

активной вибрационной защиты // Там же. 2008. Спец. вып. С. 18-29.

8. Насников Д. Н., Димов А. В. Мехатроника виброзащитных систем. Особенности структурных преобразований // Там же. 2009. № 4 (24). С. 75-85.

9. Коловский М. З. Автоматическое управление виброзащитными системами. М.: Наука, 1976. 319 с.

10. Чупраков Ю. И. Гидравлические системы защиты человека-оператора от общей вибрации. М.: Машиностроение, 1987. 224 с.

УДК 539.3

*Л.А. Бохоева\*, А.С. Чермошнцева*

### УТОЧНЕННЫЙ МЕТОД ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАСТИН С ДЕФЕКТАМИ С УЧЕТОМ ДЕФОРМАЦИЙ СДВИГА

*Статья посвящена некоторым аспектам деформирования элементов конструкций из слоистых изотропных и композиционных материалов с дефектами типа отслоений. В статье рассмотрен вариант уточненной линейной теории устойчивости. Решена задача устойчивости пластины с дефектом типа отслоение с учетом влияния деформаций сдвига.*

**Ключевые слова:** межслойные, дефекты, слоистые материалы, деформации сдвига, устойчивость, пластина.

Для упругих конструкционных материалов величина деформаций сдвига пренебрежимо мала по сравнению с единицей. Поэтому для элементов конструкций из изотропных материалов учет деформаций сдвига при определении критических нагрузок не имеет практического значения. Учет влияния деформаций сдвига приобретает решающее значение при анализе слоистых композитов. Классическая теория Кирхгофа, в которой пренебрегается деформациями сдвига, широко используется при расчете тонких изотропных пластин. Однако применение этой теории к анализу поведения слоистых композитных пластин привело бы к существенным погрешностям, в частности к недооценке прогибов и переоценке собственных частот. Учет сдвиговых деформаций приобретает решающее значение при анализе слоистых композитных пластин. В работе Редди [1] при обзоре литературы по применению метода конечных элементов к расчетам слоистых

композитных пластин кратко освещается история развития теории деформирования пластин с учетом сдвигов. Модули поперечного сдвига современных композитных материалов обычно очень малы по сравнению с модулями растяжения в плоскости, в результате чего деформации сдвига могут влиять на поведение таких материалов гораздо существеннее, чем на поведение однородных изотропных материалов. Например, определяемые по классической теории пластин собственные частоты для пластин с отношением длины стороны к толщине, равным 10, на 25 % превышают частоты, определенные по теории, учитывающей деформации сдвига. Значения собственных частот, полученные по теории учета деформаций сдвига первого порядка, описанной Редди, на 11 % превышают значения, полученные по трехмерной теории упругости.

Классическая теория пластин, в соответствии с которой предполагается, что плоские сечения остаются плоскими и

---

\* - автор, с которым следует вести переписку.

нормаль к срединной поверхности до деформации остается прямолинейной нормалью к срединной поверхности после деформации, не позволяет учесть влияние деформаций сдвига. Кроме того, в соответствии с этой теорией предполагается, что перемещения в плоскости линейно изменяются по толщине. В общем случае перемещения могут быть представлены в виде:

$$\begin{aligned} u_1(x, y, z) &= u(x, y) + z\psi_x(x, y) + \\ &+ z^2\xi_x(x, y) + z^3\zeta_x(x, y), \\ u_2(x, y, z) &= v(x, y) + z\psi_y(x, y) + \\ &+ z^2\xi_y(x, y) + z^3\zeta_y(x, y) \\ u_3(x, y, z) &= w(x, y), \end{aligned}$$

где  $u, v, w$  – перемещения точки  $(x, y)$  срединной плоскости, а  $\psi_x$  и  $\psi_y$  – углы поворота нормали к срединной плоскости относительно осей  $y$  и  $x$  соответственно. Функции  $\xi_x, \xi_y, \zeta_x, \zeta_y$  используются в теориях высшего порядка. Отметим, что в классической теории пластин сохраняются лишь члены, содержащие  $z$ , а величины  $\psi_x$  и  $\psi_y$  задаются в виде

$$\psi_x = -w_x; \psi_y = -w_y,$$

где  $w_x$  означает  $\partial w/\partial x$ , а  $w_y = \partial w/\partial y$

В теории первого порядка, учитывающей деформации сдвига, предполагается, что плоские до деформации сечения остаются плоскими, но нормаль к плоскости до деформации уже не остается нормалью после деформации. Предполагается, что величины  $\psi_x$  и  $\psi_y$  определяются выражениями  $\psi_x = \theta_x, \psi_y = \theta_y$ , где  $\theta_x, \theta_y$  – повороты нормалей к срединной плоскости относительно осей  $y$  и  $x$  соответственно. При этом предполагается, что члены высшего порядка  $\xi_x, \xi_y, \zeta_x, \zeta_y$  равны нулю.

Задача учета деформаций сдвига при анализе слоистых пластин балок была освещена в работах Д. Кардоматиса, Г. Чаи, Ч. Бэбкока [2]. На основе данных опубликованных работ можно выделить два типа

теорий учета деформаций сдвига в пластинах – теории первого и высшего порядков. Теория первого порядка позволяет достаточно хорошо описать глобальное поведение балки-пластины, т. е. определить прогибы, собственные частоты и критические нагрузки. Дифференциальные уравнения получают с помощью принципа потенциальной энергии. Однако для исследования распределения напряжений по толщине пластины в областях разрыва непрерывности, например на границах, требуется более сложная теория. Хотя применение теории высшего порядка и приводит к более точным результатам, однако высокая стоимость расчетов и большое количество переменных делают ее практически непригодной. В данном разделе рассмотрен вариант уточненной линейной теории [3].

Объектом исследования являются тонкостенные элементы конструкций.

Балка длиной  $L$ , высотой  $H$  и единичной ширины. Пусть имеется единственное сквозное отслоение длиной  $l$ , расположенное на глубине  $h$ . В области дефекта балка состоит из двух частей: отслоившейся части (верхний слой) и расположенный ниже отслоения слой толщиной  $(H-h)$ . Балка разбивается на три участка (рис. 1) и вводятся следующие обозначения:

$P=P_1$  – нагрузка на первом участке участка,  $P_2$  – нагрузка дефектного участка,  $P_3$  – нагрузка отслоившейся части,  $\beta$  – отношение нормированной длины  $\bar{l}$  и толщины дефекта  $\bar{h}$ ,  $\beta = \frac{\bar{l}}{\bar{h}} = \frac{l \cdot H}{L \cdot h}$ ,

где  $\bar{l} = l/L, \bar{h} = h/H$ . При  $\beta < 1$  будет существовать только глобальная форма,  $\beta > 1$  – локальное выпучивание дефекта, либо «смешанная» форма. Рассмотрим локальную форму выпучивания. Определим критическую нагрузку  $P_{кр.}$  для локального выпучивания. Использование энергетического подхода позволяет получить явные аналитические выражения для величин, характеризующих закритическое поведение отслоившейся части (участок

3). Рассмотрим дефект в виде сквозной пластины единичной ширины. При малых, но конечных прогибах в окрестности первой критической точки бифуркации угол поворота отслоившейся части можно аппроксимировать первой собственной функцией:

$$\vartheta_1(x) = \sin(2\pi x/l).$$

Решение нелинейной задачи представим в виде:

$$\vartheta(x) = \alpha \vartheta_1(x),$$

где  $\alpha$  – коэффициент, зависящий от нагрузки.

Изменение полной потенциальной энергии отслоения определяется уравнением

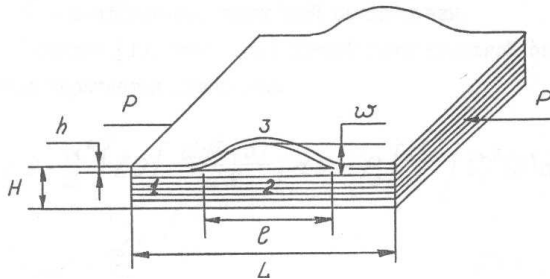


Рис. 1. Пластина с дефектом.

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{\alpha^2 l}{2} \int_0^l EI \left[ \frac{d}{dx} \vartheta_1(x) \right]^2 dx - P_3 \left[ \frac{\alpha^2 l}{2} \int_0^l \vartheta_1^2(x) dx - \frac{\alpha^4 l}{4!} \int_0^l \vartheta_1^4(x) dx + \frac{\alpha^6 l}{6!} \int_0^l \vartheta_1^6(x) dx + \dots \right]$$

где  $P_3$  [н/м] – нагрузка на третьем участке.

Из условия стационарности  $\frac{\partial \Delta \mathcal{E}}{\partial \alpha} = 0$  получаем выражение

$$\alpha \left[ P_{кр,3} - P_3 (1 - \alpha^2 B_2 + \alpha^4 B_4 - \dots) \right] = 0,$$

где

$$B_2 = \frac{1}{6} \frac{\int_0^l \vartheta_1^4 dx}{\int_0^l \vartheta_1^2 dx}; \quad B_4 = \frac{1}{120} \frac{\int_0^l \vartheta_1^6 dx}{\int_0^l \vartheta_1^2 dx}; \dots,$$

$$P_{кр,3} = \frac{\int_0^l EI \left( \frac{d}{dx} \vartheta_1 \right)^2 dx}{\int_0^l \vartheta_1^2 dx} = \frac{\pi^2 h^3 E}{3l^2 (1 - \mu^2)},$$

$P_{кр,3}$  – критическая нагрузка отслоившейся части.

Плоские сечения, до деформации балки нормальные к ее оси, остаются плоскими и после изгиба балки, но перестают быть нормальными к ее изогнутой оси. Положение каждого сечения деформированной балки определяется двумя независимыми величинами: поперечным перемещением  $v$  и углом поворота сечения  $\vartheta$  (рис. 2).

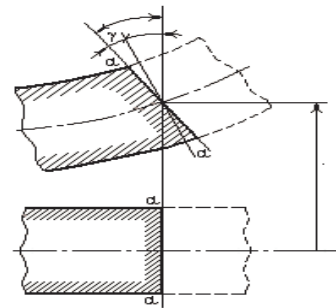


Рис. 2. Положение сечения деформированной балки.

Угол сдвига равен  $\gamma = \vartheta - v'$ , где  $v'$  – угол поворота нормали к оси балки. Для учета эффекта деформации рассмотрим дифференциальное уравнение упругой линии. Поперечная сила определяется зависимостью  $Q = P \sin \vartheta \approx P \vartheta$ . Для вывода критической нагрузки воспользуемся энергетическим критерием. Энергия деформации изгиба с учетом потенциальной энергии деформации сдвига имеет вид

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l EJ \vartheta'^2 dx + \frac{1}{2} \int_V \tau \gamma dx,$$

где  $EJ$  – изгибная жесткость изотропного материала,  $G$  – модуль сдвига,  $F$  – площадь поперечного сечения.

Будем считать, что срединная поверхность пластины является нерастяжимой. Изменение полной потенциальной энергии получим в виде

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_0^l EJ \vartheta'^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l FG \gamma^2 dx - \frac{1}{2} P \int_0^l v'^2 dx$$

при дополнительном условии

$$\vartheta - v' - \gamma = 0.$$

При построении приближенного решения введем переменные  $\vartheta = \psi$ ;  $v' = c\psi$ , где  $c$  – параметр, характеризующий величину поперечного сдвига,  $\psi(x)$  – функция, удовлетворяющая граничным условиям задачи. Тогда получим

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_0^l EJ \psi'^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l FG (\psi - c\psi)^2 dx - \frac{1}{2} P \int_0^l c^2 \psi^2 dx.$$

Из условия  $\Delta \mathcal{E} = 0$  следует

$$P = \frac{\frac{1}{2} \int_0^l EJ \psi'^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l FG (\psi - c\psi)^2 dx}{\frac{1}{2} \int_0^l c^2 \psi^2 dx},$$

$$P = \frac{P_{кр.}^0}{c^2} + \frac{FG(c-1)^2}{c^2}, \quad (1)$$

где  $P_{кр.}^0 = \frac{\int_0^l EJ \psi'^2 dx}{\int_0^l \psi^2 dx} = \frac{\int_0^l E \vartheta'^2 dx}{\int_0^l \vartheta^2 dx}$  – критическая сила по Эйлеру.

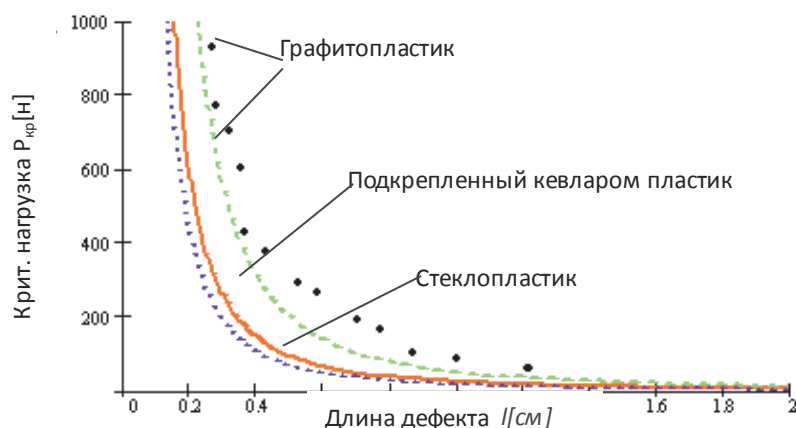
Минимизируя выражение (1) по параметру  $c$ , получим

$$c_{кр.} = \frac{P_{кр.}^0 + FG}{FG}. \quad (2)$$

Подставив уравнение (2) в уравнение (1), находим критическую силу с учетом влияния деформации сдвига для локального выпучивания отслоившейся части в виде

$$P_{кр.} = \frac{P_{кр.}^0}{1 + P_{кр.}^0 / GF}.$$

Учет деформаций сдвига для некоторых элементов конструкций из слоистых композиционных материалов, у которых  $G \ll E$ , имеет практическое значение. Критическая нагрузка потери устойчивости композитной балки как единого целого, определенная с учетом эффекта поперечного сдвига, меньше, чем критическая нагрузка по Эйлеру. На рис. 3 приведены результаты влияния эффектов поперечного сдвига на критическую нагрузку при локальной форме выпучивания для различных материалов.



**Рис. 3.** Влияние свойств материала на величину критической нагрузки  $P$  от длины  $l$  ( $h=0.001$ ) с учетом эффектов поперечного сдвига.

Примеры приведены для пластика, подкрепленного кевларом, графитопластика и стеклопластика, численные данные для графитопластика получены МКЭ в системе ANSYS (обозначены •••). В работе исследовано влияние жесткостей поперечного сдвига на значения критических нагрузок и закритическое поведение элементов конструкции из авиационных материалов типа композиты с учетом технологических дефектов. Учет сдвиговых деформаций при исследовании закритического поведения отслоений для изотропных материалов не имеет практического значения, но имеет смысл при чрезвычайно сильной анизотропии упругих свойств материала. Показано, что такой подход дает в результате меньшие критические нагрузки и более высокие скорости высвобождения энергии.

#### Литература

1. Reddy J. N. A review of the literature on finite-element modeling of laminated composite plates, shock and vibration digest.1985. Vol. 17. № 4. P. 3-8.
2. Kardomateas G., Chung C. B. Thin film modeling of delamination buckling in pressure loaded laminated cylindrical shells //AIAA Journal.1992.Vol. 30. № 8. P. 2119-2133.
3. Бохоева Л. А. Особенности расчета на прочность элементов конструкций из изотропных и композиционных материалов с допустимыми дефектами. Улан-Удэ: Изд-во ВСГТУ, 2007. 192 с.

Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009-2013 годы».