одному, т. е. этот многочлен (с точностью до сомножителя) имеет вид

$$P_1(z) = \prod_{j=1}^{s} (z - z_j), \; P(z) = R_k(z) P_1(z). \quad (10)$$

Разделив многочлен $R_k(z)$ на его производную $R_k'(z)$ по алгоритму Евклида, получим в результате их НОД – многочлен $R_{k1}(z)$. Если поделить многочлен $R_k(z)$ на многочлен $R_{k1}(z)$, то получим многочлен $P_2(z)$, корнями которого будут все корни многочлена $R_k(z)$, взятые по одному или, что то же самое, все корни многочлена $P(z)$, имеющие кратности два и более и взятые по одному. Действуя и далее подобным образом, можно построить многочлены $P_i(z)$, корнями которых будут все корни многочлена $P(z)$, взятые по одному и имеющие кратности i и более. Таким образом, можно получить представление многочлена $P(z)$ в виде произведения простых многочленов $P_i(z)$:

$$P(z) = \prod_{i=1}^{r} P_i(z), \quad r = \max_j k_j. \quad (11)$$

Добавим, что в результате построения многочленов $P_i(z)$ одновременно становится известно число различных корней z_j, $(j = 1, \ldots, s)$ исходного многочлена $P(z)$ и их кратностей k_j.

Если многочлен $P(z)$ имеет только простые корни, то, взяв в алгоритме Евклида (5), (8) вместо многочлена $S(z)$ многочлен $P'(z)$, получим в результате его применения остаток – многочлен нулевой степени $R_k(z)$, т. е. некоторое число, т. к. многочлены $P(z)$ и $P'(z)$ не имеют в данном случае общих корней.

Литература

1. Блистанова Л. Д., Зубова М. Н. Устойчивость по первому нелинейному приближению в системах с последействием. // Наука и техника транспорта 2002. № 2. С. 18-20.
2. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1971. 431 с.
3. Поляк Б. Т., Щербаков П. С. Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002. 303 с.
4. Постников М. М. Устойчивые многочлены. М.: Наука, 1981.
5. Зубов А. В., Зубов Н. В., Лаптинский В. Н. Динамика управляемых систем. СПб.: Изд-во ВВМ, 2008. С. 336.

УДК 517.929

Н.В. Зубов*, И.В. Зубов, В.И. Зубов

ИССЛЕДОВАНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ

Решается вопрос о том, является ли заданное множество возможных значений коэффициентов характеристических многочленов множеством коэффициентов многочлена Гурвица; приводятся примеры поиска и описания множества значений коэффициентов многочленов Гурвица. Цель статьи состоит в том, чтобы достаточно полно рассмотреть задачу исследования асимптотической устойчивости стационарных систем. Приведенная теорема Харитонова в значительной степени помогает решить проблему робастной устойчивости.

* - автор, с которым следует вести переписку.

Ключевые слова: линейное преобразование, квадратная матрица, полуплоскость, многочлен, диагональный минор матрицы.

Часто на практике коэффициенты характеристических многочленов исходной системы зависят от k технических параметров α_i моделируемого объекта, которые могут быть модифицированы в процессе проектирования, изготовления и эксплуатации и, следовательно, образуют целое множество возможных значений коэффициентов характеристических многочленов $a_i(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)$, $i=0,\ldots,n$. Решение вопроса о том, является ли заданное множество возможных значений коэффициентов характеристических многочленов множеством коэффициентов многочлена Гурвица, всегда достаточно сложен. Если бы удалось найти или каким-либо образом достаточно просто описать все множество значений коэффициентов многочленов Гурвица, то задача исследования асимптотической устойчивости стационарных систем была бы решена полностью. Теорема Харитонова в значительной степени помогает решить эту проблему робастной устойчивости [1].

Для того, чтобы далее упростить решение поставленной выше задачи робастной устойчивости, рассмотрим некоторые допустимые линейные преобразования коэффициентов многочлена Гурвица, оставляющие эти многочлены многочленами Гурвица.

Определение 1. Любое линейное преобразование $B = DA$ коэффициентов многочлена Гурвица

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n, \tag{1}$$

оставляющее его многочленом Гурвица

$$F(z) = b_0 + b_1 z + \ldots + b_n z^n, \tag{2}$$

будем называть допустимым линейным преобразованием. Здесь $A = (a_0,\ldots,a_n)^*$, $B = (b_0,\ldots,b_n)^*$, D – квадратная матрица.

Замечание 1. Очевидно, что линейные преобразования коэффициентов многочлена Гурвица (1)

$$b_i = \alpha a_i\ ,\ b_i = \alpha^i a_i\ ,\ (i = 0,1,\ldots,n)\ , \tag{3}$$

где $\alpha > 0$ – произвольное положительное число, являются допустимыми линейными преобразованиями. Это вытекает из того, что если все корни многочлена $f(z)$ лежат в левой полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$, то корни многочленов $F(z) = \alpha f(z)$ и $F(z) = f(\alpha z)$ при произвольном положительном числе $\alpha > 0$ также лежат в левой полуплоскости комплексного переменного.

Теорема 1. Линейные преобразования коэффициентов многочлена Гурвица (1)

$$b_{2i} = \alpha a_{2i},\ b_{2i+1} = \beta a_{2i+1},\ (i = 0,1,\ldots,n), \tag{4}$$

где $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ произвольные положительные числа, являются допустимыми линейными преобразованиями.

Доказательство. Так как многочлен (1) является многочленом Гурвица, то для матрицы Гурвица этого многочлена

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

выполняются условия Рауса–Гурвица положительности главных миноров этой матрицы

$$\Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0,\ldots,\ \Delta_n = a_n \Delta_{n-1} > 0.$$

Нетрудно видеть, что матрица Гурвица для многочлена (2), коэффициенты которого находятся по формулам (4), получается из матрицы Гурвица для исходного многочлена (1) умножением ее четных столбцов на число $\alpha > 0$, а нечетных на число $\beta > 0$. Очевидно, что главные миноры этих матриц связаны соотношениями

$$\begin{gathered} \overline{\Delta}_{2k} = \alpha^k \beta^k \Delta_{2k} > 0, \\ \overline{\Delta}_{2k+1} = \alpha^k \beta^{k+1} \Delta_{2k+1} > 0,\ (k = 0,1,\ldots), \end{gathered} \tag{5}$$

где $\overline{\Delta}_k$ – главные миноры матрицы Гурвица преобразованного многочлена (2).

Отсюда вытекает, что преобразованный многочлен (2) является многочленом Гурвица, т. к. для главных миноров матрицы Гурвица этого многочлена выполняются условия Рауса–Гурвица положительности главных миноров этой матрицы. Теорема доказана.

Теорема 2. Линейные преобразования коэффициентов многочлена Гурвица (1)

$$b_{2i} = \alpha a_{2i} + \gamma a_{2i+1},\ b_{2i+1} = \\ = \beta a_{2i+1},\ (i = 0, 1, \ldots),\ a_{n+1} = 0, \quad (6)$$

где $\alpha > 0$, $\gamma > 0$ и $\beta > 0$ произвольные положительные числа, являются допустимыми линейными преобразованиями.

Доказательство. По аналогии с доказательством теоремы 1 заметим, что главные миноры матриц Гурвица исходного и преобразованного многочленов связаны соотношениями (5). Это вытекает из известных свойств определителей и того, что матрица Гурвица преобразованного многочлена (2) получается из матрицы Гурвица исходного многочлена (1) умножением ее четных столбцов на число $\alpha > 0$, а нечетных на число $\beta > 0$ и прибавлением к четным столбцам предыдущих нечетных, умноженных на число $\gamma > 0$.

Отсюда вытекает, что многочлен (2), коэффициенты которого находятся по формулам (6), является многочленом Гурвица, т. к. все главные миноры матрицы Гурвица этого многочлена положительны и, следовательно, выполняются условия критерия Рауса–Гурвица. Теорема доказана.

Замечание 2. Теоремы 1 и 2 можно легко доказать с помощью критерия Михайлова, который дает необходимые и достаточные условия того, что рассматриваемый многочлен является многочленом Гурвица в терминах количества и расположения корней многочленов, являющихся вещественной и мнимой частью годографа Михайлова. Далее при доказательстве теорем мы будем использовать подход Михайлова, т. к. использование критерия Рауса–Гурвица будет не всегда очевидно.

Докажем, например, теорему 1, используя критерий Михайлова.

Доказательство. Пусть годограф Михайлова многочлена (1), являющегося многочленом Гурвица, имеет вид

$$f(i\omega) = g(\omega) + ih(\omega), \quad (7)$$

$$g(\omega) = a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - a_6\omega^6 + \ldots,$$

$$h(\omega) = a_1\omega - a_3\omega^3 + a_5\omega^5 - a_7\omega^7 + \ldots,$$

тогда годограф Михайлова многочлена (2), коэффициенты которого находятся по формулам (6), имеет вид

$$F(i\omega) = G(\omega) + iH(\omega) = \\ = \alpha g(\omega) + \frac{\gamma}{\omega} h(\omega) + i\beta h(\omega). \quad (8)$$

Так как многочлен (1) является многочленом Гурвица, то из критерия Михайлова следует, что многочлены $g(\omega)$ и $h(\omega)$ имеют в сумме n неотрицательных корней, которые не совпадают и перемежаются $0 = \omega_1 < \omega_2 < \ldots < \omega_n$. Покажем, что корни многочленов $G(\omega)$ и $H(\omega)$ обладают теми же свойствами.

Действительно, многочлен $H(\omega) = \beta h(\omega)$ имеет те же корни ω_i^*, что и многочлен $h(\omega)$:

$$0 = \omega_1 = \omega_1^* < \omega_3 = \omega_3^* < \ldots < \omega_m = \omega_m^*,$$

($m = n$, если n нечетное; $m = n - 1$, если n четное).

Заметим, что многочлен $\alpha g(\omega)$ также имеет те же корни, что и многочлен $g(\omega)$, а многочлен $\frac{\gamma}{\omega} h(\omega)$ имеет те же корни, что и многочлен $h(\omega)$, кроме корня $\omega_1 = 0$. Так как многочлены $g(\omega)$ и $h(\omega)$ принимают поочередно положительные и отрицательные значения, то можно написать

$$G(\omega_1) = \alpha a_0 + \gamma a_1 > 0,$$

$$G(\omega_2) = \frac{\gamma}{\omega_2} h(\omega_2) > 0,$$

$$G(\omega_3) = \alpha g(\omega_3) < 0,$$

$$G(\omega_4) = \frac{\gamma}{\omega_4} h(\omega_4) < 0,$$

$$G(\omega_5)=\alpha g(\omega_5)>0,$$
$$G(\omega_6)=\frac{\gamma}{\omega_6}h(\omega_6)>0,$$
$$G(\omega_{2k+1})=\alpha g(\omega_{2k+1}),$$
$$G(\omega_{2k})=\frac{\gamma}{\omega_{2k}}h(\omega_{2k}),$$

где знаки последних величин зависят от четности k. Таким образом, корни ω^*_{2i} многочлена $G(\omega)$ расположены в интервалах

$$\omega^*_2\in(\omega_2,\omega_3),\ \omega^*_4\in(\omega_4,\omega_5),$$
$$\omega^*_6\in(\omega_6,\omega_7),\ldots,\ \omega^*_{2k}\in(\omega_{2k},\omega_{2k+1}),$$

т. к. на границах этих промежутков многочлен имеет значения разных знаков. Эти условия можно переписать в виде неравенств:

$$\omega_2<\omega^*_2<\omega_3,\ \omega_4<\omega^*_4<\omega_5,\ \omega_6<\omega^*_6<\omega_7,\ldots,$$
$$,\ldots,\omega_{2k}<\omega^*_{2k}<\omega_{2k+1}.$$

Из сказанного выше следует, что многочлены $G(\omega)$ и $H(\omega)$ имеют в точности n неотрицательных корня, которые не совпадают и перемежаются. Отсюда, по критерию Михайлова, вытекает, что преобразованный многочлен является многочленом Гурвица. Теорема доказана.

Теорема 3. Если многочлен Гурвица (1) является многочленом нечетной степени $n=2k+1$, то линейные преобразования его коэффициентов

$$b_{2i}=\alpha a_{2i},\ b_{2i+1}= \\ =\beta a_{2i+1}+\gamma a_{2i},\ (i=0,1,\ldots), \tag{9}$$

где $\alpha>0$, $\gamma>0$ и $\beta>0$ произвольные положительные числа, являются допустимыми линейными преобразованиями.

Доказательство. Пусть годограф Михайлова многочлена (1), являющегося многочленом Гурвица, имеет вид (7), тогда годограф Михайлова многочлена (2), коэффициенты которого находятся по формулам (9), имеет вид

$$F(i\omega)=G(\omega)+iH(\omega)= \\ =\alpha g(\omega)+i(\beta h(\omega)+\gamma\omega g(\omega)) \tag{10}$$

Так как многочлен (1) является многочленом Гурвица, то многочлены $g(\omega)$ и $h(\omega)$ имеют в сумме n неотрицательных корня, которые не совпадают и перемежаются $0=\omega_1<\omega_2<\ldots<\omega_n$. Покажем, что корни многочленов $G(\omega)$ и $H(\omega)$ обладают теми же свойствами.

Действительно, многочлен $G(\omega)=\alpha g(\omega)$ имеет те же корни ω^*_{2i}, что и многочлен $g(\omega)$

$$\omega_2=\omega^*_2<\omega_4=\omega^*_4\ldots<\omega_{2k}=\omega^*_{2k}, \tag{11}$$

Заметим, что многочлен $\beta h(\omega)$ также имеет те же корни, что и многочлен $h(\omega)$, а многочлен $\gamma\omega g(\omega)$ имеет те же корни, что и многочлен $g(\omega)$ с добавлением корня $\omega_1=0$. Так как многочлены $g(\omega)$ и $h(\omega)$ принимают поочередно положительные и отрицательные значения, то можно написать

$$H(\omega_1)=0,\ H(\omega_2)=\beta h(\omega_2)>0,$$
$$H(\omega_3)=\gamma\omega_3 g(\omega_3)<0,$$
$$H(\omega_4)=\beta h(\omega_4)<0,$$
$$H(\omega_5)=\gamma\omega_5 g(\omega_5)>0,$$
$$H(\omega_6)=\beta h(\omega_6)>0,\ldots,$$
$$H(\omega_{2k})=\beta h(\omega_{2k}),$$
$$H(\omega_{2k+1})=\gamma\omega_{2k+1}g(\omega_{2k+1}),$$

где знаки последних величин зависят от четности k. Таким образом, корни ω^*_{2k+1} многочлена $H(\omega)$ расположены в интервалах

$$0=\omega_1=\omega^*_1,\ \omega_2<\omega^*_3<\omega_3,$$
$$\omega_4<\omega^*_5<\omega_5,\ldots,\ \omega_{2k}<\omega^*_{2k+1}<\omega_{2k+1},$$

т. к. на границах этих промежутков этот многочлен имеет значения разных знаков. Из последних неравенств и неравенств (11) следует, что многочлены $G(\omega)$ и $H(\omega)$ имеют в сумме $n=2k+1$ неотрицательных корня $0=\omega^*_1<\omega^*_2<\ldots<\omega^*_{2k+1}$, которые не совпадают и перемежаются. Отсюда вытекает, что преобразованный многочлен $F(z)$ является многочленом Гурвица и, следовательно, линейное преобразование коэффициентов (9) является допустимым. Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (пр. № 10-08-00624, 10-07-00286).

Литература

1. Харитонов В.Л. Асимптотическая устойчивость семейства систем линейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14, № 11. С. 2086-2088.

2. Биркгоф Дж. Д. Динамические системы. М.; Л., 1941. 320 с.

3. Блистанова Л.Д. Конструктивные методы исследования устойчивости систем с последействием. М. , 2004. 203 с.

4. Критерий робастной устойчивости для стационарных систем большого порядка / Л. Д. Блистанова и [и др.] // Труды средневолжского математического о-ва. 2002. Т 3-4, № 1. С. 250-251.

5. Метод понижения порядка при исследовании динамических свойств систем автоматического регулирования / Л. Д.Блистанова, И. В. Зубов, Н. В Зубов, Н. А. Северцев // Автоматика и телемеханика. 2005. № 2. С. 17-22.

6. Конструктивные методы теории устойчивости и их применение к задачам численного анализа / Л.Д. Блистанова [и др.]. СПб.: Изд-во НИИ Химии СПбГУ, 2002. 119 с.

7. Исследование устойчивости решений дифференциальных уравнений / А. В. Зубов [и др.]. СПб.: Мобильность плюс, 2009. 224 с.

УДК 517.929

Н.В. Зубов*, О.В. Мутлу, М.Н. Зубова

ЛОКАЛИЗАЦИЯ ВЕЩЕСТВЕННЫХ КОРНЕЙ С ПОМОЩЬЮ АЛГОРИТМА ШТУРМА

В статье приведена известная теорема Штурма и реализующий эту теорему алгоритм Евклида, позволяющий определить число отрицательных и положительных действительных корней многочлена.

Ключевые слова: многочлен, корень, интервал, число перемен знака в системе, последовательность.

Одной из основных задач современного этапа развития науки, техники и технологии являются фундаментальные исследования в области моделирования, управления, качественного и количественного анализа динамики сложных управляемых систем. В связи с усложнением технических средств и систем управления необходимо разрабатывать все более тонкие качественные и количественные методы исследования поведения решений динамических систем, построения для этих систем программных управлений и методов их синтеза, критериев устойчивого, надежного и безопасного функционирования систем, имеющих различные особенности [4].

Большинство математических моделей, используемых при описании сложных технических систем и технологических процессов, претендующих на некоторую целостность, представляют собой динамические системы, функционирование которых описывается системами обыкновенных дифференциальных уравнений. Если проводить исследование уп-

* - автор, с которым следует вести переписку.