

О НЕКОТОРЫХ ОБЩИХ ЗАКОНОМЕРНОСТЯХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ВНЕДРЕНИЯ СФЕРИЧЕСКОГО ИНДЕНТОРА

На основе подобия деформационных характеристик рассмотрены общие закономерности при вдавливании сферического индентора в однородное упруго-пластическое упрочняемое твердое тело, которые получили подтверждение при использовании диаграммы непрерывного нагружения и разгрузки в координатах «нагрузка-перемещение». Представлены выражения средних напряжений и площади контакта в зависимости от степени нагруженности, которые могут быть использованы в трибомеханике и задачах поверхностного пластического деформирования.

Ключевые слова: упругопластическая область, контактное деформирование, сферический индентор, диаграмма внедрения, пластическая твердость, трибомеханика, поверхностное пластическое деформирование.

Контактные задачи находят широкое применение при расчетах на прочность деталей машин, в трибомеханике, задачах поверхностного пластического деформирования и др. Если в упругой области контактного взаимодействия проблем не возникает, то они появляются при упругопластическом силовом взаимодействии [1, 2, 3] из-за сложностей учета упрочняемости материала в процессе нагружения и определения границ существования упругой области, области ограниченной упругопластичности и области развитой упругопластичности. Часто упругопластические задачи пытаются решить в упругой постановке, рассматривая повторный контакт как упругий, например [1, 4]. При этом используется радиус кривизны лунки, определенный исходя из глубины лунки и диаметра отпечатка. При таком подходе распределение контактного давления на площадке контакта радиусом a является «герцевским», т.е.

$$p_r = p_0 \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}, \quad (1)$$

где $p_0 = \frac{3P}{2\pi a^2}$ - давление в центре площадки контакта, P - сила вдавливания, r - текущий радиус.

На самом деле при упругопластическом деформировании распределение

давления на площадке контакта выравнивается [4]. Более подробно этот вопрос рассмотрен в работе [5], поэтому воспользуемся предложенной там методикой. Допустим, что диаграмма вдавливания определена экспериментально и задана в степенном виде

$$P = ch_0^n, \quad (2)$$

где c, n - контакты.

Условие равновесия индентора

$$P = 2\pi \int_0^a p(r)rdr, \quad (3)$$

где $p(r)$ - распределение контактного давления.

Функция контактных перемещений $h(r)$ для сферического индентора

$$\begin{aligned} h(r) &= \frac{a}{2R} \sqrt{a^2 - r^2} = \\ &= \frac{h_0}{a} \sqrt{a^2 - r^2} = h_0 \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}, \end{aligned} \quad (4)$$

где R - радиус сферы. В работе [5] $h(r) = (a^2 - r^2)/(2R)$.

Дифференцируя выражение (4) по r , имеем

$$\frac{dh(r)}{dr} = -\frac{h_0 r}{a\sqrt{a^2 - r^2}},$$

или

* - автор, с которым следует вести переписку.

$$rdr = -\frac{a^2}{h_0^2} h(r)dh(r) = -\frac{2R}{h_0} h dh. \quad (5)$$

Тогда уравнение равновесия, выраженное через функцию контактных перемещений

$$P = \frac{4\pi R}{h_0} \int_0^{h_0} p(h)h dh. \quad (6)$$

С учетом выражения (2) получим

$$ch_0^n = \frac{4\pi R}{h_0} \xi \int_0^{h_0} p(h)h dh, \quad (7)$$

функцию давления $p(h)$ ищем в виде

$$p(h) = \xi h^\alpha, \quad (8)$$

где ξ, α - параметры искомой функции.

Подставляя (8) в (7) имеем

$$ch_0^n = \frac{4\pi R}{h_0} \xi \int_0^{h_0} h^{\alpha+1} dh, \quad (9)$$

$$ch_0^n = 4\pi R \xi \frac{h_0^{\alpha+2}}{\alpha+2}.$$

Полученное выражение может быть выполнено при условии:

$$n = \alpha + 1, \quad \alpha = n - 1; \quad (10)$$

$$\xi = \frac{c(\alpha+2)}{4\pi R} = \frac{c(n+1)}{4\pi R}. \quad (11)$$

Подставляя (10) и (11) в (8), получим

$$p(h) = \frac{c(n+1)}{4\pi R} h^{n-1},$$

а с учетом (4)

$$p(r) = p_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^\beta, \quad (12)$$

где

$$p_0 = \frac{c(n+1)}{4\pi R} h_0^{n-1} = \frac{c(n+1)a^{2n-2}}{2\pi(2R)^n}, \quad (13)$$

$$\beta = 0,5(n-1), \quad (14)$$

при этом

$$p_0 = p_m(1+\beta), \quad (15)$$

p_m - среднее давление на площадке контакта. Так значение n находится в пределах от 1 до 2, то $\beta = 0 \dots 0,5$. Выражение (1) является частным случаем выражения (12) при $\beta = 0,5$.

В работе [6] получены выражения, описывающие напряженно-деформи-

рованное состояние полупространства при действии на него нагрузки вида (12), которые должны вносить существенные изменения при определении критериев начала пластической деформации, т.е. при расчетах эквивалентных напряжений при упругом контакте, или интенсивности напряжений при упругопластическом контакте. Так например, в ряде работ [2, 7-9] при определении главных компонентов интенсивности напряжений на поверхности в центре площадки контакта использовались выражения для распределения (1), а для определения p_0 использовалась теория Герца, которая дает завышенные значения p_0 .

Определенный интерес при описании процесса внедрения сферического индентора в деформируемое полупространство вызывает использование подобия деформационных характеристик, что позволяет выразить все уравнения деформации в безразмерном виде. Результаты такого подхода приведены в [3], где представлена диаграмма вдавливания сферического индентора в области упругости, области ограниченной упругопластичности и в области развитой упругопластичности, а также приведены соответствующие выражения, подтвержденные экспериментами. Аналогичный подход использован в работе [11]. Недостатком указанной работы является использование при определении критерия пластичности на поверхности контакта выражения для упругого контакта. Достоинством использованного в работе [11] подхода является то, что области ограниченной и развитой упругопластичности описываются одним выражением.

С целью совершенствования метода подобия деформационных характеристик ниже приведем видоизмененные выражения работы [11], позволяющие использовать другие критерии пластичности, например, критерий Треска, когда пластические деформации зарождаются в приповерхностной области, или критерий, предложенный в работе [3]. В первом случае максимальное контактное давле-

ние $p_0 = 1,613\sigma_y$, где σ_y - предел текучести. Во втором случае $p_0 = 2,8\sigma_y$. Максимально контактное давление, при котором начинается пластическая деформация, представим в виде: $p_0 = K_y\sigma_y$, где K_y - константа.

Используя соотношение теории Герца определим выражение для критической нагрузки P_y , и соответствующей ей деформации h_y :

$$P_y = \frac{K_y^3 \pi^3 R^2 \theta^2 \delta_y^3}{6}, \quad (16)$$

$$h_y = \frac{K_y^2 \pi^2 R \theta^2 \sigma_y^2}{4}, \quad (17)$$

где $\theta = (1 - \mu^2)/E$ - упругая постоянная.

Общая деформация в упругопластической области [12]

$$h_i = h_e + h_p, \quad (18)$$

где

$$h_e = \frac{h_0}{\sqrt[3]{1 + 2h_p/h_e}}, \quad (19)$$

$$h_p = \frac{P_i - P_y}{2\pi r HD}, \quad (20)$$

$$h_0 = \left(\frac{9P_i \theta^2}{16R} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (21)$$

где HD - пластическая твердость; $HD = K_H \sigma_y$, K_H - коэффициент.

Заменим абсолютную нагрузку ее относительной величиной $k = P_i/P_y$.

Выражения (20) и (21) представим в виде

$$h_p = h_y \frac{k-1}{3}, \quad (22)$$

$$h_0 = h_y \cdot k^{\frac{2}{3}}. \quad (23)$$

С учетом выражений (22) и (23) из (19) имеем

$$\left(\frac{h_y}{h_e} \right)^3 - \frac{2K_y}{3K_H} \cdot \frac{k-1}{k^2} \left(\frac{h_y}{h_e} \right) - \frac{1}{k^2} = 0. \quad (24)$$

Выражения (22) – (24) отличаются тем, что величины деформаций определяются

только степенью нагружения k и величиной h_y .

Решение уравнения (24) представим в виде

$$\frac{h_e}{h_y} = \left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}} \right)^{-1}, \quad (25)$$

где

$$D = \left(\frac{q}{2} \right)^2 + \left(\frac{p}{3} \right)^3,$$

$$q = -\frac{1}{k^2}; p = -\frac{2K_y}{3K_H} \cdot \frac{k-1}{k^2}$$

В качестве примера рассмотрим случай, когда $K_y = 2,8; K_H = 5$.

С достаточной для инженерных расчетов точностью выражение (25) аппроксимируется зависимостью

$$\frac{h_e}{h_y} = k^{0,553}. \quad (26)$$

Согласно [11], параметр α , характеризующий напряженное и критическое состояние в зоне контакта, равен

$$\alpha_i = \frac{h_p + 0,5h_e}{h_p + h_e} =$$

$$\frac{\frac{K_y}{3K_H}(k-1) + 0,5k^{0,553}}{\frac{K_y}{3K_H}(k-1) + k^{0,553}}. \quad (27)$$

Среднее напряжение на площадке контакта

$$\begin{aligned} \frac{P_m}{HD} &= \frac{P_m}{K_H \cdot \sigma_y} = \\ &= \frac{K_y \cdot k}{K_y(k-1) + 1,5K_H k^{0,553}} \end{aligned} \quad (28)$$

Графические зависимости по выражениям (28) и (27) представлены на рис.1 и рис.2 соответственно сплошными линиями.

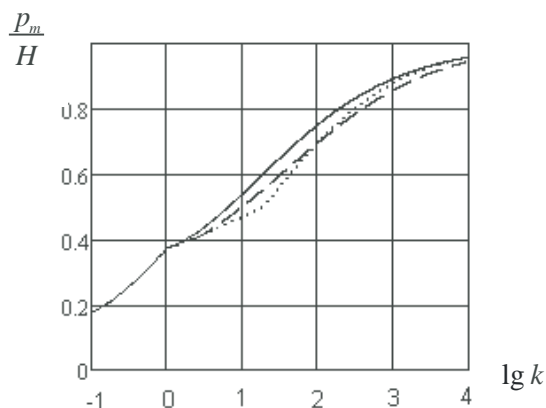


Рис. 1 Изменение относительного среднего давления с ростом интенсивности нагрузки.

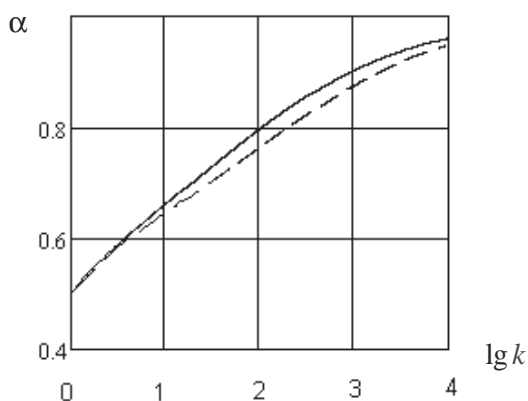


Рис.2 Изменение параметра α с ростом интенсивности нагрузки

В работе [14] для описания процесса упругопластического взаимодействия при вдавливании сферического индентора в полупространство использовалась диаграмма вдавливания в координатах $P-h$ (рис.3).

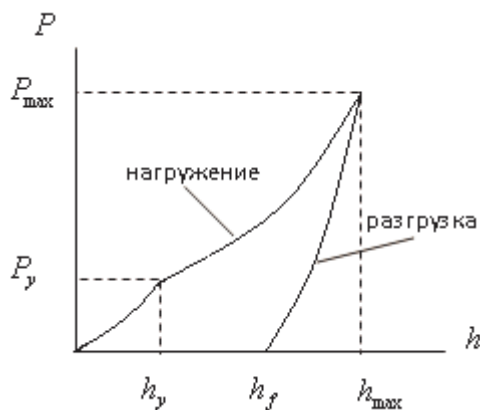


Рис.3 Схема диаграммы вдавливания сферического индентора

Связь между силой P и упругим восстановлением представлена в виде

$$P = b(h - h_f)^m, \quad (29)$$

где b, m – константы, h_f – остаточная глубина отпечатка, аналогичная параметру h_p в выражениях (18) и (21).

Важным практическим свойством кривой упругого восстановления отпечатка при разгрузке является независимость от характера распределения давления под индентором [4]:

$$\frac{dP}{dh} = \frac{2\sqrt{A}}{\pi\theta}, \quad (30)$$

где $A = 2\pi R h_f$ – площадь проекции отпечатка.

Продифференцировав выражение (29) и с учетом того, что $b = P_{\max} / (h_{\max} - h_f)^m$, из выражения (30) получено уравнение, описывающее процесс упругопластического взаимодействия

$$\sqrt{h} (h_i - h_f) = \frac{m\theta P}{2\sqrt{2R}},$$

или

$$\left(\frac{h_i}{h_f} - 1 \right) \sqrt{\frac{h_i}{h_f}} = \frac{m\theta P_i}{2\sqrt{2R} h_f^{\frac{3}{2}}}. \quad (31)$$

Для анализа выражения (31) используем подобие деформационных характеристик

$$P_i = kP_y, \quad h_f = h_0 = \frac{P_y (k-1)}{2\pi R K_H \sigma_y}, \quad (32)$$

где P_y определяется выражением (16).

Подставляя выражение (32); (16) в (31) и обозначая $h_i/h_f = y$, получаем

$$y^3 - y - \frac{6^{0,5} m k}{(k-1)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(\frac{K_H}{K_y} \right)^{\frac{3}{2}} = 0. \quad (33)$$

Полученное уравнение характеризуется только степенью нагружения k и величинами m, K_y, K_H . Решение данного уравнения

$$y_k = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}},$$

$$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

$$p = -1, \quad q = -\frac{6^{0,5}mk}{(k-1)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(\frac{K_H}{K_y}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Имея решение y_k выражения (33) находим:

глубину внедрения

$$h_i = h_0 y_k^2; \quad (34)$$

глубину контактирующей части сферы

$$h_c = \frac{h_i + h_0}{2} = \frac{h_0(1 + y_k^2)}{2}; \quad (35)$$

относительное контактное давление

$$\frac{p_m}{H} = \frac{P_y \cdot k}{H \cdot 2\pi R h_c} = \frac{2k}{(k-1)(y_k^2 + 1)}; \quad (36)$$

параметр α , используя выражение (27)

$$\alpha = \frac{h_0 + 0,5(h_i - h_0)}{h_i} = \frac{0,5(h_0 + h_i)}{h_i} = \frac{0,5(1 + y_k^2)}{y_k^2}. \quad (37)$$

Графические зависимости по выражениям (36) и (37) для $m = 2,1$; $K_\sigma = 2,8$ и $K_H = 5$ представлены на рис.1 и рис.2 штриховыми линиями. Точечной линией на рис.1 обозначены данные работы [3].

Расхождения между значениями относительного контактного давления по выражениям (28) и (36) не превышает 8 %, а среднее расхождение составляет 5 %. Аналогичные цифры для параметра α составляют 4% и 2%. Это свидетельствует о близости представленных методов описания упругопластического деформирования с помощью подобия деформационных характеристик, несмотря на их разное происхождение: с использованием «модифицированной» формулы Герца для определения упругой деформации с учетом величины пластической деформации и из диаграммы разгрузки. Одновременно полученные результаты достаточно хорошо согласуются с данными рабо-

ты [3], которые имеют экспериментальное подтверждение.

Литература

1. Воронин Н. А. Теоретическая модель упруго-пластического внедрения жесткой сферы (методологические основы оценки механических характеристик компактных однородных материалов методом кинетического инвентирования сферического индентора) // Трение и износ. 2003. № 1. С. 16-26.
2. Матлин М. М., Лебский С. Л., Мозгунова А. И. Закономерности упругопластического контакта в задачах поверхностного пластического упрочнения. М.: Машиностроение – 1. 2007. 218 с.
3. Ланков А. А. Вероятность упругих и пластических деформаций при сжатии металлических шероховатых поверхностей // Трение и смазка в машинах и механизмах. 2009. № 3. С. 3-5.
4. Oliver W.C., Pharr G.M. Measurement of hardness and elastic modulus by instrumented indentation: Advances in understanding and refinements to methodology // Journal of Materials Research. 2004. Vol.19, № 1. P. 3-20.
5. Кузьменко А. Г. Пластический контакт тел двукрой кривизны – композиция методов: подобия (МП); приведенного радиуса (МПР); экспериментального теоретического равновесия (МЭТР) // Проблемы трибологии. 2009. № 1. С. 46-64.
6. Огар П. М., Тарасов В.А. Влияние формы осесимметричной нагрузки на напряженно-деформированное состояние упругопластического полупространства // Системы. Методы. Технологии. 2010. № 2. С. 14-19.
7. Матлин М. М., Мозгунова А. И. Использование обобщенной кривой деформирования для расчета параметров упругопластического контакта // Изв. Волгоград. гос. техн. ун-та. 2007. № 5. С.80-82.
8. Matlin M., Kazankina E., Kazankin V. Mechanics of initial olot contact // Mechanika. 2009. № 2. P.20-23.

9. Метод определения степени деформирования при применении различных способов поверхностного пластического деформирования деталей /Матлин М. М. [и др.]. // Изв. Волгоград. гос. техн. ун-та. 2009. № 11. С.84-88.

10. Ланков А. А. Деформирование металлов сферой и подобие деформационных характеристик в упругопластической области//Фрикционный контакт деталей машин. Калинин : КГУ, 1984. С.40-46.

11. Огар П. М., Дайнеко А. А., Щур Д. Д. Контакт сферической неровности с упругопластическим полупространством //

Системы. Методы. Технологии. 2009. - № 4. С. 17-19.

12. Дрозд М. С., Матлин М. М., Сидякин Ю. И. Инженерные расчеты упруго-пластической деформации. М.: Машиностроение, 1986. С. 234

13. Ковалев А. П. Основные закономерности вдавливания сферического индентора и оценка физико-механических свойств поверхностного слоя деталей // Упрочняющие технологии и покрытия. 2007. № 1. С. 36-41.