УДК 656.072, 519.853.3

М. Е. Корягин

ОПТИМИЗАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ГОРОДСКОГО ПАССАЖИРСКОГО ТРАНСПОРТА В УСЛОВИЯХ ВЫБОРА СПОСОБА ПЕРЕДВИЖЕНИЯ

Рассматривается задача оптимизации работы городского пассажирского транспорта в условиях выбора способа передвижения. Построены целевые функции для участников конфликтной ситуации (пассажиропотоки и муниципалитет). Моделью является бескоалиционная игра многих лиц, решением которой служит равновесие Нэша.

Ключевые слова: теория игр, марковские процессы, городской пассажирский транспорт.

Множество факторов влияет на транспортные системы российских городов. Одной из важнейших тенденций является рост количества легкового автотранспорта. Данный фактор приводит к возможности выбора пассажиром способа передвижения. Конфликтная ситуация возникает в связи с тем, что увеличение потока автомобилей отрицательно сказывается на городской среде. Поэтому необходимо разработать математические модели оптимизации системы городского транспорта в условиях выбора способа передвижения.

Общественный транспорт ориентирован на удовлетворение потребностей населения города при перемещении в городской среде. Поэтому пассажиры являются важными участниками транспортной системы. В рассматриваемой модели выделены две стратегии пассажиров: выбор способа передвижения (личный автомобиль или общественный транспорт) и маршрута передвижения.

Выбор маршрута передвижения связан с тем, что пассажир в современных условиях развития российских городов имеет возможность добраться до места назначение не одним, а несколькими маршрутами общественного транспорта. Модель выбора маршрута является упрощенной: пассажир осуществляет посадку в первое подошедшее транспортное средство, способное довезти его до места назначения [1, 2]. Или другими словами, пассажир не склонен терять время в ожидании следующего транспортного средства.

Выбор же способа передвижения является более сложной задачей. В данной работе рассматриваются два варианта [1]: легковой автомобиль или общественный транспорт. Это связано с тем, что в городских условиях большая часть перемещений происходит на расстояния, которые не выгодно преодолевать пешим способом.

Данные способы передвижения отличаются, в первую очередь, стоимостью и продолжительностью поездки. Таким образом, если человеку важнее время, он выберет автомобиль, а если стоимость проезда – общественный транспорт.

Для описания многообразия жителей города введем параметр стоимости пассажиро-часа [3], которая является случайной величиной, распределенной по экспоненциальному закону. Выбор данного распределения основан на том, что существуют множество поездок незначительной важности (стоимости времени), но и существуют поездки с высокой стоимостью времени. К тому же, данное распределение является наиболее простым из непрерывных.

При переходе к математической постановке задачи введем основные параметры, определяющие выбор способа перемещения:

β – стоимость проезда на общественном транспорте;

t' – время перемещения человека при использовании общественного транспорта (за исключением времени ожидания общественного транспорта);

t'' – время перемещения на легковом автомобиле;

μ – интенсивность движения общественного транспорта от места возникновения потребности в перемещении до места назначения;

c – стоимость использования легкового автомобиля на участке от места возникновения потребности в перемещении до места назначения (положим, что затраты на перемещение на автомобиле выше стоимости проезда на общественном транспорте $c > \beta$);

γ – средняя стоимость времени перемещения;

p – вероятность использования автомобиля для перемещения.

Человек заранее определяет способ передвижения (автомобиль или общественный транспорт), зная интенсивность движения транспорта. В модели предположим, что человек не анализирует рискованность поездки (нет чувствительности к риску) на автобусе или легковом автомобиле и осуществляет выбор способа передвижения на основе средних характеристик. То есть, для заданной стоимости времени перемещения осуществляется однозначный выбор способа перемещения.

Если стоимость времени поездки распределена экспоненциально, тогда общественным транспортом пользуется часть населения с меньшими доходами (т. к. легковой автомобиль позволяет сократить расходы времени при увеличении финансовых затрат на поездку). Цель потока населения – минимизировать суммарные затраты на перемещения, изменяя параметр p. Пусть x – стоимость времени, которая делит население по видам перемещений. Тогда

$$p = \exp\left\{-\frac{x}{\gamma}\right\} \text{ или } x = -\gamma \ln(p).$$

Средняя стоимость времени при перемещении на общественном транспорте:

$$\frac{\int_0^{\gamma} \frac{x}{\gamma}\exp\left\{-\frac{x}{\gamma}\right\}dx}{\int_0^{\gamma} \frac{1}{\gamma}\exp\left\{-\frac{x}{\gamma}\right\}dx} = \frac{1}{1-p}\int_0^{-\gamma\ln(p)} \frac{x}{\gamma}\exp\left\{-\frac{x}{\gamma}\right\}dx =$$

$$= \frac{\gamma + \gamma p \ln(p) - \gamma p}{1-p}.$$

Средние расходы на одно перемещение на общественном транспорте состоят из потерь времени и стоимости проезда:

$$\frac{\gamma+\gamma p\ln(p)-\gamma p}{1-p}\left[\frac{1}{\mu}+t'\right]+\beta. \qquad (1)$$

Средняя стоимость времени при перемещении на легковом автомобиле:

$$\frac{\int\limits_{\gamma}^{\infty}\frac{x}{\gamma}\exp\left\{-\frac{x}{\gamma}\right\}dx}{\int\limits_{\gamma}^{\infty}\frac{1}{\gamma}\exp\left\{-\frac{x}{\gamma}\right\}dx}=\frac{1}{p}\int\limits_{-\gamma\ln(p)}^{\infty}\frac{x}{\gamma}\exp\left\{-\frac{x}{\gamma}\right\}dx=$$

$$=\gamma-\gamma\ln(p)$$

Средние расходы на одно перемещение с помощью легкового автомобиля:

$$[\gamma-\gamma\ln(p)]t''+c. \qquad (2)$$

Суммарные затраты потока на одну поездку – взвешенная сумма затрат на перемещения на автомобиле и общественном транспорте (1-2):

$$[\gamma+\gamma p\ln(p)-\gamma p]\left[\frac{1}{\mu}+t'\right]+\beta(1-p)+$$

$$+[\gamma p-\gamma p\ln(p)]t''+cp. \qquad (3)$$

Первая производная суммарных затрат (4.3) на единичную поездку составит:

$$\gamma\ln(p)\left[\frac{1}{\mu}+t'-t''\right]+(c-\beta). \qquad (4)$$

Вторая производная от (3):

$$\gamma\frac{1}{p}\left[\frac{1}{\mu}+t'-t''\right]\geq 0. \qquad (5)$$

Таким образом, функция затрат на единичную поездку выпукла вниз (5) по параметру p. Приравняв производную (4) к нулю, получим оптимальную вероятность использования автомобиля:

$$p=\exp\left\{-\frac{(c-\beta)}{\gamma\left(\frac{1}{\mu}+t'-t''\right)}\right\}.$$

В городских условиях существует множество пунктов возникновения потребности в перемещении и пунктов назначения. Неоднороден также уровень жизни в районах города. Поэтому необходимо обобщить модель, для чего введем следующие параметры:

N – количество остановочных пунктов, по которым движутся транспортные средства и перемещаются пассажиры;

K – количество маршрутов городского пассажирского;

$\lambda_{i,j}$ – интенсивность потока пассажиров, поступающих на i-й остановочный пункт с потребностью переехать на остановочный j-й пункт;

$A_{i,j}^{k}$ – принимает значение 1, если по k-му маршруту можно переехать с i-го остановочного пункта на j-й, иначе принимает значение 0;

μ_k – переменная, описывающая интенсивность пуассоновского потока транспортных средств, движущихся по k-му маршруту;

α_k – ущерб городской среде от одного рейса общественного транспорта по k-му маршруту;

$t'_{i,j}$ – время перемещения человека при использовании общественного транспорта (за исключением времени ожидания общественного транспорта) i и j;

$t''_{i,j}$ – время перемещения на легковом автомобиле i и j;

$t_{i,j}$ – разность времени перемещения при использовании общественного транспорта и на легковом автомобиле (за исключением времени ожидания общественного транспорта) между пунктами i и j;

$c_{i,j}$ – стоимость использования легкового автомобиля на участке от i-го до j-го пункта (положим, что затраты на перемещение на автомобиле выше стоимости проезда на общественном транспорте $c_{i,j}>\beta$);

$\delta_{i,j}$ – ущерб городской среде от переезда на легковом автомобиле на участке от i-го до j-го пункта;

$\gamma_{i,j}$ – средняя стоимость времени перемещения между пунктами i и j.

Тогда расходы пассажиропотока при перемещении между пунктами i и j (3):

$$G_{i,j} = \gamma_{i,j}\left[\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{K} A_{i,j}^{k}\mu_k} + t'_{i,j}\right] +$$

$$+\left[\gamma_{i,j}p_{i,j} - \gamma_{i,j}p_{i,j}\ln(p_{i,j})\right]\left[\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{K} A_{i,j}^{k}\mu_k} + t_{i,j}\right] +$$

$$+\beta(1-p_{i,j}) + cp_{i,j} \to \min_{p_{i,j}}. \qquad (6)$$

Утверждение 1. Расходы пассажиропотока при перемещении между пунктами i и j являются выпуклой функцией по вероятности выбора легкового автомобиля для передвижения.

Доказательство: вторая производная от (6) по $p_{i,j}$

$$\gamma_{i,j}\frac{1}{p_{i,j}}\left[\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{K} A_{i,j}^{k}\mu_k} + t_{i,j}\right].$$

Вторая производная от (6) больше нуля, поэтому (6) является выпуклой вниз функцией.

Очевидно ограничение на интенсивность потоков транспортных средств, движущихся по каждому маршруту:

$$\mu_k \geq 0, \quad k = \overline{1,K}. \qquad (8)$$

Для «системы город» важно сократить время населения при перемещении и ущерб городской среде от транспорта. Стоимость проезда не входит в потери «системы», т. к. эти средства переходят от одного участника системы к другому, т. е. от пассажира – транспортному оператору:

$$F = \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}\lambda_{i,j}\left(\gamma_{i,j} - \gamma_{i,j}\ln(p_{i,j})\right)t''_{i,j} +$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}\lambda_{i,j}\delta_{i,j}p_{i,j}$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{\lambda_{i,j}\left(\gamma_{i,j} + \gamma_{i,j}p_{i,j}\ln(p_{i,j}) - \gamma_{i,j}p_{i,j}\right)}{\sum\limits_{k=1}^{K} A_{i,j}^{k}\mu_k} +$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}\lambda_{i,j}\left(\gamma_{i,j} + \gamma_{i,j}p_{i,j}\ln(p_{i,j}) - \gamma_{i,j}p_{i,j}\right)t'_{i,j} +$$

$$+\sum_{l=1}^{K}\alpha_k\mu_k \to \min_{\{\mu_k\}_{k=\overline{1,K}}}. \qquad (8)$$

Первое слагаемое критерия (8) – потери времени населения, перемещающегося на личных автомобилях, второе – ущерб городской среде от личного автотранспорта, третье с четвертым – потери времени пассажиров общественного транспорта, и пятое – ущерб городской среде от общественного транспорта. Таким образом, муниципалитет, исходя из интересов «системы город», должен минимизировать данный критерий, регулируя работу общественного транспорта.

Интересы муниципалитета и пассажиропотоков отличаются, и каждый из них имеет свой набор стратегий, поэтому для решения данной конфликтной ситуации построим игровую модель, для которой докажем следующее утверждение.

Утверждение 2. Игра пассажиропотоков и муниципалитета

$$\Gamma\left\langle 1+N^2, \{\mu_k\}_{k=\overline{1,K}}, \{p_{i,j}\}_{\substack{i=\overline{1,N_k}\\ j=\overline{1,N}}}, -F, \{-G_{i,j}\}_{\substack{i=\overline{1,N}\\ j=\overline{1,N}}}\right\rangle$$

имеет ситуацию равновесия Нэша.

Доказательство. Докажем выполнения теоремы о существовании равновесия Нэша в непрерывных играх [4].

По утверждению 1 функция потерь пассажиропотока (6) выпукла вниз, при этом очевидна непрерывность (6). Множество стратегий пассажиропотока выпукло, компактно и непрерывно, т. к. вероятность $p_{i,j} \in [0,1]$.

Целевая функция муниципалитета также выпукла вниз и непрерывна. Это утверждение верно из-за того, что третья часть функции состоит из суммы гипербол, а остальные слагаемые – линейные функции.

Интенсивность движения транспорта (стратегии муниципалитета) ограничена экономической и технической нецелесообразностью использования бесконечного количества рейсов на маршруте, поэтому множество стратегий также выпукло, компактно и непрерывно.

В теории игр используется термин «функция выигрыша». Поэтому в описании игры критерии имеют знак «–», и данные функции выигрыша выпуклы вверх, как того требует теорема [4].

Исходя из вышесказанного, игра Γ имеет точки равновесия по Нэшу в чистых стратегиях.

Таким образом, существует оптимальное распределение потоков перемещений по способам, а также общественного транспорта – по маршрутам. Данная модель позволяет развивать игровую модель и учитывать возрастающий уровень доходов и автомобилизации при построении рентабельных расписаний на городском пассажирском транспорте.

Литература

1. Корягин М. Е. Конкуренция потоков общественного транспорта // Автоматика и телемеханика. 2008. № 8. С. 120-130.

2. Корягин М. Е., Семенова О. С. Оптимизация потоков общественного транспорта в городской среде // Вопросы современной науки и практики. Ун-т им. В.И. Вернадского. 2008. Т. 1 (11). 2008. С.70-79.

3. Лопатин А. П. Моделирование перевозочного процесса на городском пассажирском транспорте. М. : Транспорт, 1985.

4. Debreu G. A Social Equilibrium Existence Theorem // Proceedings of the National Academy of Sciences. 1952. V. 38. P. 886-893.