словых данных. Эту таблицу можно, например, экспортировать в программу Microsoft Excel для проведения статистических исследований.

Литература

1. Бабаков И. М. Теория колебаний. М.: Наука, 1968. 559 с.

2. Стручков А. В., Ереско Т.Т. Теоретические исследования динамической нагруженности трансмиссии бульдозера с гидротрансформатором // Системы. Методы. Технологии. 2009. № 3. С. 26-28.

3. Климов А.А., Стручков А.В. Исследование динамической нагруженности трансмиссии бульдозерного агрегата на базе трактора класса 40 кН на грунтах 1-2 категорий // Вестн. КрсГАУ. 2008. № 1. С. 201-206.

УДК 517.929

А.С. Ларионов*, Ю.А. Загорулько

УСЛОВИЯ СОХРАНЕНИЯ ЗНАКА ФУНКЦИИ КОШИ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Предлагаются эффективные признаки положительности функции Коши дифференциального уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом. Полученные результаты применяются для исследования модели процесса колебания электромагнитного прерывателя.

Ключевые слова: функция Коши, дифференциальное уравнение, запаздывание

Многие методы качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений используют те или иные условия монотонности. Понятие монотонности лежит, например, в основе исследования дифференциальных, разностных, интегральных и других неравенств, используемых для построения оценок различных уравнений и создания приближенных методов типа метода Чаплыгина. При таком подходе к изучению дифференциальных уравнений существенную роль играют условия положительности функции Коши вспомогательного уравнения. В первой части статьи будут приведены достаточные условия сохранения знака функции Коши дифференциального уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом.

Будем пользоваться обозначениями: $L_p^n[t_0,b]=L_p^n$, $1\le p<\infty$ – банахово пространство суммируемых со степенью p на отрезке $[t_0,\,b]$ функций $y:[t_0,\,b]\to R^n$; $AC_p^n[t_0,\,b]=AC_p^n$ – банахово пространство абсолютно непрерывных функций $x:[t_0,\,b]\to R$, причем $x'\in L_p^n$.

Рассмотрим уравнение

$$(\Lambda x)(t)\equiv x'(t)-(Vx)(t)=f(t), \qquad (1)$$

где $V:AC_p^n\to L_p^n$ – линейный ограниченный вольтерров оператор. Так как оператор V вольтерров, то можно определить понятие решения уравнения (1) на отрезке $[t_0,\,\tau]\subset[t_0,\,b]$ и понятие соответствующего сужения

* – автор, с которым следует вести переписку

$\Lambda^{\tau}: AC_p^n[t_0, \tau] \to L_p^n[t_0, \tau]$ оператора Λ.

Имеет место

Лемма 1 [1. С. 84]. Пусть при каждом $\tau \le b$ оператор $\Lambda^{\tau}: AC_p^n[t_0, \tau] \to L_p^n[t_0, \tau]$ ограничен, и задача Коши $(\Lambda^{\tau} x)(t) = f(t)$, $x(t_0) = \alpha$, $t \in [t_0, \tau]$, $\alpha \in R^n$ однозначно разрешима для любой пары $f \in L_p^n[t_0, \tau]$, $\alpha \in R^n$. Тогда общее решение уравнения (1) имеет представление

$$x(t) = X(t)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} C(t,s) f(s)\, ds, \qquad (2)$$

где $X(t)$ – фундаментальная матрица уравнения (1), $C(t, s)$ – матрица Коши данного уравнения.

Приведем условия положительности функции Коши скалярного уравнения второго порядка

$$(\Lambda x)(t) \equiv x''(t) + \sum_{i=1}^{m} a_i(t) x_i(t) + \\ + \sum_{j=1}^{n} b_j(t) x_{h_j}(t) = f(t), \; t \in [t_0, b], \qquad (3)$$

где

$$x_{\nu}(t) = \begin{cases} x[\nu(t)], & \text{если } \nu(t) \in [t_0, b], \\ 0, & \text{если } \nu(t) \notin [t_0, b] \end{cases}$$

в следующих предположениях: функции a_i, b_j, $f: [t_0, b] \to R$, $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., n$ суммируемы на $[t_0, b]$; функции $h_j: [t_0, b] \to R$ измеримы, $h_j(t) \le t$ при почти всех $t \in [t_0, b]$, $j = 1, ..., n$.

Решением уравнения (3) назовем функцию $x \in W_b^{(2)}[t_0, b]$, удовлетворяющую уравнению (3) почти всюду на $[t_0, b]$. Здесь $W_b^{(2)} = W^{(2)}[t_0, b]$ – банахово пространство функций $x: [t_0, b] \to R$, имеющих абсолютно непрерывную производную x', причем вторая производная суммируема. Оператор Λ непрерывно действует из пространства $W_b^{(2)}$ в пространство L^b и является вольтерровым.

Обозначим

$$\alpha^+(t) = \begin{cases} \alpha(t), & \text{если } \alpha(t) \ge 0, \\ 0, & \text{если } \alpha(t) < 0, \end{cases}$$

$$\alpha^-(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha(t) \ge 0, \\ -\alpha(t), & \text{если } \alpha(t) < 0, \end{cases}$$

$$\chi_{\tau}(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } \tau(t) \in [t_0, b], \\ 0, & \text{если } \tau(t) \notin [t_0, b]. \end{cases}$$

Для получения признаков знакопостоянства Коши применим «W – метод» [1. С. 96, 119]. При этом вопрос о знаке функции Коши для уравнения (3) будет сведен к аналогичному вопросу для некоторого уравнения первого порядка.

Рассмотрим модельное уравнение

$$(\Lambda_0 x)(t) \equiv x'(t) - y(t)x(t) = z(t),\; t \in [t_0, b],$$

Где $\Lambda_0: W_b^{(1)} \to L^b$ $(W_b^{(1)} = W_b^{(1)}[t_0, b]$ – пространство абсолютно непрерывных функций с суммируемой на $[t_0, b]$ производной).

Лемма 2 [2. Т. 24. С. 1844]. Если после подстановки $x = Wz$ в уравнение (3) получим уравнение $\Lambda_1 x = f$, функция Коши которого положительна в области $\Delta_b = \{(t, s): t_0 \le s \le t \le b\}$, то функция Коши уравнения (3) тоже положительна в области Δ_b.

Лемма 3 [2. Т. 24. С. 1845]. Пусть оператор $\Lambda: W_b^{(2)} \to L_b$ представим в виде $\Lambda = \Lambda_1 - T$, для уравнения $\Lambda_1 x = f$ выполнены условия леммы 1, а оператор T вольтерров, вполне непрерывен и положителен. Если функция Коши $C_1(t, s)$ уравнения $\Lambda_1 x = f$ положительна в области Δ_b, то функция Коши уравнения (3) тоже положительна в области Δ_b.

Теорема 1. Пусть для некоторой функции $y \in W_b^{(1)}$ $y: R \to R^+$ $(y(t) = 0$ при $t < t_0)$ выполнено неравенство

$$y'(t) + y^2(t) + \sum_{i=1}^{m} a_i^+(t) + \\ + \sum_{j=1}^{n} b_j^+(t)\chi_h(t) \le 0. \qquad (4)$$

Тогда функция Коши $C(t, s)$ уравнения (3) положительна в области Δ_b.

Доказательство. С целью избежать громоздких преобразований считаем в дальнейшем $m=1$, $n=1$. Сделаем в уравнении (3) «W – подстановку» (см., например, [1. С. 53])

$$x(t)=\int_{t_0}^{t} e^{\int_s^t y(\tau)d\tau} z(s)\,ds.$$

Тогда уравнение (3) запишется в виде

$$z'(t)+y(t)z(t)+$$

$$+\left[y'(t)+y^2(t)+a(t)\right]\int_{t_0}^{t} e^{\int_s^t y(\tau)d\tau} z(s)\,ds+$$

$$+b(t)\chi_h(t)\int_{t_0}^{h(t)} e^{\int_s^{h(t)} y(\tau)d\tau} z(s)\,ds=f(t). \quad (5)$$

Покажем, что функция Коши уравнения (3) положительна. Для этого достаточно преобразовать уравнение (5) к виду

$$z'(t)+y(t)z(t)+$$

$$+\left[y'(t)+y^2(t)+a^+(t)+b^+(t)\chi_h(t)\right]\int_{t_0}^{t} e^{\int_s^t y(\tau)d\tau}\times$$

$$\times z(s)\,ds-$$

$$-b^+(t)\chi_h(t)\left[1-e^{-\int_{h(t)}^{t} y(\tau)\,d\tau}\right]\int_{t_0}^{t} e^{\int_s^t y(\tau)\,d\tau}\times$$

$$\times z(s)\,ds-b^+(t)\chi_h(t)\int_{h(t)}^{t} e^{\int_s^{h(t)} y(\tau)\,d\tau} z(s)\,ds-$$

$$-a^-(t)\int_{t_0}^{t} e^{\int_s^t y(\tau)\,d\tau} z(s)\,ds-b^-(t)\chi_h(t)\int_{t_0}^{h(t)} e^{\int_s^{h(t)} y(\tau)\,d\tau} z(s)\,ds=f(t).$$

На основании леммы 3 в силу неравенства (4) заключаем, что функция Коши $C(t, s)$ уравнения (3) положительна в области Δ_b.

Положив в условия теоремы 1 $y(t)=\dfrac{\alpha}{t}$, где α – некоторая постоянная, получим:

Следствие 1. Пусть справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{m} a^+(t)+\sum_{j=1}^{n} b^+(t)\chi_h(t)\le\frac{1}{4t^2}.$$

Тогда функция Коши $C(t, s)$ уравнения (3) положительна в области Δ_b.

Замечание 1. Если $n=1$, $a_i(t)=0$, $i=\overline{1, m}$, $h(t)\equiv t$, то следствие 1 – это хорошо известный признак Беллмана неосцилляции решений дифференциального уравнения второго порядка без отклонения аргумента.

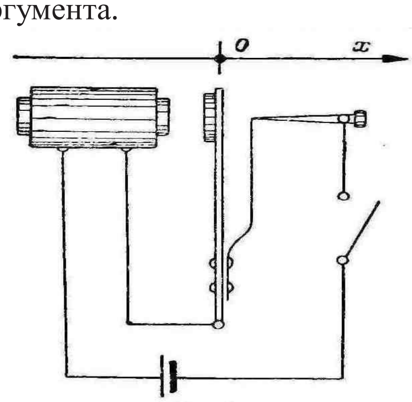

Рис. 1. Электромагнитный прерыватель.

Полученные результаты можно использовать для исследования уравнения, моделирующего колебания электромагнитного прерывателя [3. С. 11].

Система, представленная на рисунке 1, описывается уравнением второго порядка

$$mx''(t)+rx'(t)+kx(t)=\tilde{f}(t-\Delta, x). \quad (6)$$

Здесь m – масса молоточка, r – характеристика трения в системе, k – характеристика восстанавливающей силы $f(t, x)$. Функция $\tilde{f}(t, x)$ – резонансная составляющая силы $f(t, x)$. Необходимым условием работы прибора является наличие запаздывания Δ, которое вызывается самоиндукцией, действующей на молоточек: магнитная сила не возникает и не исчезает мгновенно в момент срабатывания контакта в цепи прерывателя. При отсутствии самоиндукции возникновение и исчезновение силы в момент срабатывания контакта происходит мгновенно, и тогда можно считать

$$f(t,x) = -\frac{p}{2}(1+\operatorname{sgn} x),$$

где $p = \max\left|f(t,x)\right|$.

Пусть входной сигнал задается в виде

$$x = a \cdot \sin 2\sigma t, \qquad (7)$$

где a – заданная амплитуда, 2σ – частота.

При нулевом приближении (7) для резонансной составляющей получим $\tilde{f}(t,x) = -\frac{2p}{\pi}\sin 2\sigma t = -\frac{2p}{\pi a}x$, а тогда $\tilde{f}(t-\Delta,\ x) = -\frac{2p}{\pi a}x(t-\Delta)$.

Следовательно, уравнение (6) для первого приближения принимает вид

$$x''(t) + \frac{r}{m}x'(t) + \frac{k}{m}x(t) + \frac{2p}{\pi a m}x(t-\Delta) = 0. \qquad (8)$$

Вместо уравнения (8) рассмотрим уравнение

$$x''(t) + 2\mu x' + \nu^2 x(t) + T(t)x(t-\Delta) = 0. \qquad (9)$$

Подстановкой $x(t) = e^{-\mu t}y(t)$ уравнение (9) приводится к виду

$$(\Lambda_1 y)(t) \equiv y''(t) + (\nu^2 - \mu^2)y(t) + $$
$$+T(t)e^{\mu\Delta}y(t-\Delta) = 0.$$

Для неоднородного уравнения

$$(\Lambda_1 y)(t) = f(t),\ t \in [t_0,\ b] \qquad (10)$$

приведем утверждения о знакопостоянстве функции Коши. В уравнении (10) считаем функции $T(t)$ и $f(t)$ суммируемыми со степенью p на отрезке $[t_0,\ b]$. Под решением уравнения (10) понимаем функцию $x \in W_b^{(2)}$.В качестве следствия теоремы 1 имеем: Теорема 2. Пусть существует такая функция $z \in AC_p[t_0,\ b]$ ($z(t) = 0$, если $t < t_0$), то выполняется неравенство

$$z'(t) + z^2(t) + (\nu^2 - \mu^2)z(t) + T(t)\chi_\tau(t) \le 0.$$

Тогда функция Коши $C(t,\ s)$ уравнения (10) положительна в области Δ_b.

Отметим вытекающие из теоремы 2 следствия.

Следствие 2. Пусть для некоторого α выполнено неравенство

$$\alpha^2 + (\nu^2 - \mu^2)\alpha + T(t)\chi_\tau(t) \le 0.$$

Тогда функция Коши уравнения (10) положительна в области Δ_b.

Следствие 3. Если выполняется неравенство

$$\nu^2 - \mu^2 + T(t)\chi_\tau(t) \le \frac{1}{4t^2},$$

то функция Коши уравнения (10) положительна в области Δ_b.

Литература

1. Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991. 280 с.

2. Березанский Л. М., Ларионов А. С. Положительность матрицы Коши линейного функционально-дифференциального уравнения // Дифференциальные уравнения. 1988. Т.24, №11. С. 1843 – 1854.

3. Норкин С. Б. Дифференциальные уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом. М.: Наука, 1965. 331 с.