вания / И. В. Давыденко [и др.] // Электрические станции. 1997. № 6. С. 25-27.

УДК 517.929

А.Ф. Зубова*, М.В. Стрекопытова, О.А. Зубова

РАЗБИЕНИЕ МНОГОЧЛЕНА НА ПРОИЗВЕДЕНИЕ ПРОСТЫХ МНОГОЧЛЕНОВ С ПОМОЩЬЮ АЛГОРИТМА ЕВКЛИДА

На основе применения алгоритма Евклида предлагаются методы разбиения исходного характеристического многочлена на произведение многочленов, имеющих только простые корни (простые многочлены). Это позволяет не только определить кратность каждого корня исходного многочлена, но и отделить все кососимметричные корни, включающие в себя и мнимые корни этого многочлена. Такое разбиение не только ускоряет, но и упрощает любой последующий анализ и нахождение самих корней.

Ключевые слова: мнимая ось, простой корень, равенство, кратность, остаток от деления, четная степень.

Пусть задан многочлен $P(z)$ степени n, в общем случае с комплексными коэффициентами [1]

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0 . \qquad (1)$$

Будем считать, что он имеет s различных корней z_j, $(j = 1, \ldots, s)$ с кратностями k_j. Тогда по основной теореме алгебры имеет место равенство

$$P(z) = a_n \prod_{j=1}^{s} (z - z_j)^{k_j}, \quad \sum_{j=1}^{s} k_j = n . \qquad (2)$$

Справедлива следующая теорема [2] .

Теорема 1. Если величина z_j является корнем многочлена $P(z)$ кратности k_j, то она также является корнем многочлена $P'(z)$ кратности $k_j - 1$.

Доказательство. Перепишем равенство (2) в виде

$$P(z) = (z - z_j)^{k_j} S(z) , \qquad (3)$$

где величина z_j не является корнем многочлена $S(z)$ степени $n - k_j$. Продифференцировав равенство (3), получим

$$P'(z) = k_j (z - z_j)^{k_j - 1} S(z) + (z - z_j)^{k_j} S'(z) =$$
$$= (z - z_j)^{k_j - 1} Q(z).$$

Очевидно, что величина z_j не является корнем многочлена $Q(z)$, т. к. $Q(z_j) = k_j S(z_j) \neq 0$. Отсюда вытекает, что величина z_j является корнем кратности $k_j - 1$ многочлена $P'(z)$. Теорема доказана.

Из теоремы 1 вытекает, что если величина z_j является простым корнем многочлена $P(z)$, т. е. имеет единичную кратность, то она не является корнем многочлена $P'(z)$. Таким образом, если многочлен $P(z)$ имеет только простые корни (корни единичной кратности), то многочлены $P(z)$ и $P'(z)$ не имеют общих корней.

Рассмотрим теперь, как алгоритм получения наибольшего общего делителя (НОД) двух целых чисел M и N Евклида можно применить для выделения общих корней двух заданных многочленов.

Пусть заданы два многочлена, $P(z)$ степени n и $S(z)$ степени m ($m \leq n$), с комплексными коэффициентами

* - автор, с которым следует вести переписку.

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0 ,$$
$$S(z) = b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \ldots + b_0 . \qquad (4)$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. С помощью алгоритма Евклида за k $(k < m)$ шагов можно построить многочлен $R_k(z)$ (найти все его коэффициенты), корнями которого являются общие корни двух заданных многочленов $P(z)$ и $S(z)$ степени n и m ($m \le n$) (считая с их кратностями), и только они [3, 4].

Доказательство. Поделим многочлен $P(z)$ на многочлен $S(z)$

$$P(z) = S(z) Q_1(z) + R_1(z) , \qquad (5)$$

обозначив частное от деления как многочлен $Q_1(z)$ степени $n - m$, а остаток от деления – как многочлен $R_1(z)$ степени меньшей, чем m. Покажем, что такое представление является единственным.

Так как многочлены $P(z)$ степени n и $S(z)$ степени m имеют вид (4), то коэффициенты c_i $(i = n - m, \ldots, 0)$ многочлена $Q_1(z)$

$$Q_1(x) = c_{n-m} x^{n-m} + c_{n-m-1} x^{n-m-1} + \ldots + c_0 \qquad (6)$$

последовательно находятся по формулам

$$a_n = b_m c_{n-m},\ a_{n-1} = b_m c_{n-m-1} + b_{m-1} c_{n-m}, \ldots ,$$
$$a_m = b_m c_0 + b_{m-1} c_1 + \ldots + b_0 c_{n-m}$$
$$c_{n-m} = \frac{a_n}{b_m},\ c_{n-m-1} = \frac{a_{n-1} - b_{m-1} c_{n-m}}{b_m}, \ldots , \qquad (7)$$
$$c_0 = \frac{a_m - b_0 c_{n-m} - b_1 c_{n-m-1} - \ldots - b_m c_0}{b_m} .$$

Эти формулы легко получить, если подставить выражения (4) в уравнение (5) и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях z. Из формул (7), в частности, вытекает, что коэффициенты многочлена $Q_1(z)$ однозначно определены, а многочлен $R_1(z)$ имеет степень меньше, чем m.

Повторяя последовательно процесс деления многочлена на многочлен (5), взяв вместо делимого делитель, определенный на предыдущем шаге, а вместо делителя остаток, полученный на предыдущем шаге, получим следующую цепочку равенств, однозначно определяющих входящие в него многочлены:

$$\begin{aligned} S(z) &= R_1(z) Q_2(z) + R_2(z) , \\ R_1(z) &= R_2(z) Q_3(z) + R_3(z) , \\ &\vdots \\ R_{k-2}(z) &= R_{k-1}(z) Q_k(z) + R_k(z) , \\ R_{k-1}(z) &= R_k(z) Q_{k+1}(z) . \end{aligned} \qquad (8)$$

Степени остатков на каждом шаге алгоритма убывают и, следовательно, после конечного числа шагов один из остатков $R_{k-1}(z)$ должен разделиться нацело на следующий остаток $R_k(z)$. Это обязательно произойдет по крайней мере тогда, когда остаток $R_k(z)$ будет иметь нулевую степень (окажется числом).

Покажем, что полученный многочлен $R_k(z)$ имеет корни, являющиеся одновременно корнями многочленов $P(z)$ и $S(z)$, и наоборот.

Пусть величина z_0 является корнем многочлена $R_k(z)$, т. е. $R_k(z_0) = 0$. Подставляя значение $R_k(z_0) = 0$ в последнее равенство (8), получим, что $R_{k-1}(z_0) = 0$. Продолжая последовательно подставлять вычисляемые значения многочленов $R_i(z_0) = 0$ в предыдущие равенства (8), будем получать, что $R_{i-1}(z_0) = 0$. Окончательно будем иметь $R_1(z_0) = 0$, $S(z_0) = 0$, а из формулы (5) получим $P(z_0) = 0$.

Предположим теперь, что величина z_0 является одновременно корнем многочленов $P(z)$ и $S(z)$, т. е. $P(z_0) = 0$ и $S(z_0) = 0$. Подставляя эти величины в уравнение (5), получим, что $R_1(z_0) = 0$. Далее, из второго равенства формулы (8) будем иметь $R_2(z_0) = 0$. Продолжая последовательно подставлять полученные величины $R_i(z_0) = 0$ в последующие равенства формулы (8), получим, что $R_{i+1}(z_0) = 0$ и, следовательно, $R_k(z_0) = 0$.

Покажем, что если величина z_0 является кратным корнем для делимого и делителя, то она является корнем кратности l и для частного, где l – наименьшая кратность этого корня у делимого и делителя. Действительно, рассмотрим процесс деления, описываемый формулой (5). Т. к. величина z_0 является корнем кратности l для многочленов $P(z)$ и $S(z)$, можно написать:

$P(z)=(z-z_0)^l P_0(z), \quad S(z)=(z-z_0)^l S_0(z),$

где $P_0(z_0)\neq 0$ или $S_0(z_0)\neq 0$. Выше было показано, что величина z_0 является корнем многочлена $R_1(z)$, т. е.

$$R_1(z)=(z-z_0)R_{11}(z).$$

Подставляя эти выражения в формулу (5) и сокращая на величину $(z-z_0)$, получим

$(z-z_0)^{l-1}P_0(z)=(z-z_0)^{l-1}S_0(z)Q_1(z)+R_{11}(z).$

Из этого равенство видно, что величина z_0 является корнем многочлена $R_{11}(z)$, т. е. $R_{11}(z)=(z-z_0)R_{12}(z)$. Подставляя это выражение в предыдущее равенство и сокращая на величину $(z-z_0)$, получим

$(z-z_0)^{l-2}P_0(z)=(z-z_0)^{l-2}S_0(z)Q_1(z)+R_{12}(z).$

Продолжая этот процесс далее, окончательно получим, что остаток $R_1(z)$ имеет вид $R_1(z)=(z-z_0)^l R_{1l}(z)$, т. е. величина z_0 является корнем кратности не менее l для частного $R_1(z)$ в формуле (5).

Итак, мы показали, что частное от деления двух многочленов имеет корни, являющиеся общими корнями делимого и делителя, причем кратность этих корней у частного не меньше наименьшей кратности этого корня у делимого и делителя. Заметим, что в равенствах из цепочки равенств (8) делимое и делитель для любого равенства являются делителем и остатком из предыдущего равенства. Так как делитель и остаток из формулы (5) выступают как делимое и делитель в первом из равенств цепочки равенств (8), то величина z_0 также является корнем кратности не менее l для частного $R_k(z)$.

Покажем теперь, что величина z_0 является в точности корнем кратности l для частного $R_k(z)$. Предположим, что кратность этого корня для многочлена $R_k(z)$ больше l, т. е. многочлен $R_k(z)$ представим в виде $R_k(z)=(z-z_0)^{l+1}R_0(z)$. Подставляя это выражение в равенства из цепочки равенств (8) в обратном порядке, начиная с последнего, получим, что все многочлены $R_k(z),\dots,\ R_1(z),\ P(z),\ S(z)$ имеют множитель $(z-z_0)^{l+1}$. Пришли к противоречию с тем фактом, что величина z_0 является в точности корнем кратности l для одного из многочленов $P(z)$ и $S(z)$.

Рассматривая далее другие общие корни многочленов $P(z)$ и $S(z)$, получим, что остаток $R_k(z)$ имеет только корни, являющиеся общими корнями многочленов $P(z)$ и $S(z)$, причем любой корень многочлена $R_k(z)$ имеет кратность, совпадающую с наименьшей кратностью этого корня для многочленов $P(z)$ и $S(z)$. Теорема доказана.

Если в качестве многочлена $S(z)$ в алгоритме Евклида (5), (8) взять многочлен $P'(z)$, то многочлен $R_k(z)$, являющийся остатком от их деления, имеет в качестве своих корней только кратные корни многочлена $P(z)$, а их кратности на единицу меньше кратности этих же корней у многочлена $P(z)$. Это непосредственно вытекает из теорем 1-2. Таким образом, если многочлен $P(z)$ имеет вид (2), то с точностью до постоянного множителя многочлен $R_k(z)$ имеет вид

$$R_k(z)=\prod_{j=1}^{s}(z-z_j)^{k_j-1}. \qquad (9)$$

Нетрудно видеть, что если разделить многочлен $P(z)$ на полученный многочлен (9), то частным от их деления будет многочлен $P_1(z)$, корнями которого будут все корни многочлена $P(z)$, взятые по одному, т. е. этот многочлен (с точностью до сомножителя) имеет вид

$$P_1(z)=\prod_{j=1}^{s}(z-z_j),\; P(z)=R_k(z)P_1(z). \quad (10)$$

Разделив многочлен $R_k(z)$ на его производную $R_k'(z)$ по алгоритму Евклида, получим в результате их НОД – многочлен $R_{k1}(z)$. Если поделить многочлен $R_k(z)$ на многочлен $R_{k1}(z)$, то получим многочлен $P_2(z)$, корнями которого будут все корни многочлена $R_k(z)$, взятые по одному или, что то же самое, все корни многочлена $P(z)$, имеющие кратности два и более и взятые по одному. Действуя и далее подобным образом, можно построить многочлены $P_i(z)$, корнями которых будут все корни многочлена $P(z)$, взятые по одному и имеющие кратности i и более. Таким образом, можно получить представление многочлена $P(z)$ в виде произведения простых многочленов $P_i(z)$:

$$P(z)=\prod_{i=1}^{r}P_i(z),\quad r=\max_j k_j. \quad (11)$$

Добавим, что в результате построения многочленов $P_i(z)$ одновременно становится известно число различных корней z_j, $(j=1,\ldots,s)$ исходного многочлена $P(z)$ и их кратностей k_j.

Если многочлен $P(z)$ имеет только простые корни, то, взяв в алгоритме Евклида (5), (8) вместо многочлена $S(z)$ многочлен $P'(z)$, получим в результате его применения остаток – многочлен нулевой степени $R_k(z)$, т. е. некоторое число, т. к. многочлены $P(z)$ и $P'(z)$ не имеют в данном случае общих корней.

Литература

1. Блистанова Л. Д., Зубова М. Н. Устойчивость по первому нелинейному приближению в системах с последействием. // Наука и техника транспорта 2002. № 2. С. 18-20.

2. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1971. 431 с.

3. Поляк Б. Т., Щербаков П. С. Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002. 303 с.

4. Постников М. М. Устойчивые многочлены. М.: Наука, 1981.

5. Зубов А. В., Зубов Н. В., Лаптинский В. Н. Динамика управляемых систем. СПб.: Изд-во ВВМ, 2008. С. 336.

УДК 517.929

Н.В. Зубов*, И.В. Зубов, В.И. Зубов

ИССЛЕДОВАНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ

Решается вопрос о том, является ли заданное множество возможных значений коэффициентов характеристических многочленов множеством коэффициентов многочлена Гурвица; приводятся примеры поиска и описания множества значений коэффициентов многочленов Гурвица. Цель статьи состоит в том, чтобы достаточно полно рассмотреть задачу исследования асимптотической устойчивости стационарных систем. Приведенная теорема Харитонова в значительной степени помогает решить проблему робастной устойчивости.

* - автор, с которым следует вести переписку.