образование коэффициентов (9) является допустимым. Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (пр. № 10-08-00624, 10-07-00286).

Литература

1. Харитонов В.Л. Асимптотическая устойчивость семейства систем линейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14, № 11. С. 2086-2088.

2. Биркгоф Дж. Д. Динамические системы. М.; Л., 1941. 320 с.

3. Блистанова Л.Д. Конструктивные методы исследования устойчивости систем с последействием. М. , 2004. 203 с.

4. Критерий робастной устойчивости для стационарных систем большого порядка / Л. Д. Блистанова и [и др.] // Труды средневолжского математического о-ва. 2002. Т 3-4, № 1. С. 250-251.

5. Метод понижения порядка при исследовании динамических свойств систем автоматического регулирования / Л. Д.Блистанова, И. В. Зубов, Н. В Зубов, Н. А. Северцев // Автоматика и телемеханика. 2005. № 2. С. 17-22.

6. Конструктивные методы теории устойчивости и их применение к задачам численного анализа / Л.Д. Блистанова [и др.]. СПб.: Изд-во НИИ Химии СПбГУ, 2002. 119 с.

7. Исследование устойчивости решений дифференциальных уравнений / А. В. Зубов [и др.]. СПб.: Мобильность плюс, 2009. 224 с.

УДК 517.929

Н.В. Зубов*, О.В. Мутлу, М.Н. Зубова

ЛОКАЛИЗАЦИЯ ВЕЩЕСТВЕННЫХ КОРНЕЙ С ПОМОЩЬЮ АЛГОРИТМА ШТУРМА

В статье приведена известная теорема Штурма и реализующий эту теорему алгоритм Евклида, позволяющий определить число отрицательных и положительных действительных корней многочлена.

Ключевые слова: многочлен, корень, интервал, число перемен знака в системе, последовательность.

Одной из основных задач современного этапа развития науки, техники и технологии являются фундаментальные исследования в области моделирования, управления, качественного и количественного анализа динамики сложных управляемых систем. В связи с усложнением технических средств и систем управления необходимо разрабатывать все более тонкие качественные и количественные методы исследования поведения решений динамических систем, построения для этих систем программных управлений и методов их синтеза, критериев устойчивого, надежного и безопасного функционирования систем, имеющих различные особенности [4].

Большинство математических моделей, используемых при описании сложных технических систем и технологических процессов, претендующих на некоторую целостность, представляют собой динамические системы, функционирование которых описывается системами обыкновенных дифференциальных уравнений. Если проводить исследование уп-

* - автор, с которым следует вести переписку.

рощенных математических моделей, не учитывающих наличие различного рода неопределенностей, возникающих как в силу различного рода неточностей и эмпирических приближений при описании динамических характеристик объекта, так и влияния процессов износа, старения и деградации, то можно прийти к неверным техническим и технологическим решениям. Эти решения будут не только экономически невыгодны, но и увеличат вероятность аварий и катастроф [8].

Необходимость исследований теории устойчивости полиномов и их характеристик неустойчивости диктуется, во-первых, современными потребностями науки и техники и ее приложениями в практических задачах, связанных с конструированием и моделированием процессов управления в технике, экономике, биологии и т. д., а во-вторых, наличием большого числа нерешенных задач, прямо связанных с инженерной практикой. Фактически, результаты, полученные в теории устойчивости полиномов, позволяют обеспечивать динамическую безопасность управляемых систем на этапе их конструирования и эксплуатации.

Определение 1. [1] Системой Штурма называется последовательность многочленов с действительными коэффициентами $f_0(z)$, $f_1(z),\ldots,f_k(z)$, удовлетворяющих условиям:

1. Многочлен $f_k(z)$ не имеет действительных корней.
2. Если α – действительный корень многочлена $f_s(z)$, т. е. $f_s(\alpha)=0$, то выполняются строгие неравенства $f_{s-1}(\alpha)\cdot f_{s+1}(\alpha)<0$, $s\in(1,\ldots,k-1)$.
3. Если α – действительный корень многочлена $f_0(z)$, т. е. $f_0(\alpha)=0$, то многочлен $f_0(z)\cdot f_1(z)$ при $z=\alpha$ изменяет знак с минуса на плюс.

Заметим, что из свойства 2 этого определения вытекает, что в системе Штурма у соседних многочленов действительные корни не совпадают.

Определение 2. Пусть α – действительное число, не являющееся корнем многочлена $f_0(z)$, т. е. $f_0(\alpha)\neq 0$, тогда число перемен знака $W(\alpha)$ в последовательности чисел $f_0(\alpha)$, $f_1(\alpha),\ldots,f_k(\alpha)$ (нулевые значения не учитываются) называется числом перемен знаков в системе Штурма многочлена $f_0(z)$ при $z=\alpha$.

Теорема Штурма. Если действительные числа $a<b$ таковы, что $f_s(a)\neq 0$, $f_s(b)\neq 0$, $(s=0,\ldots,k-1)$ и многочлен $f_0(z)$ не имеет кратных действительных корней, тогда число действительных корней многочлена $f_0(z)$, лежащих на промежутке $[a,b]$, равно $W(a)-W(b)$ [1].

Доказательство. Очевидно, что величина $W(z)$ как функция действительного аргумента может изменяться тогда и только тогда, когда ее аргумент z при своем возрастании совпадет с одним из действительных корней α_j системы многочленов Штурма $f_0(z)$, $f_1(z)$, $\ldots,f_k(z)$, т. к. один или несколько из этих многочленов в этой точке обратятся в ноль (примут нулевые значения).

Покажем, что при увеличении величины z и ее прохождении через действительную величину α_j, не являющуюся корнем многочлена $f_0(z)$, а являющуюся одним из корней (возможно кратных) одного или нескольких многочленов $f_1(z)$, $\ldots,f_{k-1}(z)$, величина $W(z)$ не изменится. Пусть номер s такой, что $f_s(a_j)=0$, тогда из свойства 2 системы Штурма вытекает, что величины $f_{s-1}(a_j)$ и $f_{s+1}(a_j)$ разных знаков. Обозначим через $\varepsilon>0$ положительную величину, такую, что на интервале $(\alpha_j-\varepsilon,\alpha_j+\varepsilon)$ многочлены $f_i(z)$, $(0\leq i<k)$, для которых $f_i(\alpha_j)\neq 0$, сохраняют знак. Такая положительная величина всегда найдется в силу того, что эти многочлены являются непрерывными функциями и не равны нулю в точке α_j.

Тогда все тройки ($f_{s-1}(z)$, $f_s(z)$, $f_{s+1}(z)$) при изменении z от $\alpha_j-\varepsilon$ до $\alpha_j+\varepsilon$ сохраняют одну перемену знака. Действительно, в силу выбора числа $\varepsilon>0$ величины $f_{s-1}(z)$ сохраняют на интервале $(\alpha_j-\varepsilon,\alpha_j+\varepsilon)$ один и тот же знак, противоположный знаку величины $f_{s+1}(z)$, которая также сохраняет знак на этом интервале. Отсюда вытекает, что вне зависимости от того, как поменялся знак у величины $f_s(z)$ при переходе z через величину α_j , число перемен знака у этих троек равно единице. Это видно из следующего представления возможных перемен знаков – тройки (+, ?, -) или (-, ?, +) имеют одну перемену знака вне зависимости от того, как изменился знак среднего элемента.

Таким образом, если в системе многочленов Штурма выделить тройки, для которых $f_s(a_j)=0$, то многочлены $f_i(z)$ не входящие в эти тройки на интервале $(\alpha_j-\varepsilon,\alpha_j+\varepsilon)$, сохраняют свой знак, а в выделенных тройках при переходе z через величину α_j число перемен знака сохраняется и равно единице. Отсюда вытекает, что число перемен знака в системе Штурма многочлена $f_0(z)$ на интервале $(\alpha_j-\varepsilon,\alpha_j+\varepsilon)$ сохраняется неизменным, т. к. при переходе z через величину α_j перемена знаков возможна только у многочленов, равных нулю в данной точке α_j, а они находятся между многочленами разных знаков, сохраняющие эти знаки при данном переходе, что никак не влияет на общее число перемен знака.

Пусть теперь α_j – действительный корень многочлена $f_0(z)$. Из свойства 3 системы Штурма следует, что $f_1(\alpha_j)\neq 0$, но возможно $f_s(a_j)=0$ для некоторых номеров $(1<s<k)$. Возьмем число $\varepsilon>0$ таким, что на интервале $(\alpha_j-\varepsilon,\alpha_j+\varepsilon)$ многочлены $f_i(z)$, $(0\leq i<k)$, для которых $f_i(\alpha_j)\neq 0$, сохраняют знак. Тогда величина $W(z)$ уменьшается на единицу при изменении z от $\alpha_j-\varepsilon$ до $\alpha_j+\varepsilon$, т. к., во-первых, знак $f_0(z)$ меняется при $z=\alpha_j$ (кратность корня α_j равна единице по условию теоремы), а знак $f_1(z)$ сохраняется, и во-вторых, число перемен знаков в системе многочленов $f_2(z)$, $\ldots, f_k(z)$ при изменении z от $\alpha_j-\varepsilon$ до $\alpha_j+\varepsilon$ не меняется (это было доказано в первой части теоремы).

Итак, при прохождении аргумента z через действительный корень α_j многочлена $f_0(z)$ величина $W(z)$ уменьшается на единицу. Следовательно, число действительных корней многочлена $f_0(z)$, лежащих на промежутке $[a,b]$, равно $W(a)-W(b)$, т. к. при изменении z от a до b величина $W(z)$ уменьшается на число корней многочлена $f_0(z)$, лежащих на этом промежутке. Теорема доказана.

Замечание 1. Если $b\to\infty$, то величина $W(b)=W(+\infty)$ определяется числом перемен знака коэффициентов многочленов $f_0(z)$, $f_1(z),\ldots,f_k(z)$, стоящих при старших степенях z, т. к. при $z\to\infty$ поведение многочленов $f_i(z)$, $(0\leq i<k)$ и их знаки определяются знаками коэффициентов, стоящих при старшей степени z.

Нетрудно видеть, что величина $W(0)$ равна числу перемен знаков в последовательности $f_0(0)$, $f_1(0),\ldots,f_k(0)$, т. е. числу перемен знаков среди свободных членов многочленов $f_0(z)$, $f_1(z)$, $\ldots, f_k(z)$.

При $a\to-\infty$ величина $W(a)=W(-\infty)$ определяется числом перемен знака в последовательности

$$a_{m_0}\cdot(-1)^{m_o}, a_{m_1}\cdot(-1)^{m_1}, \ldots, a_{m_k}\cdot(-1)^{m_k},$$

где m_i степень многочлена $f_i(z)$, а a_{m_i} его коэффициент, стоящий при старшей степени z.

Таким образом, у многочлена $f_0(z)$ число отрицательных вещественных корней равно величине $W(-\infty)-W(0)$, а число положительных вещественных корней равно величине $W(0)-W(+\infty)$.

Замечание 2. Если многочлен $f_0(z)$ имеет кратные корни на промежутке $[a,b]$, то величина $W(a)-W(b)$ есть число различных действительных корней из интервала $[a,b]$.

Замечание 3. Если $f_0(z)$ – многочлен с действительными коэффициентами, не имеющий кратных действительных корней, то всегда можно построить систему многочленов Штурма, разделив многочлен $f_0(z)$ на многочлен $f_1(z)=f_0'(z)$ по алгоритму Евклида, заменив знаки у всех остатков на противоположные $R_s(z)=-f_s(z)$.

$$\begin{gathered} f_0(z)=f_1(z)Q_1(z)-f_2(z) \\ f_1(z)=f_2(z)Q_2(z)-f_3(z) \\ \vdots \\ f_{s-1}(z)=f_s(z)Q_s(z)-f_{s+1}(z) \\ f_{s-2}(z)=f_{s-1}(z)Q_{s-1}(z)-f_s(z) \\ \vdots \\ f_{k-2}(z)=f_{k-1}(z)Q_{k-1}(z)-f_k(z) \end{gathered} \tag{1}$$

Действительно:

1. Многочлены $f_0(z)$ и $f_1(z)$ имеют в силу замечания различные корни.

2. Многочлен $f_k(z)$ в силу теоремы является числом и не имеет действительных корней.

3. Если действительная величина α является корнем многочлена $f_0(z)$, т. е. $f_0(\alpha)=0$ и многочлен $f_0(z)$ в этой точке возрастает, то $f_0'(\alpha)>0$ и, следовательно, многочлен $f_0(z)\cdot f_1(z)$ меняет в этой точке знак с минуса на плюс. Если же многочлен $f_0(z)$ в этой точке убывает, то $f_0'(\alpha)<0$ и, следовательно, многочлен $f_0(z)\cdot f_1(z)$ также меняет в этой точке знак с минуса на плюс.

4. Если величина $f_s(\alpha)=0$, то величины $f_{s-1}(\alpha)\neq 0$ и $f_{s+1}(\alpha)\neq 0$, а величина $f_{s-1}(\alpha)f_{s+1}(\alpha)<0$. Ибо при выполнении хотя бы одного из равенств $f_{s-1}(\alpha)=0$ или $f_{s+1}(\alpha)=0$ из формул (1) вытекает, что справедливо и второе равенство и далее по цепочке формул (1) выполняются соотношения

$$f_{s-2}(\alpha)=0,\ldots,\ f_1(\alpha)=0,\ f_0(\alpha)=0,$$

что противоречит п. 1. Итак, мы показали, что если $f_s(\alpha)=0$, то $f_{s-1}(\alpha)\neq 0$ и $f_{s+1}(\alpha)\neq 0$. Тогда, умножая величину $f_{s-1}(\alpha)$ на $f_{s+1}(\alpha)$, из формул (1) получим

$$f_{s-1}(\alpha)f_{s+1}(\alpha)=-f_{s+1}^2(\alpha)<0.$$

Из пунктов 1-5 вытекает, что построенная система многочленов (1) является системой Штурма.

Замечание 4. В предыдущем разделе мы показали, что любой многочлен можно представить в виде произведения простых многочленов, имеющих только простые корни. Это позволяет применять метод Штурма к любым многочленам, предварительно представив их в виде произведения простых многочленов, применяя далее этот метод отдельно для каждого из сомножителей.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (пр. № 10-08-00624, 10-07-00286).

Литература

1. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1971. 431 с.
2. Зубов А. В. Стабилизация и управление в динамических системах. СПб.: СПбГУ, 2007. 132 с.
3. Стрекопытова М. В. Исследование равновесных движений. СПб.: СПбГУ, 2007. 95 с.
4. Зубова А. Ф. Математические методы исследования надежности колебательных систем в технике и технологических процесса. СПб.: СПбГУ, 2007. 339 с.

5. Зубов А. В., Зубов Н. В. Теория устойчивости и применение к задачам численного анализа. СПб.: Изд-во НИИ Химии СПбГУ, 2010. 102 с.

6.

УДК 519.71;62.50

В.В. Осипов

ИДЕЙНЫЕ ОСНОВЫ МЕТОДА ТОЧЕЧНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

Предлагается приближенно-аналитический аппарат математического моделирования линейных динамических систем, названный методом точечных представлений, использующий точечное представление функций и операторов.

Ключевые слова: метод точечных представлений, точечное моделирование.

Метод точечных представлений как метод математического моделирования динамических систем, описываемых линейными дифференциальными уравнениями различного типа, обладает большими аналитическими возможностями, весьма конструктивен и эффективен. Эти качества метода связаны прежде всего с особыми алгебраическими свойствами аналитического аппарата, которые используются для описания точечных представлений как конечномерных моделей функции и операторов.

В основе метода лежит простая идея.

Любой непрерывной на [0,1] функции $f(\tau)$ и, следовательно, элементу гильбертова пространства $L^2(0,1)$ ставится в соответствие N-мерный вектор

$$f_T = \mathrm{Colon}[f(\tau_1^{(N)}),\ldots f(\tau_\nu^{(N)}),\ldots f(\tau_N^{(N)})], \quad (1)$$

составленный из отсчетов этой функции в узлах ортогональной N-сетки:

$$\left\{\tau_\nu^{(N)} / Cos N\pi\tau_\nu^{(N)} = 0\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \tau_\nu^{(N)} = \frac{2\nu-1}{2N} \quad (\nu = \overline{1,N}). \quad (2)$$

Вектор f_T назван точечным изображающим вектором функции $f(\tau)$, ассоциированным с N-сеткой (2), которая является чебышевской сеткой.

Установлено, что такая сетка – наилучшая среди всевозможных ортогональных сеток по целому ряду показателей качества интерполяционного приближения функции и, следовательно, интерполяционные конструкции различного типа, восстанавливающие функцию $f(\tau)$ по ее точечному изображающему N-вектору (1) – наиболее точные приближающие модели этой функции.

Рассмотрим теперь пространство $M(0,1)$ всех кусочно-непрерывных функций, определенных на [0,1]. Сделаем его нормированным, вводя Sup-норму:

$$\|f\| = \mathop{Sup}_{\tau\in[0,1]} |f(\tau)| \qquad f(\tau)\in M(0,1). \quad (3)$$

Тогда $C(0,1)$ – пространство всех непрерывных на [0,1] функций – становится подпространство в M(0,1), причем

$$\|\varphi\| = \mathop{Sup}_{\tau\in[0,1]} |\varphi(\tau)| = \mathop{Max}_{\tau\in[0,1]} |\varphi(\tau)|$$

$$\varphi(\tau)\in C(0,1)\subset M(0,1).$$

Относительно введенной нормы пространства $M(0,1)$ и $C(0,1)$ окажутся полными, т. е. банаховыми пространствами. Заметим, что пространство $M(0,1)$ одновременно является и гильбертовым пространством $L^2(0,1)$. Поскольку произве-