

Рис. 1. Расчетная цепная динамическая модель механической трансмиссии экспериментального трактора ТП-4Э для I – IV передач.

Перейдем к другой системе координат, в которой роль обобщенных координат выполняют углы закручивания участков валопровода между массами, определяемые относительными угловыми отклонениями масс:

$$\alpha_n = \varphi_n - \varphi_{n+1},$$

где  $n = 1, 2, 3, 4 \dots 20$  – для механической трансмиссии,  $n = 1, 2, 3, 4 \dots 16$  – для гидромеханической трансмиссии.

В относительных угловых отклонениях исключено общее вращение валопровода, одинаковое для всех масс валопровода, уменьшено число степеней свободы динамической системы и, соответственно, число уравнений колебаний валопровода. Умножим первое уравнение (1) на  $J_2$ , второе на  $J_1$  и вычтем последнее из первого. Затем третье уравнение, умноженное на  $J_2$ , вычтем из второго, умноженного на  $J_3$ , и так далее. После преобразований получим систему дифференциальных уравнений крутильных колебаний в относительных угловых отклонениях масс [1, 2, 3]:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\alpha}_1 &= \frac{b_{12} \cdot (J_1 + J_2)}{J_1 \cdot J_2} \cdot \dot{\alpha}_1 - \frac{C_{12} \cdot (J_1 + J_2)}{J_1 \cdot J_2} \cdot \alpha_1 - \\ &- \frac{b_{23}}{J_2} \cdot \dot{\alpha}_2 + \frac{C_{23}}{J_2} \cdot \alpha_2; \\ \ddot{\alpha}_2 &= -\frac{b_{12}}{J_2} \cdot \dot{\alpha}_1 + \frac{C_{12}}{J_2} \cdot \alpha_1 + \frac{b_{23} \cdot (J_2 + J_3)}{J_2 \cdot J_3} \cdot \dot{\alpha}_2 - \\ &- \frac{C_{23} \cdot (J_2 + J_3)}{J_2 \cdot J_3} \cdot \alpha_2 - \frac{b_{34}}{J_3} \cdot \dot{\alpha}_3 + \frac{C_{34}}{J_3} \cdot \alpha_3; \\ &\dots \dots \dots \\ \ddot{\alpha}_{n-1} &= -\frac{b_{(n-2)(n-1)}}{J_{(n-1)}} \cdot \dot{\alpha}_{(n-2)} + \frac{C_{(n-2)(n-1)}}{J_{(n-1)}} \cdot \alpha_{(n-2)} + \\ &+ \frac{b_{(n-1)n} \cdot (J_{(n-1)} + J_n)}{J_{(n-1)} \cdot J_n} \cdot \dot{\alpha}_{(n-1)} - \\ &- \frac{C_{(n-1)n} \cdot (J_{(n-1)} + J_n)}{J_{(n-1)} \cdot J_n} \cdot \alpha_{(n-1)} - \frac{b_{n(n+1)}}{J_n} \cdot \dot{\alpha}_n + \\ &+ \frac{C_{n(n+1)}}{J_n} \cdot \alpha_n; \\ \ddot{\alpha}_n &= -\frac{b_{(n-1)n}}{J_n} \cdot \dot{\alpha}_{(n-1)} + \frac{C_{(n-1)n}}{J_n} \cdot \alpha_{(n-1)} + \\ &+ \frac{b_{n(n+1)} \cdot (J_n + J_{n+1})}{J_n \cdot J_{n+1}} \cdot \dot{\alpha}_n - \frac{C_{n(n+1)} \cdot (J_n + J_{n+1})}{J_n \cdot J_{n+1}} \cdot \alpha_n. \end{aligned} \right\} (2)$$

где  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  – угловые отклонения дисков на эквивалентной схеме трансмиссии.

Введем обозначения для коэффициентов системы:

$$k_{m1} = \frac{C_{m-1,m}}{J_m};$$

$$k_{m2} = -\frac{C_{m,m+1} \cdot (J_m + J_{m+1})}{J_m \cdot J_{m+1}}; k_{m3} = \frac{C_{m+1,m+2}}{J_{m+1}};$$

$$k_{m4} = -\frac{b_{m-1,m}}{J_m};$$

$$k_{m5} = \frac{b_{m,m+1} \cdot (J_m + J_{m+1})}{J_m \cdot J_{m+1}}; k_{m6} = -\frac{b_{m+1,m+2}}{J_{m+1}};$$

где  $m$  может принимать значения от 1 до  $n$ , и перепишем систему (2), используя эти обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\alpha}_1 &= k_{12} \cdot \alpha_1 + k_{13} \cdot \alpha_2 + \\ &+ k_{15} \cdot \dot{\alpha}_1 + k_{16} \cdot \dot{\alpha}_2; \\ \ddot{\alpha}_2 &= k_{21} \cdot \alpha_1 + k_{22} \cdot \alpha_2 + k_{23} \cdot \alpha_3 + \\ &+ k_{24} \cdot \dot{\alpha}_1 + k_{25} \cdot \dot{\alpha}_2 + k_{26} \cdot \dot{\alpha}_3; \\ &\dots\dots\dots \\ \ddot{\alpha}_{n-1} &= k_{(n-1),1} \cdot \alpha_{n-2} + k_{(n-1),2} \cdot \alpha_{n-1} + \\ &+ k_{(n-1),3} \cdot \alpha_n + k_{(n-1),4} \cdot \dot{\alpha}_{n-2} + \\ &k_{(n-1),5} \cdot \dot{\alpha}_{n-1} + k_{(n-1),6} \cdot \dot{\alpha}_n; \\ \ddot{\alpha}_n &= k_{n,1} \cdot \alpha_{n-1} + k_{n,2} \cdot \alpha_n + \\ &+ k_{n,4} \cdot \dot{\alpha}_{n-1} + k_{n,5} \cdot \dot{\alpha}_n. \end{aligned} \right\} (3)$$

Сводим систему из  $n$  линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка к системе из  $2n$  линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка, вводя новые переменные  $\alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, \dots, \alpha_{2n}$ :

$$\left. \begin{aligned} \dot{\alpha}_1 &= \alpha_{n+1}; \\ \dot{\alpha}_2 &= \alpha_{n+2}; \\ &\dots\dots\dots \\ \dot{\alpha}_{n-1} &= \alpha_{n+(n-1)}; \\ \dot{\alpha}_n &= \alpha_{2n}; \\ \dot{\alpha}_{n+1} &= k_{12} \cdot \alpha_1 + k_{13} \cdot \alpha_2 + \\ &+ k_{15} \cdot \alpha_{n+1} + k_{16} \cdot \alpha_{n+2}; \\ \dot{\alpha}_{n+2} &= k_{21} \cdot \alpha_1 + k_{22} \cdot \alpha_2 + \\ &+ k_{23} \cdot \alpha_3 + k_{24} \cdot \alpha_{n+1} + k_{25} \cdot \alpha_{n+2} + k_{26} \cdot \alpha_{n+3}; \\ &\dots\dots\dots \\ \dot{\alpha}_{n+(n-1)} &= k_{(n-1),1} \cdot \alpha_{n-2} + k_{(n-1),2} \cdot \alpha_{n-1} + \\ &+ k_{(n-1),3} \cdot \alpha_n + k_{(n-1),4} \cdot \alpha_{2n-2} + k_{(n-1),5} \cdot \alpha_{2n-1} \\ &+ k_{(n-1),6} \cdot \alpha_{2n} \\ \dot{\alpha}_{2n} &= k_{n,1} \cdot \alpha_{2n-1} + k_{n,2} \cdot \alpha_{2n} + k_{n,4} \cdot \alpha_{2n-1} + k_{n,5} \cdot \alpha_{2n}; \end{aligned} \right\} (4)$$

Для решения полученной системы уравнений используем метод Рунге-Кутты как наиболее эффективный для решения задач такого рода – явный, достаточно экономичный и энергетически согласованный с физической сущностью задачи.

Запишем расчетные формулы метода Рунге-Кутты для решения дифференциального уравнения  $y' = f(x, y)$  при начальном условии  $y(x_0) = y_0$ .

Используем рекуррентное условие  $x_{i+1} = x_i + h, y_{i+1} = y(x_{i+1})$ . Здесь  $h$  – значение шага по времени,  $y_i$  – приближенное значение  $y$  в точке  $x_i$ .

Вычисление приближенного значения  $y_{i+1}$  в следующей точке  $x_{i+1} = x_i + h$  производится по формулам для пересчета значения  $y$  в точке  $x_{i+1}$  через значения  $y$  в точке  $x_i$ :

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i),$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})].$$

Расчетные формулы для решения системы уравнений методом Рунге-Кутты аналогичны приведенным формулам для решения одного уравнения. Отличие состоит в том, что вместо скалярных величин используем векторы и матрицы.

Исходная приведенная система уравнений будет иметь вид  $y' = A \cdot y$ ,

где  $y = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, \dots, \alpha_{2n})$  – вектор неизвестных,  $A$  – матрица системы (для механической трансмиссии – квадратная матрица 40-го порядка, для гидромеханической – 32-го порядка):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & \cdot \\ k_{12} & k_{13} & 0 & k_{15} & k_{16} & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot \\ 0 & k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} & 0 & \cdot & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} & \cdot & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & \cdot & k_{(n-1),1} & k_{(n-1),2} & k_{(n-1),3} & k_{(n-1),4} & k_{(n-1),5} & k_{(n-1),6} & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & k_{n,1} & k_{n,2} & 0 & k_{n,4} & k_{n,5} & 0 & \cdot & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Для того, чтобы проанализировать поведение  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ , приближенно решаем систему уравнений и находим значения  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  для последовательных моментов времени, с шагом  $h$ . Полученные значения выводим на график.

Метод решения систем уравнений с 20 неизвестными для механической трансмиссии и с 16 неизвестными для гидромеханической трансмиссии реализован в виде компьютерной программы GYDROTRANS в среде Delphi. После сведения системы уравнений 2-го порядка к системе уравнений 1-го порядка получаем систему из 40 уравнений для механической трансмиссии и из 32 уравнений – для гидромеханической трансмиссии.

Программа читает из файла входные данные – значения моментов инерции, коэффициентов демпфирования и коэффициентов жесткости, вычисляет коэффициенты  $k$  и формирует матрицу  $A$ . После этого реализует метод Рунге-Кутты

для решения системы уравнений с начальными данными

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0, \dots, \alpha_{20} = 0, \\ \alpha_{21} &= \alpha_{21}^0, \\ \alpha_{22} &= \alpha_{22}^0, \dots, \alpha_{40} = \alpha_{40}^0, \end{aligned}$$

где до 8 значений  $\alpha_i^0$  (возмущающие факторы) задаются в долях единицы, остальные значения равны нулю. В ходе вычислительного эксперимента подобрано значение шага по времени, обеспечивающее устойчивое решение  $h = 0,0001$ . Значения  $\alpha$  для построения графиков вычислялись на интервале  $[0, 20]$ .

В результате получаем для каждого участка валопровода относительные крутильные колебания масс.

На рис. 2 представлено рабочее окно программы GYDROTRANS для 21-массовой динамической модели механической трансмиссии:

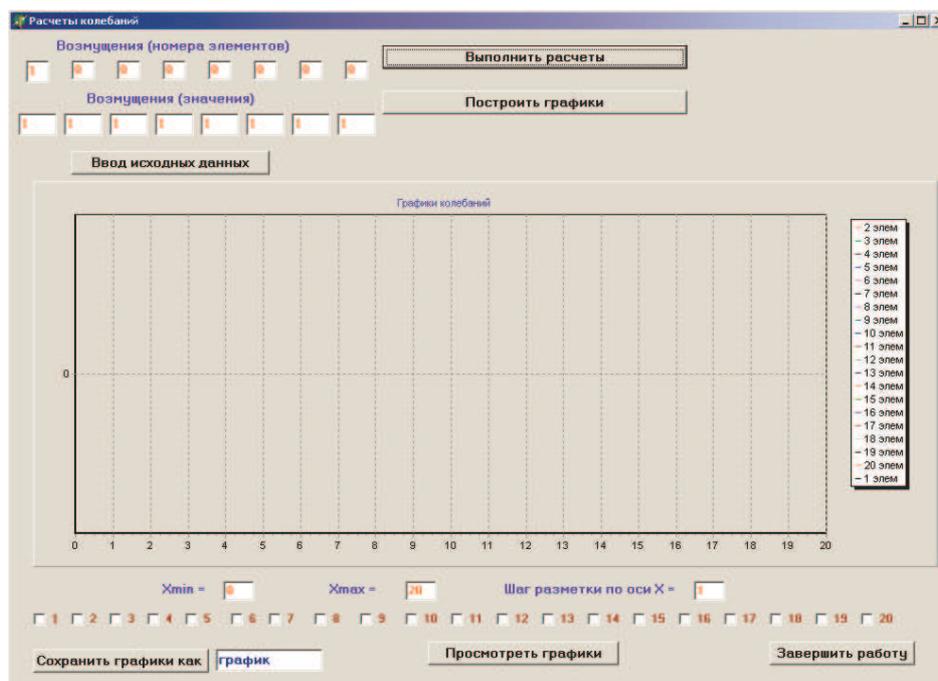


Рис. 2. Рабочее окно программы GYDROTRANS.

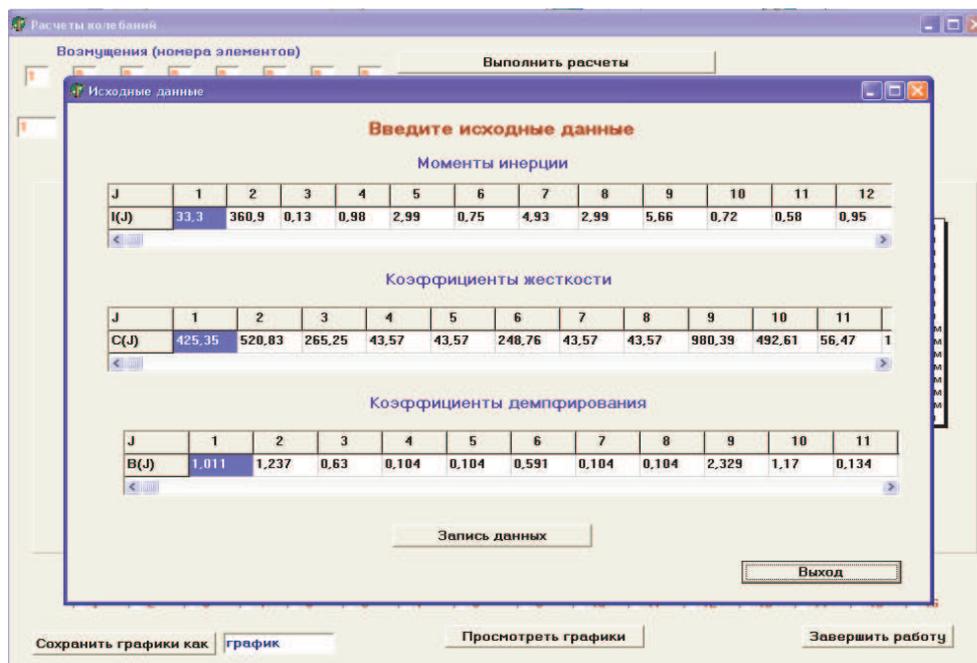


Рис. 3. Рабочее окно ввода исходных данных.

Программа позволяет изменять исходные данные – значения моментов инерции приведенных масс, коэффициентов демпфирования и коэффициентов жесткости участков, предварительно экспериментально определенных для основных рабочих передач бульдозера (рис. 3). В

окно ввода и корректировки исходных данных переходим путем нажатия кнопки «Ввод исходных данных» основного окна программы.

После ввода или корректировки данных они записываются путем нажатия

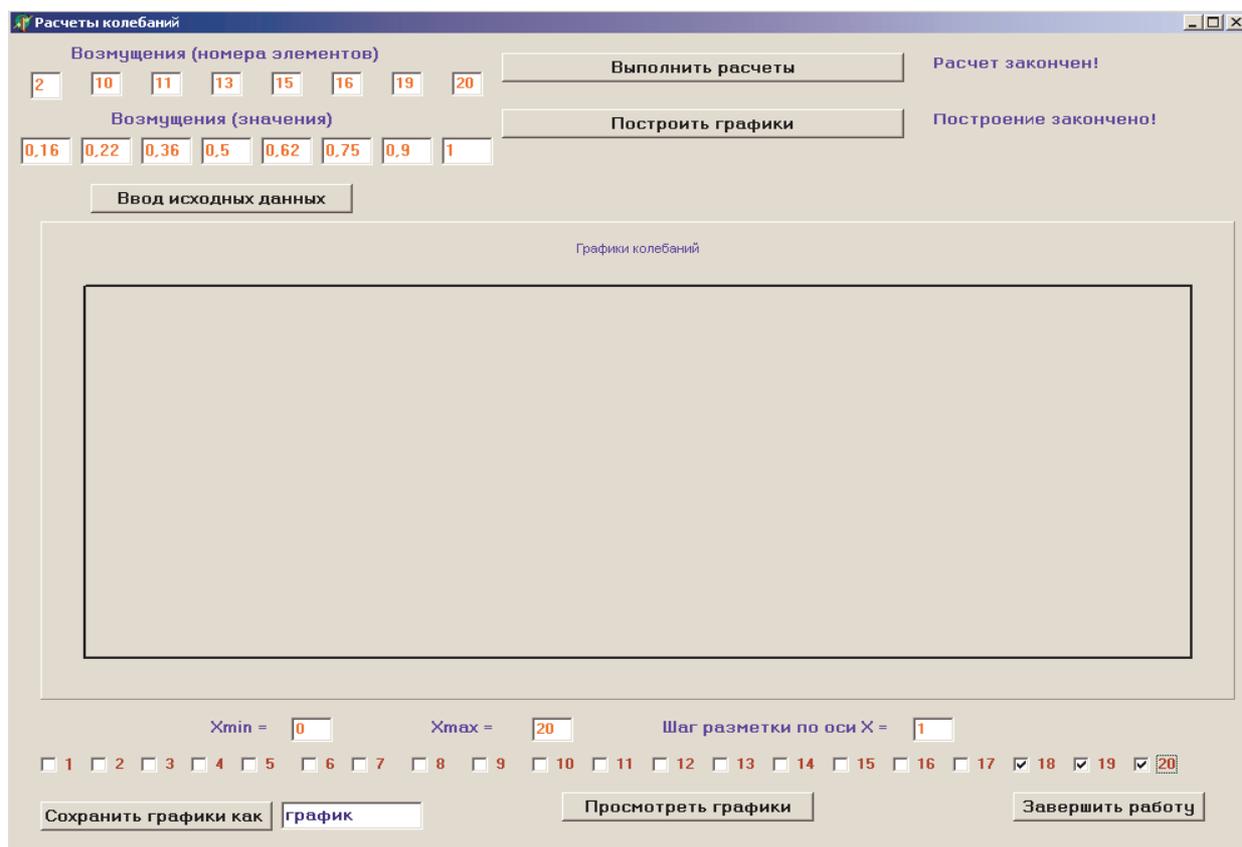
кнопки «Запись данных», и с помощью кнопки «Выход» осуществляется возврат в рабочее окно программы.

Программа позволяет оценить влияние на динамику каждого элемента трансмиссионной системы всех основных факторов, возмущающих систему одновременно (изменение газового момента двигателя, зацепление 1-й, 2-й и 3-й пары зубчатых шестерен КПП, зацепление центральной передачи, планетарного механизма, бортовой передачи, гусеничного зацепления), и влияние каждого возмущающего фактора по отдельности.

Для этого в левой верхней части рабочего окна программы необходимо ввести

номера элементов трансмиссии, на которые действуют возмущающие факторы, а так же их значения в долях от единицы. За единицу принимаем возмущающий момент на ведущей звездочке гусеничного движителя (рис. 4).

Затем программе дается команда «Выполнить расчеты» и «Построить графики». После того, как программа отвечает, что расчет и построение графиков закончено, в нижней части рабочего окна задаются номера участков динамической модели, для которых необходимо просмотреть и исследовать диаграммы (графики) относительных амплитуд колебаний (рис. 5).



**Рис.4. Выполнение расчетов и построение диаграмм.**

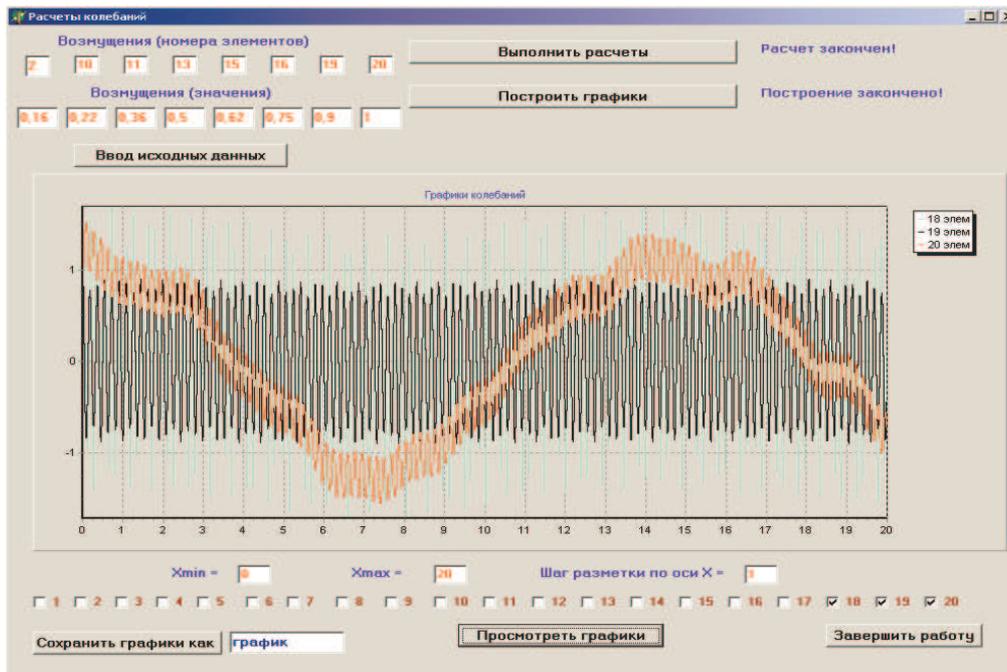


Рис. 5. Просмотр диаграмм.

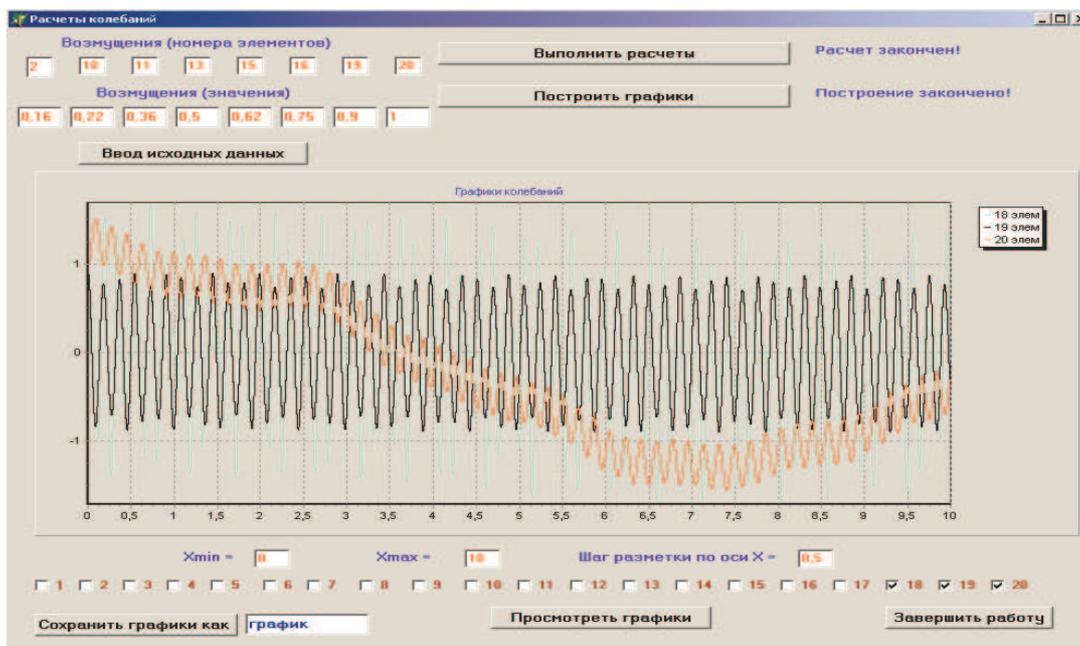


Рис. 6. Изменение диапазона просмотра диаграмм.

Для удобства просмотра графиков колебаний, например при большой частоте колебаний, можно изменить диапазон просмотра путем изменения значений в окнах «Xmax» и «Шаг разметки по оси X» (рис. 6).

Построенные диаграммы можно сохранить для дальнейшего изучения в

виде графических файлов путем нажатия кнопки «Сохранить графики как». Предварительно следует в окне «график» задать этим файлам идентификаторы.

Помимо построения графиков для качественного анализа, в программе предусмотрена также возможность запись координат графиков в виде таблицы чи-

словых данных. Эту таблицу можно, например, экспортировать в программу Microsoft Excel для проведения статистических исследований.

*Литература*

1. Бабаков И. М. Теория колебаний. М.: Наука, 1968. 559 с.
2. Стручков А. В., Ереско Т.Т. Теоретические исследования динамической на-

груженности трансмиссии бульдозера с гидротрансформатором // Системы. Методы. Технологии. 2009. № 3. С. 26-28.

3. Климов А.А., Стручков А.В. Исследование динамической нагруженности трансмиссии бульдозерного агрегата на базе трактора класса 40 кН на грунтах 1-2 категорий // Вестн. КрсГАУ. 2008. № 1. С. 201-206.

УДК 517.929

*А.С. Ларионов\*, Ю.А. Загорулько*

**УСЛОВИЯ СОХРАНЕНИЯ ЗНАКА ФУНКЦИИ КОШИ  
УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ**

*Предлагаются эффективные признаки положительности функции Коши дифференциального уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом. Полученные результаты применяются для исследования модели процесса колебания электромагнитного прерывателя.*

**Ключевые слова:** функция Коши, дифференциальное уравнение, запаздывание

Многие методы качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений используют те или иные условия монотонности. Понятие монотонности лежит, например, в основе исследования дифференциальных, разностных, интегральных и других неравенств, используемых для построения оценок различных уравнений и создания приближенных методов типа метода Чаплыгина. При таком подходе к изучению дифференциальных уравнений существенную роль играют условия положительности функции Коши вспомогательного уравнения. В первой части статьи будут приведены достаточные условия сохранения знака функции Коши дифференциального уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом.

Будем пользоваться обозначениями:  $L_p^n[t_0, b] = L_p^n$ ,  $1 \leq p < \infty$  – банахово пространство суммируемых со степенью  $p$  на отрезке  $[t_0, b]$  функций  $y: [t_0, b] \rightarrow R^n$ ;  $AC_p^n[t_0, b] = AC_p^n$  – банахово пространство абсолютно непрерывных функций  $x: [t_0, b] \rightarrow R$ , причем  $x' \in L_p^n$ .

Рассмотрим уравнение

$$(\Delta x)(t) \equiv x'(t) - (Vx)(t) = f(t), \quad (1)$$

где  $V: AC_p^n \rightarrow L_p^n$  – линейный ограниченный вольтерров оператор. Так как оператор  $V$  вольтерров, то можно определить понятие решения уравнения (1) на отрезке  $[t_0, \tau] \subset [t_0, b]$  и понятие соответствующего сужения

\* – автор, с которым следует вести переписку