

$$x(\tau) \xrightarrow{\pi_N} Sp_N^0(X_T;\tau) = \\ = \sum_{\nu=1}^{N} x\left(\tau_\nu^{(N)}\right)\pi_N\left(\tau-\tau_\nu^{(N)}\right) = \\ = \left(X_T, \Pi_N(\tau)\right) = X_T^{+}\Pi_N(\tau). \tag{13}$$

В частности, найдем сплайновые модели для функций

$$A_\tau \cdot \pi_N(\tau-\tau_\nu^{(N)})(\nu = \overline{1,N}),$$

которые при любом линейном и ограниченном операторе A_τ, действующем в $M(0,1)$, также окажутся элементами этого пространства. Оператором π_N проектируя их в N –мерное пространство сплайновых $Sp_N^0(0{,}1)$ моделей, т. е. представляя их в виде разложений по базисным элементам (11), получим

$$\pi_N \cdot A_\tau \cdot \pi_N\left(\tau-\tau_\nu^{(N)}\right)= \\ =\sum_{k=1}^{N}\alpha_{k\nu}\pi_N\left(\tau-\tau_k^{(N)}\right)\ \left(\nu=\overline{1,N}\right). \quad (14)$$

Коэффициенты этих разложений имеют смысл компонент точечных векторных изображений функций

$$A_\tau \cdot \pi_N(\tau-\tau_\nu^{(N)})(\nu=\overline{1,N}).$$

Особенность, однако, в том, что $(\nu-1)$ первых коэффициентов будут равны нулю, и ступенчатое представление (14) будет начинаться с ν–ой ступеньки, поскольку разлагаемая функция

$$A_\tau \cdot \pi_N(\tau-\tau_\nu^{(N)})$$

будет равна нулю до момента появления ν–го прямоугольного финитного импульса $\pi_N(\tau-\tau_\nu^{(N)})$. Таким образом, разложение получает вид

$$\pi_N \cdot A_\tau \cdot \pi_N(\tau-\tau_\nu^{(N)})= \\ =\sum_{k=\nu}^{N}\alpha_{k\nu}\pi_N(\tau-\tau_k^{(N)})= \\ =[0,\ldots0,\ldots\alpha_{\nu\nu}\ldots\alpha_{k\nu},\ldots\alpha_{N\nu}]\cdot\Pi_N(\tau)(\nu=\overline{1,N}), \quad (15)$$

т. е. вид скалярного произведения N-вектора коэффициентов с $(\nu-1)$ первыми нулевыми компонентами на базисный вектор $\Pi_N(\tau)$.

Отсюда следует векторно-матричное представление для вектор-функции $\pi_N A_\tau \Pi_N(\tau)$:

$$\pi_N A_\tau \Pi_N(\tau)= \\ =\pi_N\begin{bmatrix} A_\tau\Pi_N\left(\tau-\tau_1^{(N)}\right)\\ \vdots \\ A_\tau\Pi_N\left(\tau-\tau_\nu^{(N)}\right)\\ \vdots \\ A_\tau\Pi_N\left(\tau-\tau_N^{(N)}\right)\end{bmatrix}= \\ =\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \cdots & \alpha_{\nu1} & \cdots & \alpha_{N1}\\ & \ddots & \vdots & & \vdots\\ & & \alpha_{\nu\nu} & \cdots & \alpha_{N\nu}\\ & 0 & & \ddots & \vdots\\ & & & & \alpha_{NN}\end{bmatrix}\cdot\Pi_N(\tau)= \\ =\left(A_T^{(N)}\right)^+\cdot\Pi_N(\tau). \quad (16)$$

Символом $\left(A_T^{(N)}\right)^+$ обозначена верхнетреугольная матрица с коэффициентами разложений (15) в качестве компонент:

$$\left(A_T^{(N)}\right)^+ = \\ =\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \cdots & \alpha_{\nu1} & \cdots & \alpha_{N1}\\ & \ddots & \vdots & & \vdots\\ & & \alpha_{\nu\nu} & \cdots & \alpha_{N\nu}\\ & 0 & & \ddots & \vdots\\ & & & & \alpha_{NN}\end{bmatrix}\ (N\times N),$$

причем, эта матрица рассматривается как результат транспонирования нижнетреугольной матрицы

$$A_T^{(N)} = \\ =\begin{bmatrix}\alpha_{11} & & & & \\ \vdots & \ddots & & 0 & \\ \alpha_{\nu1} & \cdots & \alpha_{\nu\nu} & & \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \\ \alpha_{N1} & \cdots & \alpha_{N\nu} & \cdots & \alpha_{NN}\end{bmatrix}\ (N\times N). \quad (17)$$

Теперь найдем сплайновое представление $\pi_N A_\tau Sp_N^0(X_T,\tau)$ как приближенную модель функции

$$A_\tau Sp_N^0(X_T,\tau)\in M(0,1).$$

Поскольку

$$\left\|A_\tau Sp_N^0(X_T,\tau)-\pi_N A_\tau Sp_N^0(X_T,\tau)\right\|\xrightarrow{N\to\infty}0,$$

то при достаточно больших значениях эти функции будут сколь угодно мало отличаться друг от друга при всяком линейном и ограниченном операторе A_τ. Учитывая (13) и (16), а также свойство скалярного произведения векторов, получим:

$$A_\tau Sp_N^0(X_T,\tau)\approx\pi_N A_\tau Sp_N^0(X_T,\tau)= \\ =\left(X_T,\pi_N A_\tau\Pi_N(\tau)\right)=\left(X_T,\left(A_T^{(N)}\right)^+\Pi_N(\tau)\right)= \\ =\left(A_T^{(N)}X_T,\Pi_N(\tau)\right)=Sp_N^0(A_T^{(N)}X_T,\tau), \quad (18)$$

$A_T^{(N)}$ где есть матрица (17).

Осталось сделать заключительный шаг. В силу свойства нормы имеет место неравенство

$$\begin{aligned}&\left\|A_\tau x(\tau)-A_\tau Sp_N^0(X_T,\tau)\right\|\le\\&\le\left\|A_\tau\right\|\cdot\left\|x(\tau)-Sp_N^0(X_T,\tau)\right\|\end{aligned}\quad(19)$$

справедливое для всякого ограниченного (непрерывного) линейного оператора A_τ, любого $x(\tau)$ из M(0,1) и любого N.

Поскольку

$$\left\|x(\tau)-Sp_N^0(X_T,\tau)\right\|\xrightarrow{N\to\infty}0,$$

т. е. имеет место сходимость по норме последовательности $\left\{Sp_N^0(X_T,\tau)\right\}$ сплайновых приближающих моделей ко всякой моделируемой функции $x(\tau)$ из $M(0,1)$ (и даже равномерная сходимость, если $x(\tau)$ – непрерывная функция), то из неравенства (19) будет следовать также

$$\left\|A_\tau x(\tau)-A_\tau Sp_N^0(X_T,\tau)\right\|\xrightarrow{N\to\infty}0.$$

Последнее означает, что при достаточно больших N и с учетом (18) будем иметь сколь угодно точные равенства при переходе к соответствующим сплайновым моделям

$$\begin{aligned}y(\tau)=A_\tau x(\tau)\approx A_\tau Sp_N^0(X_T,\tau)\approx\pi_N A_\tau Sp_N^0(X_T,\tau)=\\=\left(A_T^{(N)}X_T,\Pi_N(\tau)\right)=\\=Sp_N\left(A_T^{(N)}X_T;\tau\right).\end{aligned}$$

Отсюда для точечных изображений получим:

$$\begin{aligned}&T_y y(\tau)=Y_T^{(N)}=\left[A_\tau x(\tau)\right]_T=\\&=A_T^{(N)}\cdot X_T^{(N)};\quad X_T^{(N)}=T_N x(\tau)\end{aligned}\quad(20)$$

Таким образом, всякий линейный и ограниченный оператор, действующий из пространства $M(0,1)$ на какое-либо его подпространство $M_y(0,1)\sqsubset M(0,1)$ при гомоморфном отображении в N-мерное подпространство $Sp_N^0(0,1)\subset M(0,1)$ сплайновых моделей (с базисом (11)) получает точечное представление в виде нижнетреугольной матрицы (17), причем, операторному равенству (10) соответствует равенство (20) точечных изображений, вообще говоря, приближенное. Практическое определение компонент точечного матричного представления линейного ограниченного оператора A_τ связано с проектированием функции $A_\tau\cdot\pi_N(\tau-\tau_\nu^{(N)})(\nu=\overline{1,N})$ на подпространство сплайновых моделей и их фактическим разложением по базисным элементам (11) (разложение вида (15)). Из коэффициентов этих разложений, как из строк, формируется матрица, которая после транспонирования и окажется матрицей точечного представления $A_T^{(N)}$ оператора A_τ.

Далее этим методом находятся точечные матричные представления различных линейных операторов, необходимых, в частности, для решения линейных дифференциальных уравнений различных типов, которые с помощью точечных представлений преобразуются в алгебраические (векторно-матричные) уравнения, реализуя тем самым своеобразное операторное исчисление.

В частности найдены точечно-матричные представления оператора, осуществляющего сдвиг по оси «τ» функции $x(\tau)\in M(0,1)$ на фиксированный шаг, равный расстоянию между узлами чебышевской N-сетки (2), т. е. на величину $\frac{1}{N}$.

Назовем этот оператор точечным оператором сдвига и обозначим символом Z_τ.

Его действие на всякую ограниченную функцию $x(\tau)$, определенную на [0,1] и тождественно равную нулю, за пределами этого отрезка (очевидно $x(\tau)\in M(0,1)$) будет означать сдвиг аргумента функции на величину $\frac{1}{N}$:

$$Z_\tau x(\tau)=x\left(\tau-\frac{1}{N}\right)\qquad\tau\in\left(\frac{1}{N},1+\frac{1}{N}\right).$$

Используя описанный выше общий метод получения точечных матричных представлений линейных ограниченных операторов, линейному оператору Z_τ точечного сдвига в пространстве $\mathrm{R}_\mathrm{T}^\mathrm{N}$ точечных изображений линейному оператору Z_τ точечного сдвига соответствует матричное представление.

$$Z = \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ 1 & 0 & & & 0 & \\ & 1 & 0 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & 0 & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (NxN)$$

Эту матрицу назовем канонической матрицей правого сдвига.

$$E = Z^0, Z^1, Z^2, \ldots Z^k, \ldots Z^{N-1} \quad (21)$$

образуют линейно независимые системы матриц, поскольку их линейные комбинации, т. е. матричные полиномы степени N-1 с вещественными коэффициентами

$$P_{N-1}(Z) =$$
$$= A_0 E + \cdots + A_k Z^k + \cdots + A_{N-1} Z^{N-1} =$$
$$= \sum_{k=0}^{N-1} A_k Z^k = \begin{bmatrix} A_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_1 & A_0 & 0 & 0 & 0 \\ A_2 & A_1 & A_0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ A_{N-1} & \cdots & \cdots & A_1 & A_0 \end{bmatrix}; \quad (22)$$

как треугольные матрицы ($N\times N$), могут тождественно равняться нулю лишь при равенстве нулю всех элементов, т. е. коэффициентов линейных комбинаций.

Матрицу тёплицева вида (22) назовем матрицей полиномиального сдвига.

Отметим прежде всего, что матричный полином (22) есть гомоморфный образ в R_T^N операторного полинома

$$P_{N-1}(z_\tau) = \sum_{k=0}^{N-1} A_k z_\tau^k$$

с оператором сдвига Z_τ в качестве аргумента, действующего по формуле

$$P_{N-1}(z_\tau) \cdot x(\tau) = \sum_{k=0}^{N-1} A_k x\left(\tau - \frac{k}{N}\right); \quad x(\tau) \in M(0,1)$$

и осуществляющего, следовательно, суммирование всех последовательных сдвигов финитной функции $x(\tau)$ из $M(0,1)$ с соответствующими весовыми множителями $\{A_k\}$.

$$\mathrm{P}_{\mathrm{N}-1}(\mathrm{z}_\tau) \cdot \mathrm{x}(\tau) \xrightarrow{\mathrm{T_N}} \mathrm{P}_{\mathrm{N}-1}(\mathrm{Z}) \cdot \mathrm{X}_\mathrm{T}.$$

Множество $\{P_{N-1}(Z)\}$ всевозможных матриц полиномиального сдвига образует подпространство в линейном пространстве нижнетреугольных матриц ($N\times N$), само являясь N-линейным пространством с базисом (21) в виде системы из N первых степеней матрицы Z ($N\times N$).

Широкий класс таких матриц возникает как множество функций матричного аргумента Z – канонической матрицы сдвига.

Матрицы полиномиального сдвига формально возникают в результате замены комплексного аргумента z у целой рациональной функции (полинома) $P_{N\text{-}1}(z)$ степени N-1 на матричный аргумент Z ($N\times N$):

$$P_{N-1}(z) =$$
$$= \sum_{k=0}^{N-1} A_k z^k \xrightarrow{z \to Z} \sum_{k=0}^{N-1} A_k Z^k =$$
$$= P_{N-1}(Z) \quad (\mathrm{N}\times\mathrm{N}).$$

Имеем, очевидно, взаимно однозначное соответствие между указанными полиномами и матрицами. Полином $P_{N\text{-}1}$ (z) комплексной переменной z назовем порождающим полиномом матрицы $P_{N\text{-}1}$ (Z) ($N\times N$).

Условимся называть матрицы полиномиального сдвига P-матрицами ($N\times N$).

Всякая P-матрица полностью определяется упорядоченным набором из N вещественных чисел, являющимися коэффициентами порождающего полинома. Ясно, что свойства таких наборов чисел определяют как свойства порождающих полиномов, так и свойства соответствующих P-матриц ($N\times N$).

Кроме того, если условиться считать, что все степени переменной "z", превышающие натуральное число N-1, обращаются в ноль (это степени $z^N, z^{N+1}\ldots$), т. е. снабдить аргумент "z" своеобразным свойством нильпотентности с показателем N, как это имеет место для матричного аргумента Z ($N\times N$), то во множестве полиномов степени не более N-1 определена еще одна бинарная операция (кроме операции сложения), не выводящая за пределы этого множества.

Это операция умножения полиномов, удовлетворяющая всем обычным свойствам (обычным аксиомам умножения) и, в частности, свойству коммутативности.

Таким образом, множество порождающих полиномов оказывается более сложной алгебраической структурой, чем линейное пространство.

Это коммутативная алгебра с единицей. Такой же алгеброй будет и множество соответствующих P-матриц ($N\times N$), т. к. для любой пары таких матриц определена коммутативная операция умножения, в результате которой получается снова P-матрица ($N\times N$). Кроме того, множество P-матриц ($N\times N$) – линейное пространство. Роль единицы в матричной алгебре, естественно, играет единичная матрица E ($N\times N$).

Очевидно, эти алгебры изоморфны друг другу (они как множества просто эквивалентны), и все операции в них осуществляются по одним и тем же правилам и сводятся к операциям над коэффициентами порождающих полиномов (элементами одной алгебры), являющимися одновременно элементами соответствующих P-матриц (которые есть элементы другой алгебры).

Кроме этого можно доказать следующие три утверждения.

Утверждение 1. Множество всевозможных функций комплексного переменного z, определенных и непрерывных в единичном круге $|z|\le 1$ и аналитических внутри этого круга, образует банахову алгебру с единицей AF относительно нормы

$$\|\varphi(z)\| = \underset{|z|\le 1}{Max}|\varphi(z)| \qquad \varphi(z)\in AF\ ,$$

совпадающей с l_1 – нормой соответствующих степенных рядов функций из AF:

$$\|\varphi(z)\| = \left\|\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k z^k\right\| = \underset{|z|\le 1}{Max}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k z^k\right| = \sum_{k=0}^{\infty}|\varphi_k|\,.$$

Множество таких степенных рядов также образуют банахову алгебру с единицей AGF, изометрически изоморфную алгебре AF. Утверждение иллюстрируется следующей диаграммой:

$$AF \rightleftarrows AGF$$

Утверждение 2. Существует проектор $\Pi^{(N)}$, гомоморфно отображающий нормированные алгебры AF и AGF на l_1 – нормированную N-алгебру $AGF^{(N)}$ частичных сумм N-го порядка степенных рядов как элементов алгебры AGF.

$$\begin{tikzcd} & AGF \arrow[dl, shift left] \arrow[d, "\Pi^{(N)}"] \\ AF \arrow[ur, shift left] \arrow[r, "\Pi^{(N)}"] & AGF^{(N)} \end{tikzcd}$$

Утверждение 3. Заменой переменного z на каноническую матрицу сдвига Z ($N\times N$) осуществляется гомоморфизм алгебры AF функций, аналитических в круге $|z|\le 1$, на алгебру $AGF^{(N)}(Z)$ матриц ($N\times N$) полиномиального сдвига (P-матриц) и изометрический изоморфизм N-алгебры $AGF^{(N)}$ порождающих полиномов на матричную алгебру $AGF^{(N)}(Z)$. Диаграмма приобретает окончательный вид:

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{AGF} \arrow[dl, shift left] \arrow[d, "\Pi^{(N)}"] \\ \mathrm{AF} \arrow[ur, shift left] \arrow[r, "\Pi^{(N)}"] \arrow[dr, "z\to Z"'] & \mathrm{AGF}^{(N)} \arrow[d, shift left, "z\to Z"] \\ & \mathrm{AGF}^{(N)}(Z) \arrow[u, shift left] \end{tikzcd}$$

Кроме этого, используя описанный выше общий метод получения точечноматричного представления линейных операторов, получено Р-матричное представление оператора интегрирования J_τ, действующего по формуле

$$y(\tau) = J_\tau \cdot x(\tau) = \int_0^\tau x(\tau)d\tau \quad \tau \in [0,1],$$

Это линейный и ограниченный оператор. Его область определения – пространство $M(0,1)$; область значений – подмножество непрерывных функций из $C(0,1)$, обращающихся в ноль при $\tau=0$. Оператору J_τ в пространстве R_T^N точечных векторных изображений соответствует матричное представление J_T ($N\times N$):

$$y(\tau) = J_\tau \cdot x(\tau) = \int_0^\tau x(\tau)d\tau \xrightarrow{\mathrm{T_N}} \mathrm{Y_T} = \mathrm{J_T} \cdot \mathrm{X_T}$$

представления $\mathrm{J_T}$, реализующий двухступенчатое отображение:

$$y(\tau) = \\ = J_\tau \cdot x(\tau) \xrightarrow{\pi_N} Sp_N(J_T X_T;\tau) \xrightarrow{\mathrm{T_N}} \mathrm{J_T X_T},$$

приближенное на первой ступени.

Это матричное представление J_T оператора интегрирования имеет вид:

$$J_\tau \xrightarrow{T_N} J_T = \frac{1}{N}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & & & 0 & \\ 1 & \frac{1}{2} & & & \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Надо отметить, что всякие меры, уточняющие приближенные равенства, приводят к существенным изменениям структуры матрицы интегрирования по сравнению со структурой (23), что не только усложняет ее, но, как оказалось, принципиально меняет аналитические возможности и эффективность всей разрабатываемой прикладной теории операторного метода на основе точечных представлений.

В существенной степени это связано с тем обстоятельством, что матрица интегрирования (23) является матрицей полиномиального сдвига (P-матрицей) и поэтому при любом N представляется в виде линейной комбинации первых N степеней канонической матрицы сдвига Z ($N\times N$) и легко сворачивается к простой дробно-рациональной функции матричного аргумента Z:

$$J_T = \frac{1}{N}\left[\frac{1}{2}E + \sum_{k=1}^{N-1} Z^k\right] = \\ = \frac{1}{2N}\left[E + 2\sum_{k=1}^{N-1} Z^k\right] = \\ = \frac{1}{2N}\left[E + 2Z\sum_{k=1}^{N-1} Z^k\right] = \\ = \frac{1}{2N}\left[E + 2Z(E-Z)^{-1}\right] = \\ = \frac{1}{2N}(E-Z)^{-1}(E+Z) = \\ = \frac{1}{2N}\frac{E+Z}{E-Z}.$$

Сделаем одно уточнение. Рассматриваемые функции безразмерного аргумента τ являются символическим обозначением функций реального времени "t", определенными на конечном промежутке $[0,T]$, который после замены $t=T\tau$, преобразуется в $[0,1]$ для переменного "τ", а "T" играет роль параметра.

В обозначении функции $x(\tau)\in M(0,1)$ этот параметр явно не указывается. Однако следует считать, что

$$x(\tau)=x(\mathrm{T}\tau)=x(\mathrm{t}) \quad t\in[0,T],$$

а компоненты $x(\tau_1^{(N)})$ $(\nu=\overline{1,N})$ точечного изображающего вектора X_T функции $x(\tau)$ следует рассматривать как отсчеты $x(T\tau_\nu^{(N)}) = x(t_\nu^{(N)})$ $(\nu=\overline{1,N})$ в узлах чебышевской временной N-сетки

$$t_\nu^{(N)} = \frac{(2\nu-1)T}{2N} = T\tau_\nu^{(N)} \quad (\nu=\overline{1,N}). \quad (24)$$

Оператор интегрирования по реальному времени "t" также приобретает множитель "T", поскольку

$$J_t x(t)=\int_0^t x(t)dt=$$

$$=T\int_0^{\frac{t}{T}} x(T\tau)d\tau=T\int_0^{\tau} x(\tau)d\tau=TJ_\tau x(\tau).$$

Соответственно, для точечной матрицы интегрирования будем иметь

$$T\cdot J_T=\frac{T}{N}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & & & & & 0\\ 1 & \frac{1}{2} & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & \\ 1 & 1 & \cdots & \frac{1}{2} & & \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & \frac{1}{2}\end{bmatrix}= \qquad (25)$$

$$=\frac{T}{2N}\frac{E+Z}{E-Z}=\lambda_0\frac{E+Z}{E-Z} \quad (N\times N).$$

Скалярный множитель

$$\lambda_0=\frac{T}{2N} \qquad (26)$$

имеет смысл половины временного “расстояния” между узлами N – сетки (24) и одновременно N-кратным собственным значением матрицы (25) с определителем, равным λ_0^N.

Параметр (26) играет важную роль при исследовании временных процессов методом точечных представлений, связывая ширину спектральной характеристики (частоту среза $\omega_{ср.}$) и расчетную длительность “T” временного процесса с размерностью этих представлений, поскольку, согласно теореме Котельникова, имеем

$$\lambda_0=\frac{T}{2N}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{\omega_{cp}}\Rightarrow\lambda_0\omega_{cp}=\frac{\pi}{2}. \qquad (27)$$

При фиксированной частоте среза $\omega_{ср.}$ параметр λ_0, в силу связи (27) также должен быть фиксированным. Это значит, что при всяком изменении расчетной длительности T размерность N точечного изображения временного процесса также должна изменяться так, чтобы отношение $\frac{T}{N}$ осталось неизменным. Фиксированными при этом окажутся и узлы чебышевской временной N-сетки

$$t_\nu^{(N)}=\frac{(2\nu-1)T}{2N}=\lambda_0(2\nu\text{-}1) \quad (\nu=\overline{1,N}),$$

а также отсчеты

$$x(t_\nu^{(N)})=x\big(\lambda_0(2\nu-1)\big) \quad (\nu=\overline{1,N})$$

временной функции $x(t)$ $t\in[0,T]$ как компоненты ее точечного изображающего вектора X_T.

В этой ситуации увеличение N (в связи с увеличением T) будет означать добавление новых компонент точечного изображающего вектора без изменения всех предыдущих, т. е. возникает свойство, характерное для коэффициентов Фурье.

Введем матрицу полиномиального сдвига как функцию матричного аргумента Z, полагая

$$J(Z)=\frac{E+Z}{E-Z}=E+2\sum_{k=1}^{N-1}Z^k.$$

Тогда матрица интегрирования (25) запишется в виде

$$T\cdot J_T=\lambda_0 J(Z)=\lambda_0\frac{E+Z}{E-Z}=$$

$$=\lambda_0\left[E+2\sum_{k=1}^{N-1}Z^k\right]=\lambda_0\begin{bmatrix}1 & & & & \\ 2 & 1 & & 0 & \\ 2 & 2 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 2 & \cdots & \cdots & 2 & 1\end{bmatrix}.$$

В рамках общего подхода изучен вопрос о точечном изображении функциональной свертки как вполне непрерывного интегрального оператора с разностным ядром и как коммутативной бинарной операции, замкнутой относительно L_1-нормы, что превращает $M(0,1)$ в сверточную нормированную алгебру с добавлением единицы (в этой роли выступает δ-функция).

В пространстве точечных изображений R_T^N функциональной свертке соответствует свертка векторных изображений сворачиваемых функций, замкнутая относительно ℓ_1-нормы, что делает R_T^N сверточной алгеброй ASR_T^N – гомоморфным образом функциональной сверточной алгебры *ASM*. С ростом *N* гомоморфизм переходит в изоморфизм.

Сверточные операторы играют особую роль в теории линейных динамических систем, связывая вход-выход. Поэтому представляется практически важным тот факт, что точечное моделирование сверточных операторов связано с использованием обычных системных функций динамических систем: передаточными функциями как преобразованиями Лапласа ядер сверточных операторов, имеющими смысл импульсных переходных характеристик соответствующих динамических систем.

Возникают важные связи сверточных алгебр с алгебраическими структурами во множествах функций комплексного переменного, что играет существенную роль при изучении свойств линейных динамических систем по их точечным моделям.

Доказано, что

$$g * x = \int_0^t g(t-\eta)x(\eta)d\eta \xrightarrow{T_N} Y_T =$$
$$= W_g^*(Z) \cdot X_T,$$

причем, *P*-матрица $W_g^*(Z)$ непосредственно определяется инверсным преобразованием Лапласа $G^*(\lambda)$ ядра $g(t)$:

$$g(t) \doteq$$
$$G(p) \xrightarrow{p \to \frac{1}{\lambda}} G^*(\lambda) \xrightarrow{\lambda \to TJ} G^*(TJ) =$$
$$= G^*\left(\lambda_0 \frac{E+Z}{E-Z}\right) = W_g^*(Z),$$

где *TJ* – точечное представление вольтеровского оператора интегрирования, являющееся *P*-матрицей.

Таким образом, связь вход-выход для линейной (стационарной) динамической системы моделируется в точечных представлениях векторно-матричным равенством

$$Y_T = W_g^*(Z) \cdot X_T.$$

Литература

1. Осипов В. М. Основы метода изображающих векторов. Томск : Изд-во ТГУ, 1983.
2. Осипов В. М., Осипов В. В. Моделирование линейных динамических систем методом точечных представлений. М.: МАКС Пресс, 2005. 296 с.
3. Неймарк М. А. Нормированные кольца. М. : Наука,1968.

УДК 519.71; 62.50

В.А. Осипова, В.В. Осипов*

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕХОДНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПО ОТСЧЕТАМ ВЧХ

Строятся математические модели переходных характеристик линейных устойчивых динамических систем на конечном промежутке времени по отсчетам вещественных частотных характеристик в узлах оптимальной частотной сетки. Полученные модели, оптимальные в смысле минимума чувствительности к погрешностям в исходных данных, обладают высокой точностью приближения

* - автор, с которым следует вести переписку.